Дискретная математика 2

Что такое дискретная математика?

Что может быть дискретно?

- Множества, с которыми мы работаем
- Шаги некоторого алгоритма
- Время

Что такое ДМ?

- Логика высказываний
- Логика предикатов
- Математическая логика
- Комбинаторика
- Теория алгоритмов
- Теория автоматов
- Теория графов
- Теория игр
- Теория кодирования
- Логическое программирование
- Функциональное программирование

Теория автоматов и формальных языков

Институт Информационных Технологий

ЧелГУ, 2010

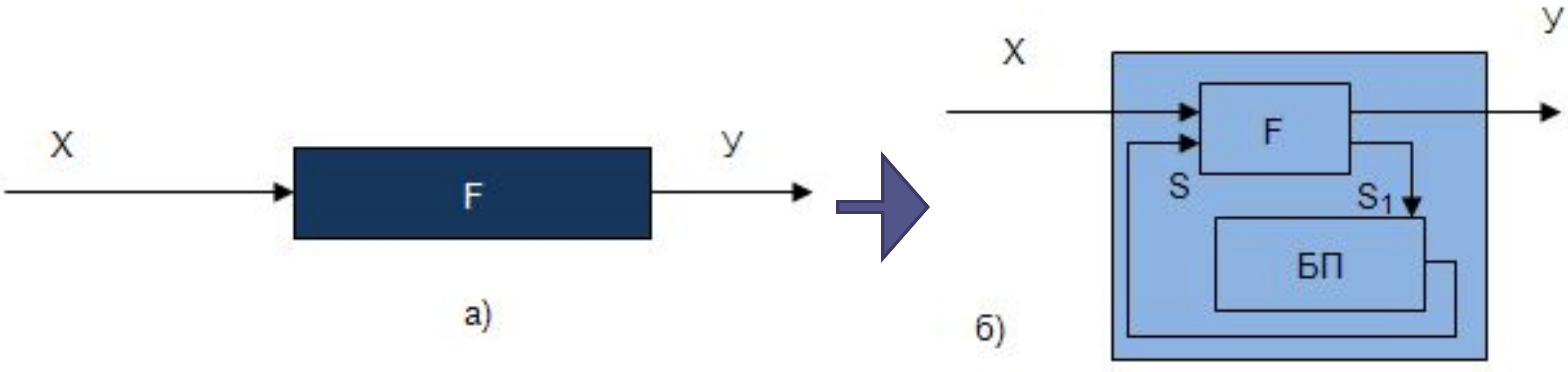
Автомат

$F: X \to Y$

Зависит от того, какая информация в данный момент появилась на входе

от того, что происходило раньше

Автомат

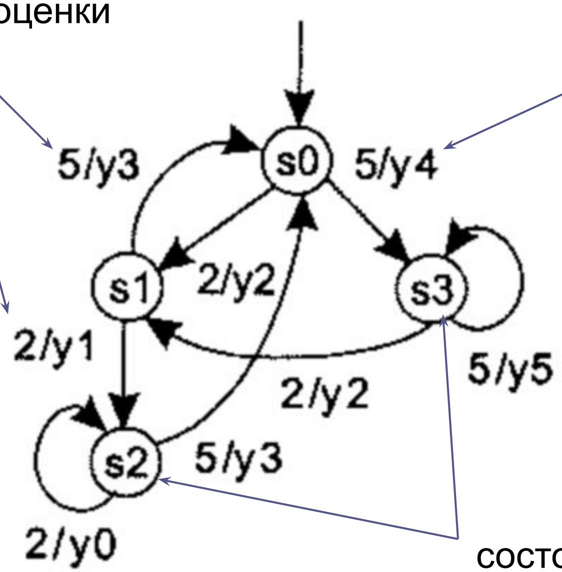


Автомат, в зависимости от входных данных X меняет свое состояние S – текущее состояние хранится в памяти

