ПОВТОРЕНИЕ ПО ТЕМЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Функция $y = \log_a x$ и ее свойства

Логарифмом *числа* $\boldsymbol{b}$ *по основанию* $\boldsymbol{a}$ *называется показатель степени* $\boldsymbol{b}$, *в которую нужно возвести* $\boldsymbol{a}$, *чтобы получить* $\boldsymbol{b}$.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b, \quad b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

Например: $3^{\log_3 7} = 7$, $0{,}5^{\log_{0,5} 25} = 25$

Свойства логарифмов

При любом a>0, a ≠ 1 и x>0, y>0

1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$

2) $\boxed{\log_a a = 1}$

3) $\boxed{\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y}$

4) $\boxed{\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

5) $\boxed{\log_a x^p = p \cdot \log_a x}$

6) *Формула перехода к новому основанию:*

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Функцию, заданную формулой

$$y = \log_a x,$$

называют логарифмической с основанием ***a***.

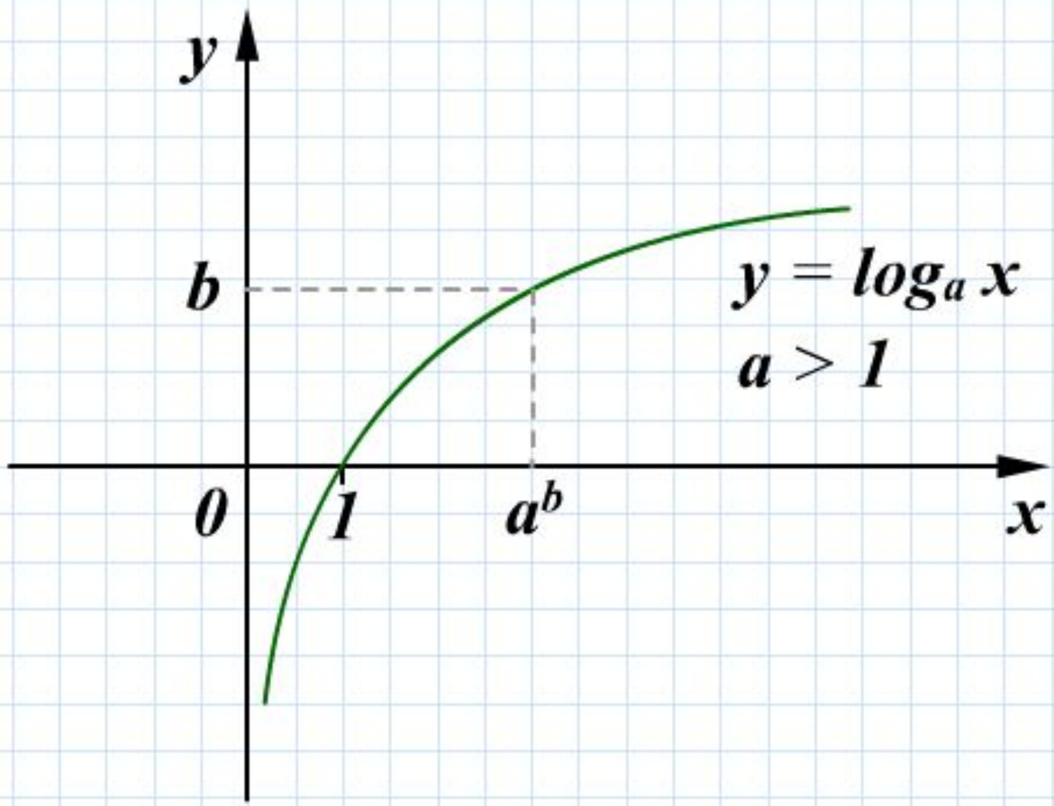
Свойства логарифмической функции

