

**ПОВТОРЕНИЕ ПО  
ТЕМЕ  
ЛОГАРИФМИЧЕСК  
ИЕ УРАВНЕНИЯ И  
НЕРАВЕНСТВА**

## Функция $y = \log_a x$ и ее свойства

**Логарифмом** числа  $b$  по основанию  $a$  называется показатель степени  $b$ , в которую нужно возвести  $a$ , чтобы получить  $b$ .

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b, \quad b > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Например:  $3^{\log_3 7} = 7$ ,  $0,5^{\log_{0,5} 25} = 25$

## Свойства логарифмов

При любом  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  и  $x > 0$ ,  $y > 0$

1)  $\log_a 1 = 0$

3)  $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

2)  $\log_a a = 1$

4)  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5)  $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$

6) *Формула перехода к новому основанию:*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Функцию, заданную формулой

$$y = \log_a x,$$

называют *логарифмической* с основанием *a*.

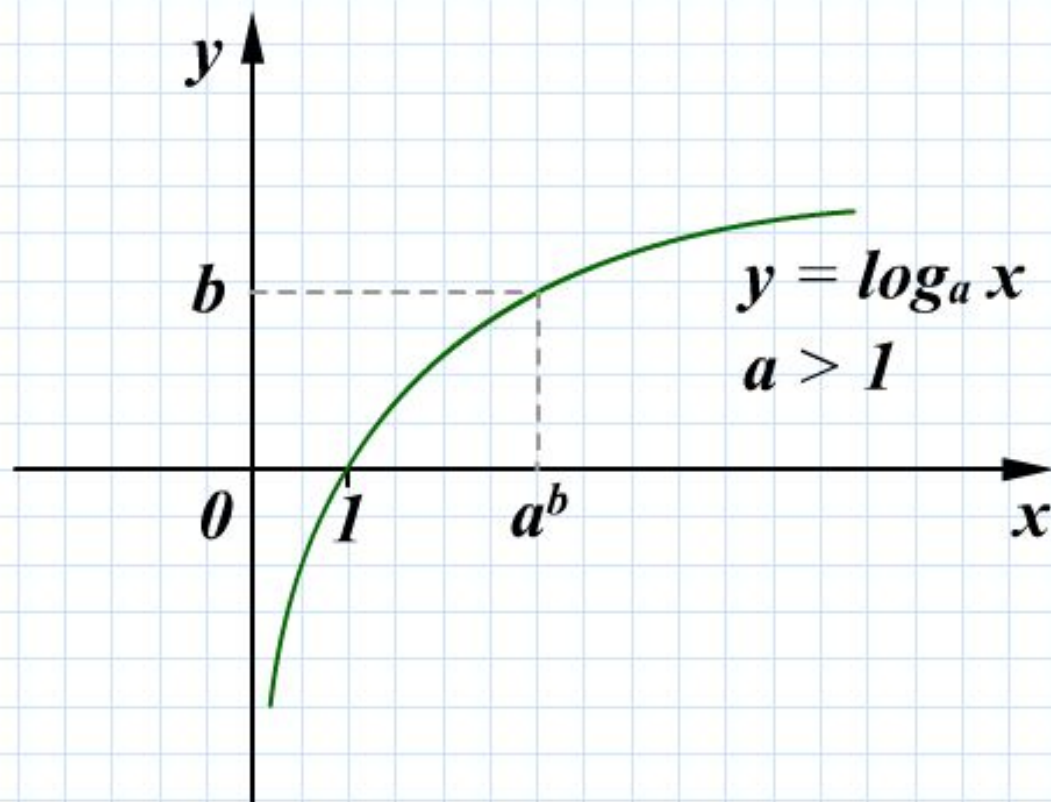
Свойства логарифмической функции

$$1) D(\log_a x) = R_1$$

$$2) E(\log_a x) = R$$

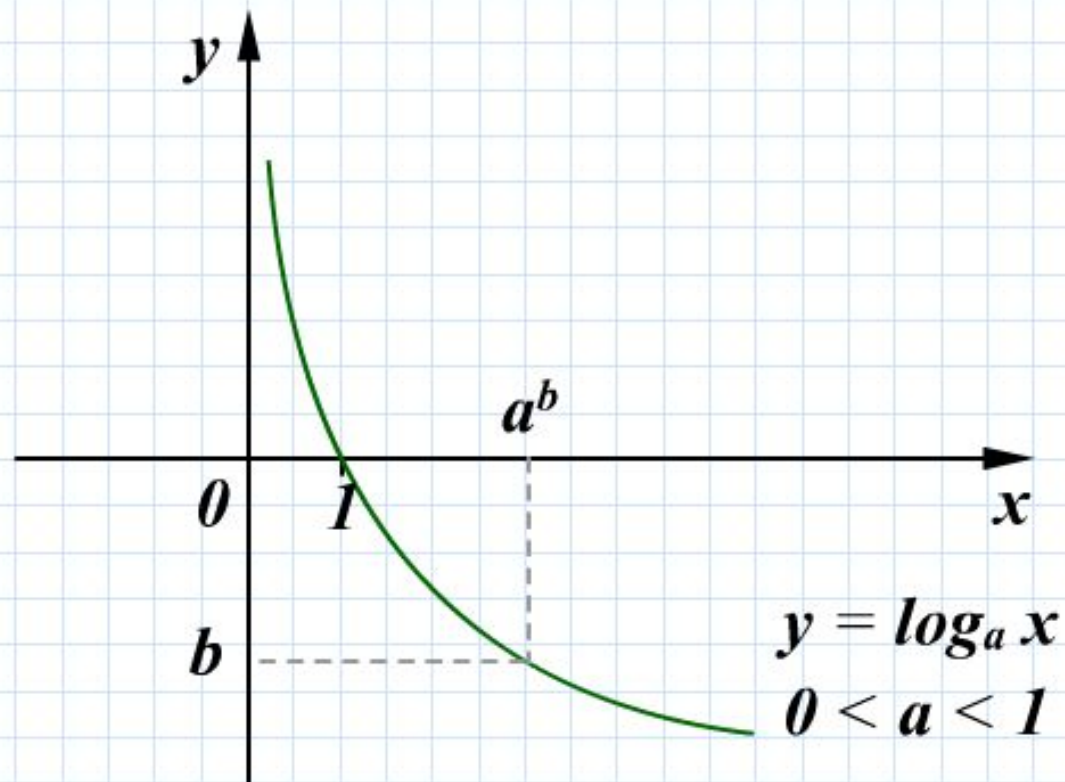
## Свойства логарифмической функции

3) При  $a > 1$  логарифмическая функция на всей области определения возрастает.



## Свойства логарифмической функции

4) При  $0 < a < 1$  логарифмическая функция убывает на всей области определения.

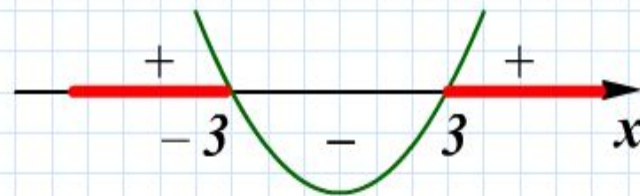


Найдите область определения функции:  $y = \log_{0,5} (x^2 - 9)$

Решение:  $D(\log_{0,5}) = \mathbb{R}_+$ ,

$$x^2 - 9 > 0$$

$$(x - 3)(x + 3) > 0$$



Ответ:  $D(y) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Сравните числа:  $\log_3 10$  и  $\log_8 57$