Автомат

Пример реализация автомата

Входные данные:
2,5 - оценки



состояния

Автомат, описывающий поведение «умного» отца

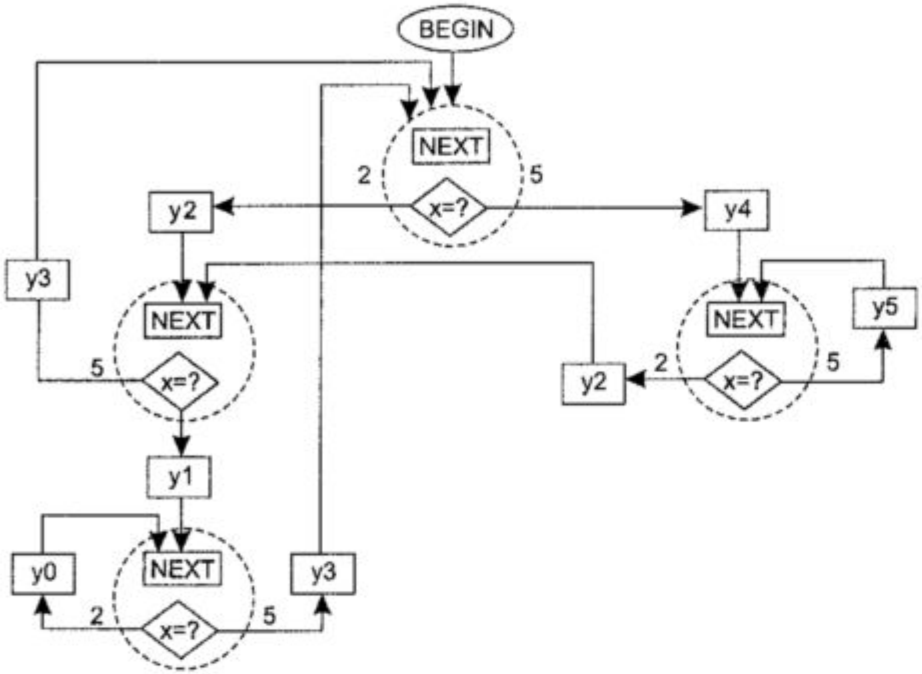
Действия – выходные сигналы:

y0: — брать ремень;
y1: — ругать сына;
y2: — успокаивать сына;
y3: — надеяться;
y4: — радоваться;
y5: — ликовать.

