

ВЕКТОРЫ

Работу выполнила
Ученица 9 «Г» класса
Скрипник Полина

Нам известны два вида величин. Например, длина, площадь, объём, масса и т.д. полностью определяются заданием своих числовых величин. Такие величины называются **скалярными величинами** или просто **скалярами**.

А многие физические величины, например, сила или скорость, характеризуются не только числовым значением, но и направлением в пространстве. Подобные величины называются **векторными величинами** или просто **векторами**.

Любой направленный отрезок является вектором. Как и любой отрезок, вектор имеет два конца – Начальная точка или начало, и конец, обозначающийся стрелкой.

Если на отрезке АВ точку А принять за начало, а В – за конец, то получившийся вектор будет обозначаться \overrightarrow{AB}



Вектор \overrightarrow{AB}



В геометрии рассматривается вектор, в котором начало и конец совпадают. Такой вектор называется **нулевым вектором**. Отсюда следует, что любую точку плоскости можно рассматривать как нулевой вектор. Нулевой вектор обозначается: $\vec{0}$

КАКИМИ МОГУТ БЫТЬ ВЕКТОРЫ?

Длину отрезка АВ называют модулем вектора \overrightarrow{AB} и обозначают так $|\overrightarrow{AB}|$.

Если два вектора лежат на одной прямой или на параллельных
Прямых, то такие векторы называют **коллинеарными**. Коллинеарность

Векторов записывается так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Если коллинеарные имеют одинаковые направления, то их называют
сонаправленными ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$)



Если векторы \vec{a} и \vec{c} коллинеарны и имеют разные направления, то их называют противоположно направленными и записывают так $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{c}$



Векторы называются равными, если они сонаправлены и их модули равны.

СВОЙСТВА РАВНЫХ ВЕКТОРОВ

Равные векторы можно совместить параллельным переносом, и, наоборот, если векторы совмещаются параллельным переносом, то эти векторы равны.

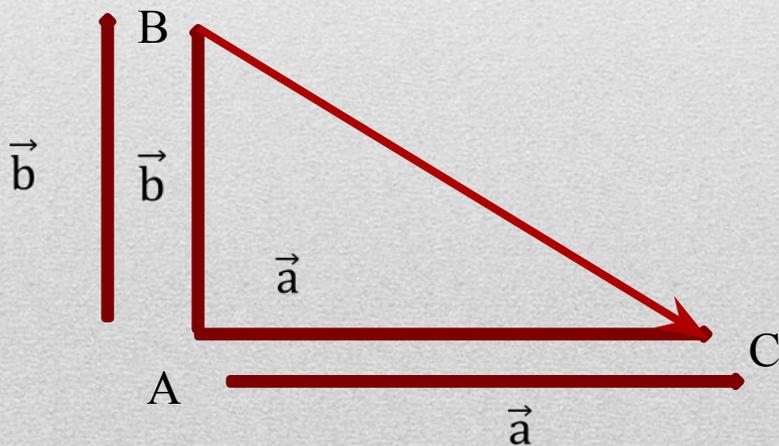


СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. От любой точки A можно отложить единственный вектор, равный данному вектору \vec{a}

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ

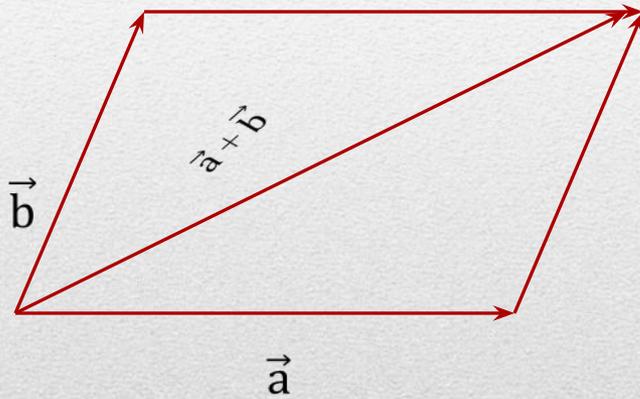
Пусть даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Отметим на плоскости точку A и отложим от этой точки вектор AB , равный вектору \vec{a} , а от точки B отложим вектор BC , равный вектору \vec{b} . Полученный вектор AC называют **суммой векторов** \vec{a} и \vec{b} и пишут: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$