Решение: 1)  $\log_3 10 > \log_3 9$ ,  $\log_3 9 = 2$

$$\log_3 10 > 2$$

2)  $\log_8 57 < \log_8 64$ ,  $\log_8 64 = 2$

$$\log_8 57 < 2$$

$$\log_8 57 < 2 < \log_3 10$$

$$\log_8 57 < \log_3 10$$

Ответ:  $\log_8 57 < \log_3 10$



**№1**

**Задание:**

Сравните:  $\log_{0,3} 2$  и  $\log_5 3$

**№**

**2**  
**Задание:**

Найдите значение выражения:  $\log_x(5 + 2\sqrt{6}) + \log_x(5 - 2\sqrt{6})$

**№**

**1**

Сравните:  $\log_{0,3} 2$  и  $\log_5 3$

**Решение:**

$$\log_{0,3} 2 \text{ и } \log_5 3$$

$$1) \log_{0,3} 1 = 0$$

$$\log_{0,3} 2 < \log_{0,3} 1$$

**№**

**2**

**Задание:**

Найдите значение выражения:  $\log_x(5+2\sqrt{6}) + \log_x(5-2\sqrt{6})$

**Решение:**

$$\log_x(5+2\sqrt{6}) + \log_x(5-2\sqrt{6}) = \log_x((5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})) = \log_x(25 - 4 \cdot 6) = \log_x 1 = 0$$

**Ответ:** 0

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется **логарифмическим**.

$$\log_a x = b \Rightarrow x = a^b, \text{ при } a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

**№3**

Решите уравнение:  $2\log_3 2 - \log_3 (x-1) = 1 + \log_3 5$

**№**

**4**

Решите уравнение:  $\log_5^2 x - 3 \log_5 x + 2 = 0$

**№**

**5**

Решите уравнение:  $\log_{0,2} (4x) + \log_5 (x^2 + 75) = 1$

№ Решите уравнение:  $2\log_3 2 - \log_3 (x - 1) = 1 + \log_3 5$

3

Решение:  $D(\log_a) = R_+ \Rightarrow \text{ОДЗ: } x > 1$

$$2\log_3 2 = \log_3 2^2$$

$$1 = \log_3 3$$

$$\log_3 4 - \log_3 (x - 1) = \log_3 3 + \log_3 5$$

$$\log_3 \frac{4}{x-1} = \log_3 (3 \cdot 5)$$

$$\frac{4}{x-1} = 15$$

$$4 = 15 \cdot (x - 1)$$

$$15x = 19$$

$$x = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{5}$$

Ответ:  $x = 1\frac{4}{5}$

№ Решите уравнение:  $\log_5^2 x - 3 \log_5 x + 2 = 0$

4

Решение:  $D(\log_a) = R_+ \Rightarrow \text{ОДЗ: } x > 0$

$$\log_5 x = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$t_1 = \frac{3 + 1}{2} = 2, \quad t_2 = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$\log_5 x = 2 \Rightarrow x_1 = 5^2 = 25$$

$$\log_5 x = 1 \Rightarrow x_2 = 5^1 = 5$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Ответ:  $x_1 = 25, x_2 = 5$

№  
5

Решите уравнение:  $\log_{0,2}(4x) + \log_5(x^2 + 75) = 1$

Решение: 
$$\begin{cases} 4x > 0 \\ x^2 + 75 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_5(4x)}{\log_5 0,2} + \log_5(x^2 + 75) = \log_5 5$$

$$\log_5 0,2 = \log_5 \frac{1}{5} = -1$$

$$-\log_5(4x) + \log_5(x^2 + 75) = \log_5 5$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_5(x^2 + 75) = \log_5(5 \cdot 4x)$$

$$x^2 + 75 = 20x$$

$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$D = 400 - 4 \cdot 75 = 100$$

$$x_1 = \frac{20 + 10}{2} = 15, \quad x_2 = \frac{20 - 10}{2} = 5$$

ОТВЕТ:  $x_1 = 15, x_2 = 5$



**№**

**6**

**Задание:**

Решите уравнение:  $\log_5 (x - 8)^2 = 2 + 2\log_5 (x - 2)$

**№**

**7**

**Задание:**

Решите уравнение:  $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$

## №6 Задание:

Решите уравнение:  $\log_5(x-8)^2 = 2 + 2\log_5(x-2)$

### Решение:

$$\log_5(x-8)^2 = 2 + 2\log_5(x-2)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-2 > 0 \\ x \neq 8 \end{cases}, x \in (2;8) \cup (8;+\infty)$$

$$\log_5(x-8)^2 = \log_5 25 + \log_5(x-2)^2$$

$$\log_5(x-8)^2 = \log_5 25(x-2)^2$$

$$x^2 - 16x + 64 = 25(x^2 - 4x + 4)$$

$$24x^2 - 84x + 36 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$D = 49 - 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \notin \text{ОДЗ}$$