Реализация:
- программная
- аппаратная

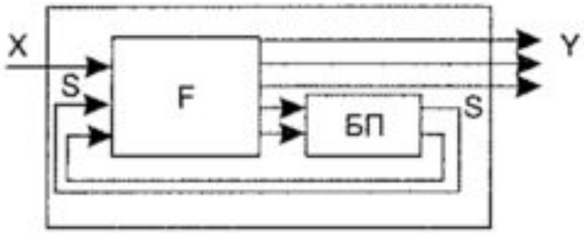
Автомат

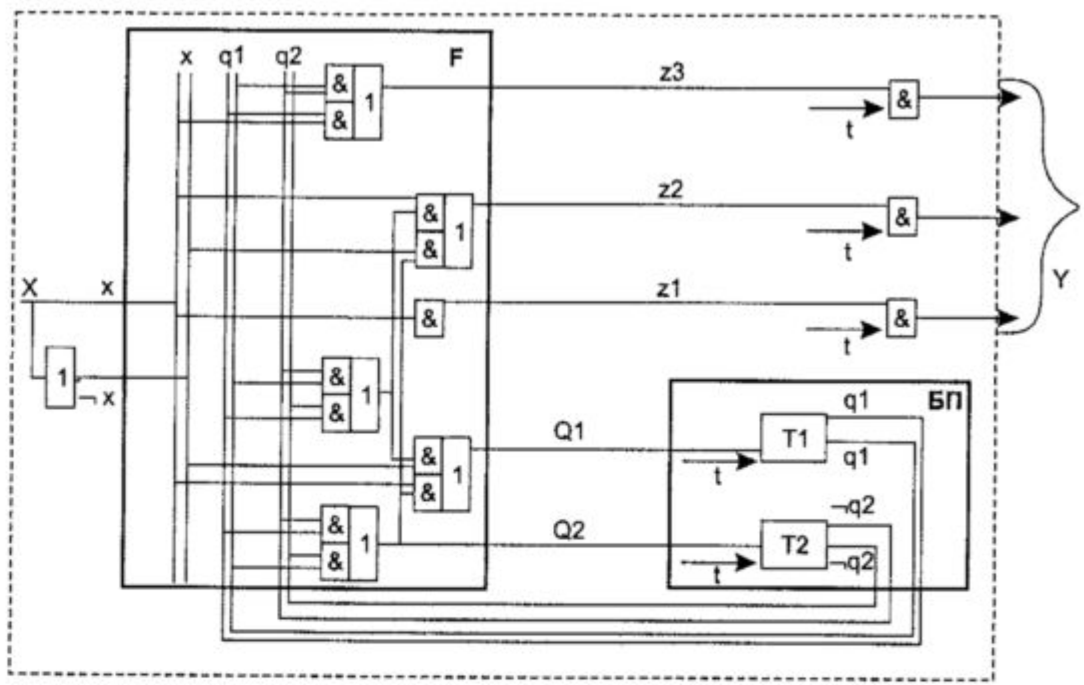
Пример програмной реализация автомата



Автомат

Пример аппаратной реализация автомата





Автомат

Рассмотрим механизм управления лифтом. Если всего в здании ***N*** этажей, лифт может находится в одном из ***N*** состояний:

$a_1, a_2, \dots, a_N$ - возможные состояния

На вход подаются номера этажей, к которым должен поехать лифт:

$z_1, z_2, \dots, z_N$ - этажи здания

Выходными сигналами будем считать расстояния, которые должен проехать лифт:

$$w(t) = z(t) - z(t-1)$$

При этом множество возможных значений w(t) конечно и определяется наборам возможных входных значений и множеством этажей.

Это скучный слайд с терминологией

Автомат

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ - входной алфавит

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ - выходной алфавит

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ - набор внутренних состояний

$t = 0, 1, 2, \dots$ - дискретные моменты времени

$a(0)$ - состояние автомата в начальный момент времени

$a(i)$ - состояние автомата в момент времени $\boldsymbol{i}$.

Автомат – математическая абстракция, позволяющая описывать пути изменения состояния объекта в зависимости от его текущего состояния и входных данных.

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ $\boxed{A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}}$ $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$

Это скучный слайд с терминологией

Алфавитный оператор

Последовательности входных букв: $z(1)z(2)\ldots z(k)$

называются входными словами.

На вход автомату может подаваться любое слово из *множества допустимы слов*.

Каждое допустимое *входное слово*: $p = z(1)z(2)\ldots z(k)$

вызывает появление *выходного слова*: $q = w(1)w(2)\ldots w(k)$

Длины соответствующих входных и выходных слов равны между собой.

$\varphi_A\colon P \to Q$ - *алфавитный оператор*, индуцированный автоматом ***A***.

P - множество допустимых входных слов

Q - множество выходных слов

Это скучный слайд с терминологией

Функции переходов и выходов

δ - функция переходов, если:

$$a(t) = \delta\big(a(t-1), z(t)\big)$$

λ - функция выходов, если:

$$w(t) = \lambda\big(a(t-1), z(t)\big)$$

При помощи задания начального состояния ***a(0)*** и функций перехода и выхода $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\delta}$ можно для любого входного слова $\boldsymbol{p}$ определить выходное слово $\boldsymbol{q}$.