Правило
Треугольника

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} верно:

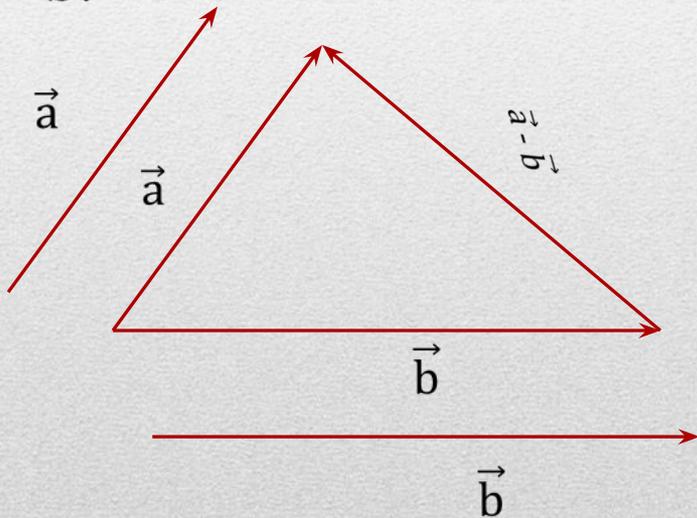
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон);
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).



Метод параллелограмма

РАЗНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор, который в сумме с вектором \vec{b} равен вектору \vec{a} . Разность векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.



РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СУММУ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВЕКТОРОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Если $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, то векторы \vec{b} и \vec{c} называются составляющими вектора \vec{a} . Также говорят, что Вектор \vec{a} разложен на сумму составляющих векторов \vec{b} и \vec{c} .

Пусть даны две пересекающиеся прямые. Тогда любой вектор можно разложить на сумму составляющих, расположенных на данных прямых.

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ на число K называется вектор, модуль которого равен числу $|K| \cdot |\vec{a}|$ и сонаправлен с вектором a при $K > 0$, противоположно направлен с вектором a при $K < 0$. Произведение числа K на вектор a записывают так: $K \cdot \vec{a}$.

Если $K=0$, то $0 \cdot a = 0$

Для любых чисел α, β и любых векторов a, b верно равенство:

1. $(\alpha \cdot \beta) \vec{a} = \vec{a} (\beta \alpha)$ (сочетательный закон);
 2. $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$ (I распределительный закон);
 3. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ (II распределительный закон).
-

ПРИЗНАК КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ

Чтобы вектор \vec{b} был коллинеарен ненулевому вектору \vec{a} , необходимо и достаточно существование числа α такого, что $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.

СЛЕДСТВИЕ. Для того, чтобы точка C лежала на прямой AB , необходимо и достаточно, чтобы существовало число α такое, что $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$

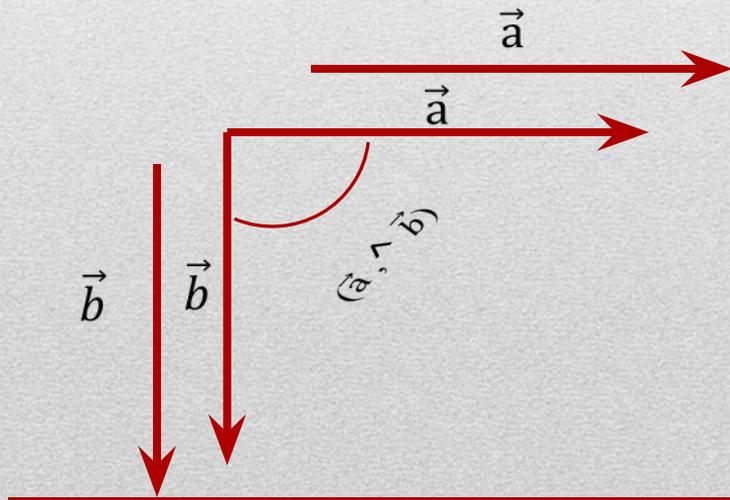
УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Углом между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} называется угол BAC .