**Ответ:** 3

**№**  
**7**

**Задание:**

Решите уравнение:  $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$

**Решение:**

$$\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$$

ОДЗ:  $x > 0$

$$\log_{2^2} x + \log_{2^4} x + \log_2 x = 7$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x + \log_2 x = 7$$

$$1\frac{3}{4} \log_2 x = 7$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 2^4 = 16$$

**Ответ: 16**

Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется **логарифмическим**.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$y = \log_a f(x)$$

При  $a > 1 \uparrow$  на  $\mathbf{R}^+$ , а при  $0 < a < 1 \downarrow$  на  $\mathbf{R}^+$

При  $a > 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

При  $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > b$$

$$\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) > (\varphi(x))^b \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) < 0 \\ f(x) < (\varphi(x))^b \end{cases}$$

Решите неравенство:  $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$

Решение:  $y = \log_8 t$  возрастает на  $R_+$

$$1 = \log_8 8$$

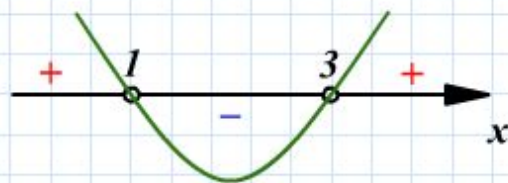
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

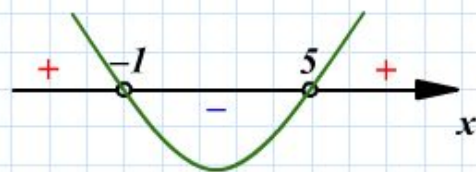


$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = 5, x_2 = -1$$

$$x \in (-1; 5)$$



Ответ:  $(-1; 1) \cup (3; 5)$

Решите неравенство:  $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2$

Решение:  $x \in \mathbb{R} + \setminus \{1\}$

$$\log_x \frac{1}{7} = -\log_x 7 = -\frac{1}{\log_7 x}$$

$$\log_x 7 = t$$

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} \geq 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$$

$$t > 0$$

$$\log_7 x > 0$$

$$\log_7 x > \log_7 1$$

$$x > 1$$

Ответ:  $(1; +\infty)$

**№**

**8**

**Задание:**

Решите неравенство:  $\lg x + 0,5 \lg 16 < \lg 80 - \lg 2$

**№**

**Задание:**

Решите неравенство:  $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} < -2$

**№**  
**8**

**Задание:**

Решите неравенство:  $\lg x + 0,5 \lg 16 < \lg 80 - \lg 2$

**Решение:**

$$\lg x + 0,5 \lg 16 < \lg 80 - \lg 2$$

$$\lg x + \lg \sqrt{16} < \lg \frac{80}{2}$$

$$\lg x + \lg 4 < \lg 40$$

$$\lg 4x < \lg 40$$

Т.к. функция  $Y = \lg(t)$  возрастает на  $R^+$ , перейдем к неравенству того же смысла:  $4x < 40$

$$x < 10$$

Учитывая область допустимых значений  $X$ , запишем ответ:

**Ответ:**  $(0, 10)$



# № 9

## Задание:

Решите неравенство:  $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} < -2$

## Решение:

$$\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} < -2$$

ОДЗ:  $x > 0$

$$\log_x \frac{1}{4} = -\frac{1}{\log_4 x}$$

$$-\frac{1}{\log_4 x} - \log_4 x \leq -2$$

$$\frac{1}{\log_4 x} + \log_4 x \geq 2$$

Обозначим  $\log_4 x = t$ , неравенство примет вид:

$$\frac{1}{t} + t - 2 \geq 0$$

$$\frac{1+t^2-2t}{t} \geq 0, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} t^2 - 2t + 1 \geq 0, \\ t > 0 \end{cases}$$

$$t > 0$$

$$\text{или } \begin{cases} t^2 - 2t + 1 \leq 0, \\ t < 0 \end{cases},$$

нет решений

Следовательно, исходное неравенство выполняется при:  $\log_4 x > 0, x > 1$

**Ответ:**  $(1; +\infty)$