$$q = \varphi_A(p)$$

Автоматы Мили и Мура

Автомат Мили:

$$a(t) = \delta\big(a(t-1), z(t)\big)$$
$$w(t) = \lambda\big(a(t-1), z(t)\big)$$

Символ на выходе зависит от символа на входе автомата и состояния автомата в предыдущий момент времени

Автомат Мура:

$$a(t) = \delta\big(a(t-1), z(t)\big)$$
$$w(t) = \lambda\big(a(t)\big)$$

Символ на выходе зависит только от текущего состояния автомата

Автомат Мура всегда сводится к автомату Мили:

$$w(t) = \lambda\big(a(t)\big) = \lambda\Big(\delta\big(a(t-1), z(t)\big)\Big) = \tilde{\lambda}\big(a(t-1), z(t)\big)$$

Это скучный слайд с терминологией

Это скучный слайд с терминологией

Автомат Мили

$a(t-1)$	z_0	z_1	z_2
a_0	a_2	a_3	a_1
a_1	a_3	a_0	a_2
a_2	a_0	a_1	a_1
a_3	a_2	a_2	a_3

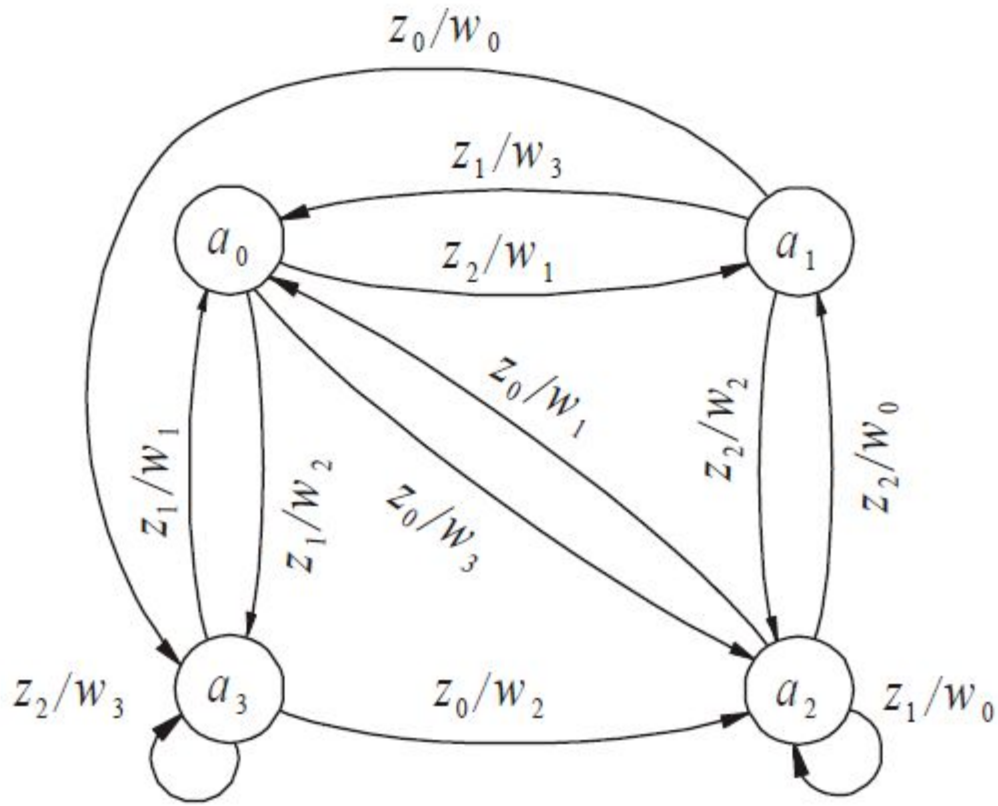
$a(t-1)$	z_0	z_1	z_2
a_0	w_3	w_2	w_1
a_1	w_0	w_3	w_0
a_2	w_1	w_0	w_2
a_3	w_2	w_1	w_3