1) $D(\log_a x) = R_1$

2) $E(\log_a x) = R$

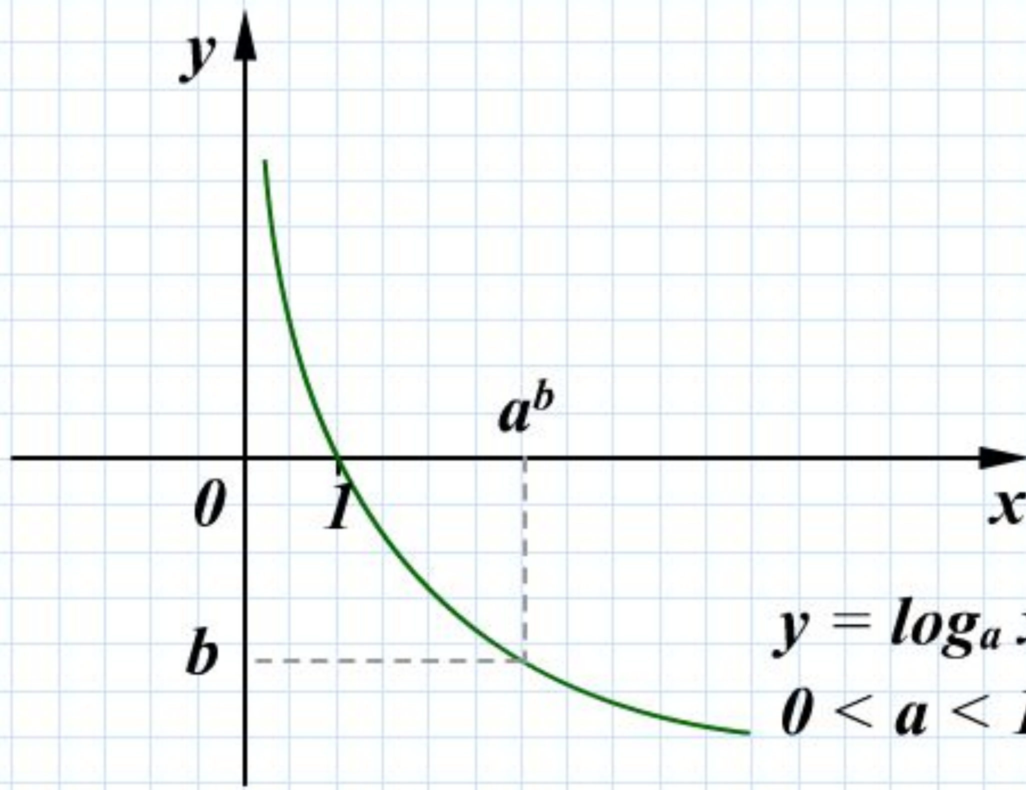
Свойства логарифмической функции

3) *При* $\boldsymbol{a > 1}$ *логарифмическая функция на всей области определения возрастает.*



Свойства логарифмической функции

4) *При* $\boldsymbol{0 < a < 1}$ *логарифмическая функция убывает на всей области определения.*

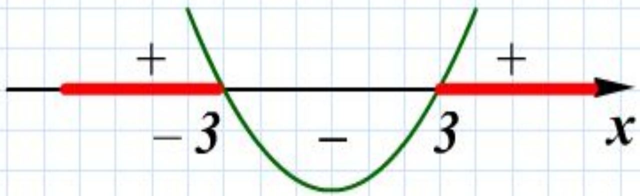


Найдите область определения функции: $y = \log_{0,5} (x^2 - 9)$

Решение: $D (\log_{0,5}) = R_+,$

$x^2 - 9 > 0$

$(x - 3)(x + 3) > 0$



Ответ: $D (y) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

Сравните числа: $\log_3 10$ и $\log_8 57$

Решение: 1) $\log_3 10 > \log_3 9, \quad \log_3 9 = 2$

$\log_3 10 > 2$

2) $\log_8 57 < \log_8 64, \quad \log_8 64 = 2$

$\log_8 57 < 2$

$\log_8 57 < 2 < \log_3 10$

$\log_8 57 < \log_3 10$

Ответ: $\log_8 57 < \log_3 10$

№1

Задание:

Сравните: $\log_{0,3} 2$ и $\log_5 3$

№ 2

Задание:

Найдите значение выражения: $\log_x (5+2\sqrt{6}) + \log_x (5-2\sqrt{6})$

№ 1

Сравните: $\log_{0,3} 2$ и $\log_5 3$

Решение:

$\log_{0,3} 2$ и $\log_5 3$

1) $\log_{0,3} 1 = 0$

$\log_{0,3} 2 < \log_{0,3} 1$

№
2

Задание:

Найдите значение выражения: $\log_x(5+2\sqrt{6})+\log_x(5-2\sqrt{6})$

Решение:

$$\log_x(5+2\sqrt{6})+\log_x(5-2\sqrt{6})=\log_x((5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}))=\log_x(25-4\cdot 6)=\log_x 1=0$$

Ответ: 0

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

$$\log_a x = b \Rightarrow x = a^b, \text{ при } a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

№3

Решите уравнение: $2\log_3 2 - \log_3 (x - 1) = 1 + \log_3 5$

№ 4

Решите уравнение: $\log_5^2 x - 3\log_5 x + 2 = 0$

№ 5

Решите уравнение: $\log_{0,2} (4x) + \log_5 (x^2 + 75) = 1$

№ 3

Решите уравнение: $2\log_3 2 - \log_3 (x-1) = 1 + \log_3 5$

Решение: $D(\log_a) = R_+ \Rightarrow$ ОДЗ: $x > 1$

$2\log_3 2 = \log_3 2^2$

$1 = \log_3 3$

$\log_3 4 - \log_3 (x-1) = \log_3 3 + \log_3 5$

$\log_3 \frac{4}{x-1} = \log_3 (3 \cdot 5)$

$\frac{4}{x-1} = 15$

$4 = 15 \cdot (x-1)$ $\qquad 15x = 19$

$x = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{5}$

Ответ: $x = 1\frac{4}{5}$

№ 4

Решите уравнение: $\log_5^2 x - 3\log_5 x + 2 = 0$

Решение: $D(\log_a) = R_+ \Rightarrow$ ОДЗ: $x > 0$

$\log_5 x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

$t_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2,$ $\qquad t_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$

$\log_5 x = 2 \Rightarrow x_1 = 5^2 = 25$

$\log_5 x = 1 \Rightarrow x_2 = 5^1 = 5$

$a^{\log_a b} = b$

Ответ: $x_1 = 25,\ x_2 = 5$

№ 5

Решите уравнение: $\log_{0,2}(4x) + \log_5(x^2 + 75) = 1$

Решение: $\begin{cases} 4x > 0 \\ x^2 + 75 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\frac{\log_5(4x)}{\log_5 0,2} + \log_5(x^2 + 75) = \log_5 5$$

$$\log_5 0,2 = \log_5 \frac{1}{5} = -1$$

$$-\log_5(4x) + \log_5(x^2 + 75) = \log_5 5$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_5(x^2 + 75) = \log_5(5 \cdot 4x)$$

$$x^2 + 75 = 20x$$

$$x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$D = 400 - 4 \cdot 75 = 100$$

$$x_1 = \frac{20 + 10}{2} = 15, \qquad x_2 = \frac{20 - 10}{2} = 5$$

Ответ: $x_1 = 15$, $x_2 = 5$

№ 6

Задание:

Решите уравнение: $\log_5 (x-8)^2 = 2 + 2\log_5 (x-2)$

№ 7

Задание:

Решите уравнение: $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$

№6

Задание:

Решите уравнение: $\log_5(x-8)^2 = 2 + 2\log_5(x-2)$

Решение:

$\log_5(x-8)^2 = 2 + 2\log_5(x-2)$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0 \\ x\neq 8 \end{cases}$, $x \in (2;8)\cup(8;+\infty)$

$\log_5(x-8)^2 = \log_5 25 + \log_5(x-2)^2$

$\log_5(x-8)^2 = \log_5 25(x-2)^2$

$x^2 - 16x + 64 = 25(x^2 - 4x + 4)$

$24x^2 - 84x + 36 = 0$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$D = 49 - 24 = 25$

$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3, \quad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \notin$ ОДЗ

Ответ:3

№ 7

Задание:

Решите уравнение: $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$

Решение:

$\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$

ОДЗ: $x > 0$

$\log_{2^2} x + \log_{2^4} x + \log_2 x = 7$

$$\frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 7$$

$$1\frac{3}{4}\log_2 x = 7$$

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4 = 16$

Ответ: 16

Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$y = \log_a f(x)$$

При $a > 1 \uparrow$ *на* $R+$, *а при* $0 < a < 1 \downarrow$ *на* $R+$

При $a > 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

При $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > b$$

$$\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) > (\varphi(x))^b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) < 0 \\ f(x) < (\varphi(x))^b \end{cases}$$

Решите неравенство: $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$

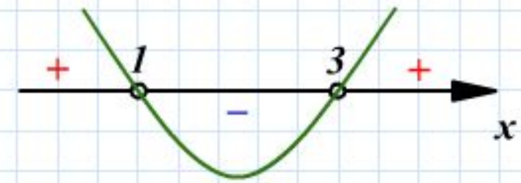
Решение: $y = \log_8 t$ возрастает на R_+

$1 = \log_8 8$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$$

$x^2 - 4x + 3 > 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

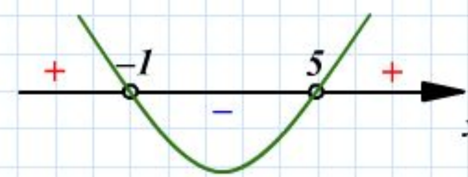


$x_1 = 3,\ x_2 = 1$

$x \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$

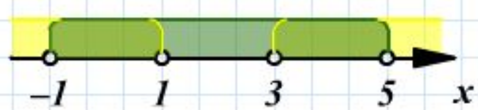
$x^2 - 4x - 5 < 0$

$x^2 - 4x - 5 = 0$



$x_1 = 5,\ x_2 = -1$

$x \in (-1;\ 5)$



Ответ: $(-1;\ 1) \cup (3;\ 5)$

Решите неравенство: $log_7 x - log_x \frac{1}{7} \geqslant 2$

Решение: $x \in R + \backslash\{1\}$

$$log_x \frac{1}{7} = -log_x 7 = -\frac{1}{log_7 x}$$

$$log_x 7 = t$$

$$t + \frac{1}{t} \geqslant 2$$

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} \geqslant 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{t} \geqslant 0$$

$$t > 0$$

$$log_7 x > 0$$

$$log_7 x > log_7 1$$

$$x > 1$$

Ответ: $(1; +\infty)$

№ 8

Задание:

Решите неравенство: $\lg x + 0{,}5\lg 16 < \lg 80 - \lg 2$

№ 9

Задание:

Решите неравенство: $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} < -2$

№ 8

Задание:

Решите неравенство: $\lg x + 0{,}5\lg 16 < \lg 80 - \lg 2$

Решение:

$\lg x + 0{,}5\lg 16 < \lg 80 - \lg 2$

$\lg x + \lg\sqrt{16} < \lg\dfrac{80}{2}$

$\lg x + \lg 4 < \lg 40$

$\lg 4x < \lg 40$

Т.к. функция Y=lg(t) возрастает на R+ , перейдем к неравенству того же смысла: $4x < 40$

$x < 10$

Учитывая область допустимых значений X, запишем ответ:

Ответ: $(0;\ 10)$

№ 9

Задание:

Решите неравенство: $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} < -2$

Решение:

$$\log_x \frac{1}{4} + \log_4 x^{-1} < -2$$

ОДЗ: $x > 0$

$$\log_x \frac{1}{4} = -\frac{1}{\log_4 x}$$

$$-\frac{1}{\log_4 x} - \log_4 x \le -2$$

$$\frac{1}{\log_4 x} + \log_4 x \ge 2$$

Обозначим $\log_4 x = t$, неравенство примет вид:

$$\frac{1}{t} + t - 2 \ge 0$$

$$\frac{1 + t^2 - 2t}{t} \ge 0, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} t^2 - 2t + 1 \ge 0, \\ t > 0 \end{cases}$$

$t > 0$

или $\begin{cases} t^2 - 2t + 1 \le 0, \\ t < 0 \end{cases}$,

нет решений

Следовательно, исходное неравенство выполняется при: $\log_4 x > 0, \quad x > 1$

Ответ: $(1; +\infty)$