$a(t-1)$	z_0	z_1	z_2
a_0	a_2/w_3	a_3/w_2	a_1/w_1
a_1	a_3/w_0	a_0/w_3	a_2/w_0
a_2	a_0/w_1	a_1/w_0	a_1/w_2
a_3	a_2/w_2	a_2/w_1	a_3/w_3

Это скучный слайд с терминологией

Автомат Мили

$a(t-1)$	z_0	z_1	z_2
a_0	a_2/w_3	a_3/w_2	a_1/w_1
a_1	a_3/w_0	a_0/w_3	a_2/w_0
a_2	a_0/w_1	a_1/w_0	a_1/w_2
a_3	a_2/w_2	a_2/w_1	a_3/w_3



Автомат Мура

$a(t-1)$	z_0	z_1	z_2
a_0	a_3	a_2	a_0
a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_0	a_1
a_3	a_0	a_2	a_2

$a(t)$	$w(t)$
a_0	w_2
a_1	w_0
a_2	w_3
a_3	w_1

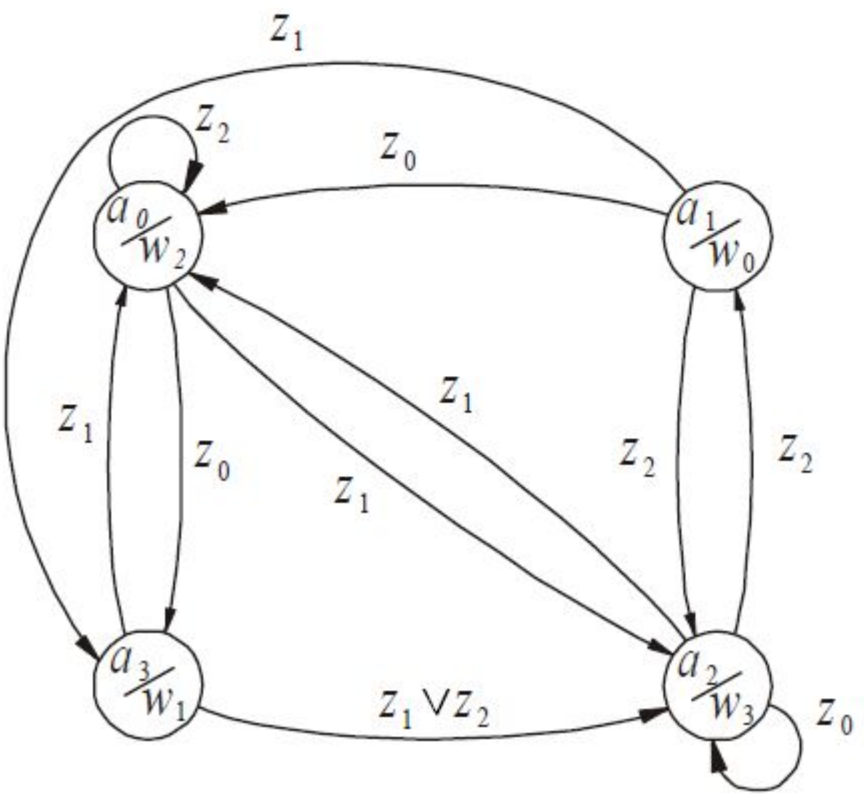
$w(t-1)$	$a(t-1)$	z_0	z_1	z_2
w_2	a_0	a_3	a_2	a_0
w_0	a_1	a_0	a_3	a_2
w_3	a_2	a_2	a_0	a_1
w_1	a_3	a_0	a_2	a_2

Это скучный слайд с терминологией

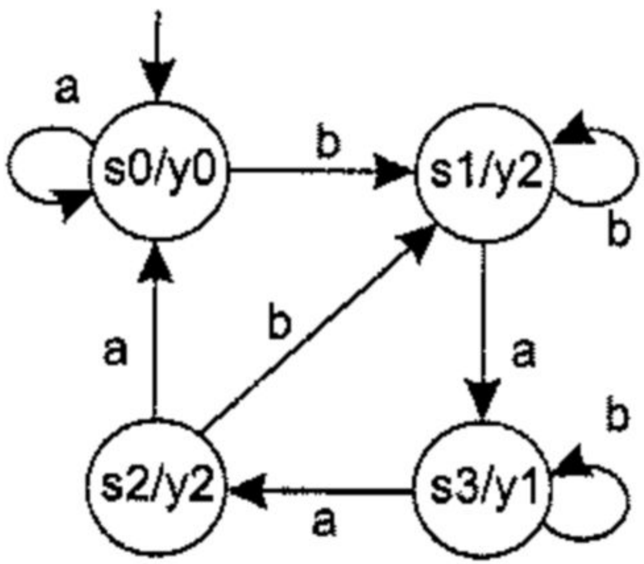
Это скучный слайд с терминологией

Автомат Мура

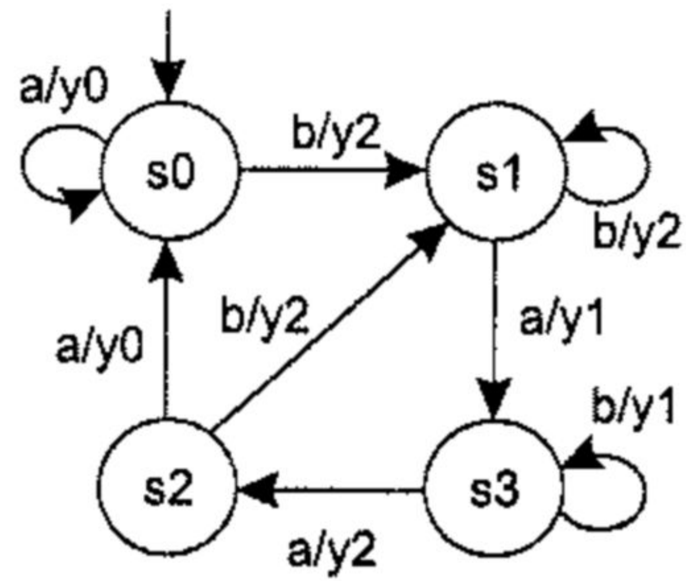
$w(t-1)$	$a(t-1)$	z_0	z_1	z_2
w_2	a_0	a_3	a_2	a_0
w_0	a_1	a_0	a_3	a_2
w_3	a_2	a_2	a_0	a_1
w_1	a_3	a_0	a_2	a_2



Автоматы Мили и Мура



≡

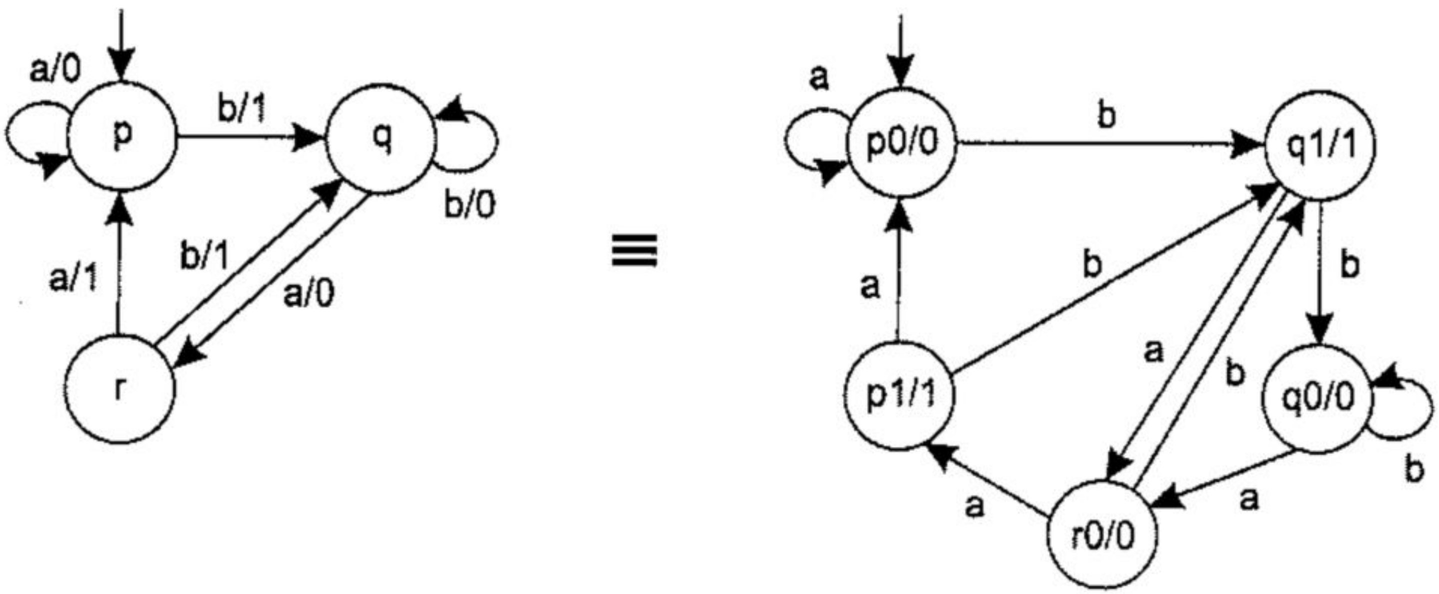


Автомат Мура

Автомат Мили

Из автомата Мура можно
получить эквивалентный
автомат Мили
Слайд 11

Автоматы Мили и Мура



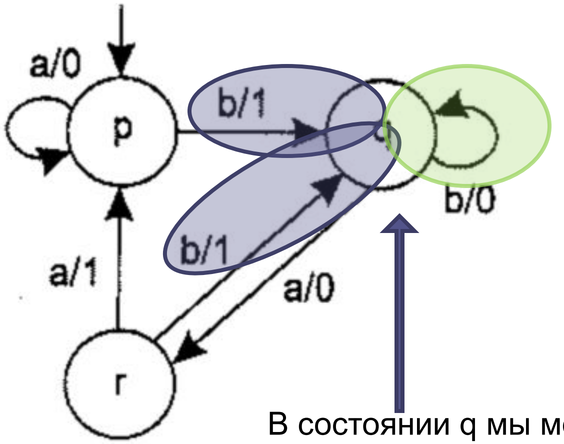
Автомат Мили

Автомат Мура

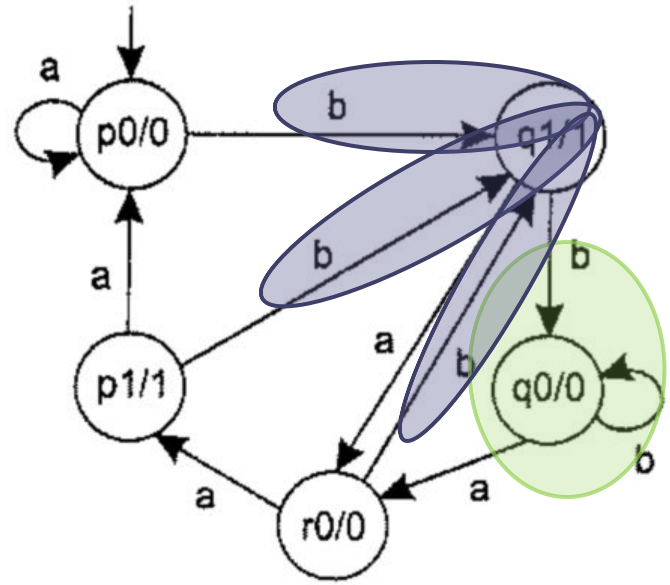
Из автомата Мили можно
получить эквивалентный
автомат Мура

Каждое состояние s автомата Мили расщепляется на несколько эквивалентных состояний, с каждым из которых связан один из выхдных символов

Автоматы Мили и Мура



≡



В состоянии q мы можем находиться, имея на выходе 0 или 1, значит будет 2 состояния q0 и q1

Автомат Мили → Автомат Мура

Из автомата Мили можно получить эквивалентный автомат Мура

Каждое состояние s автомата Мили расщепляется на несколько эквивалентных состояний, с каждым из которых связан один из выхдных символов

Условия «автоматности» оператора

$\varphi_A : P \to Q$ - алфавитный оператор

1. $\varphi_A : P \to Q$ осуществляет однозначное отображение из ***P*** в ***Q***.
2. Если ***P*** содержит слово ***p***, то ***P*** содержит и все начальные отрезки слова ***p***, включая пустое слово.
3. $\varphi_A : P \to Q$ сохраняет длину слова.
4. $\begin{cases} p^k = p^{k-1} z(k) \\ q^k = q^{k-1} w(k) \\ \varphi_A(p^k) = q^k \end{cases} \Rightarrow \varphi_A(p^{k-1}) = q^{k-1}$

Такой оператор называется *автоматным оператором*.

Это скучный слайд с терминологией

Это скучный слайд с терминологией

Теория автоматов

Теория автоматов
Состав теории

Абстрактная теория
Математический аппарат теории автоматов, представляет связь с алгеброй и логикой.

Структурная теория
Описывает способы реализации автомата при помощи заданного набора элементов.

Автоматы, рассматриваемые безотносительно их структуры, принято *абстрактными автоматами*.

Абстрактный автомат задаётся своим входным алфавитом, выходным алфавитом, множеством состояний и автоматным оператором.

Теория автоматов и формальных языков

Приложения теории автоматов

Институт Информационных Технологий

ЧелГУ, 2010

Это скучный слайд с терминологией

Классификация автоматов

Автоматы
Классификация по основным функциям

Автоматы – распознаватели
Отвечают на вопрос, принадлежит ли заданная последовательность символов какому-либо множеству.

Автоматы – преобразователи
Преобразуют одну последовательность символов в другую последовательность символов.

Распознаватель правильного идентификатора

Правильным идентификатором называется последовательность букв, цифр и символа подчёркивания, начинающаяся с буквы или символа подчёркивания.

_a123
Var75
my_value

Правильные идентификаторы

Пусть реализованы функции:

```
int isLetter(char ch);
int isDigit(char ch);
int isSmall(char ch);
```

$a(t-1)$	digit	letter	small
a_0	-	a_1	a_1
a_1	a_1	a_1	a_1

Распознаватель правильного идентификатора

Правильным идентификатором называется последовательность букв, цифр и символа подчёркивания, начинающаяся с буквы или символа подчёркивания.

Пусть реализованы функции:

```
int isLetter(char ch);
int isDigit(char ch);
int isSmall(char ch);
```

$a(t-1)$	digit	letter	small
a_0	-	a_1	a_1
a_1	a_1	a_1	a_1

Достаточно функций:

```
int isLetterOrSmall(char ch);
int isDigit(char ch);
```

$a(t-1)$	digit	letter or small
a_0	-	a_1
a_1	a_1	a_1

Распознаватель перечисления

$\{123, 65, 767, -43\}$

$\{+73, -2, 11,\}$

Допустимые входные последовательности

$a(t-1)$	{	}	sign	digit	,
a_0	a_1	-	-	-	-
a_1	-	$\vdash$	a_2	a_2	-
a_2	-	$\vdash$	-	a_2	a_3
a_3	-	$\vdash$	a_2	a_2	-

Можно ли представить данный автомат в виде комбинации каких-либо других двух автоматов?