Углом между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки.

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} обозначают через $(\vec{a}, \wedge \vec{b})$.

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0° , а если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен 180° .



СКАЛЯРНОЕ

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. скалярное произведение векторов равно числу

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\varphi = (\vec{a}, \vec{b}). \quad a \cdot b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Скалярное произведение равных векторов называется скалярным квадратом этого вектора и обозначается через \vec{a}^2

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Для любых векторов \vec{a} и \vec{b} верно равенство:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и с любого действительного числа α верно равенство:

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

3. Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} верно равенство:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

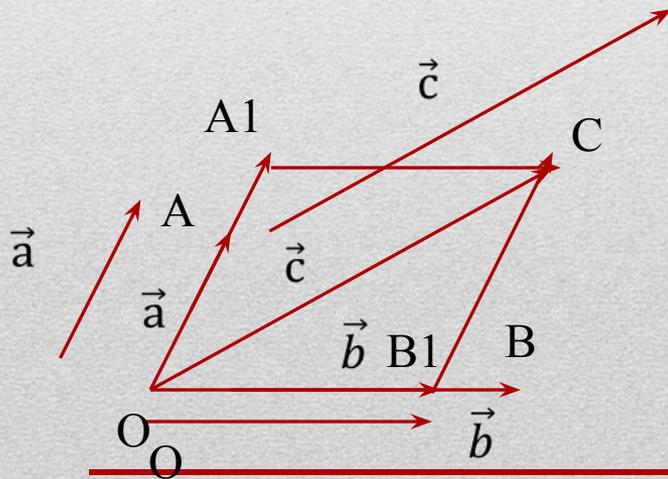
КООРДИНАТЫ

ВЕКТОРА

Если ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то для любого вектора \vec{c} найдутся числа x и y такие, что выполняется равенство

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом.



Любой вектор можно разложить по двум произвольным неколлинеарным векторам. Если на плоскости выбраны такие 2 неколлинеарных вектора, то они называются **базисными векторами** плоскости. Итак, любые 2 неколлинеарных вектора можно принять в качестве базисных векторов и любой вектор этой плоскости однозначно разлагается по этим базисным векторам. А действительные числа x и y называются **координатами вектора** \vec{c} в базисе \vec{a}, \vec{b} .

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy . Пусть \vec{i} - Единичный вектор, сонаправленный с осью Ox , а \vec{j} - единичный вектор, сонаправленный с осью Oy . Эти векторы называют **координатными векторами**. Так как векторы \vec{i} и \vec{j} не коллинеарны, то их можно рассматривать в качестве базисных векторов. Тогда для любого вектора \vec{a} плоскости Oxy найдутся единственные действительные числа x и y такие, что:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Здесь числа x и y называются **координатами** вектора \vec{a} в прямоугольной системе координат Oxy , и это записывается так:

$$\vec{a} = (x; y).$$

Некоторые свойства координат вектора:

1. У равных векторов соответствующие координаты равны: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ и $\vec{a} = \vec{b}$, то $x=u$ и $y=v$.

Обратно, векторы, у которых соответствующие координаты равны между собой: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ и $x=u$, $y=v$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

2. При сложении векторов складываются их соответствующие координаты: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x+u; y+v)$.

$$\vec{a} + \vec{b} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + (u\vec{i} + v\vec{j}) = (x+u)\vec{i} + (y+v)\vec{j}.$$

3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число, если $\vec{a} = (x; y)$ и λ - число, то $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x; \lambda \cdot y)$.

СЛЕДСТВИЕ. Координаты разности векторов равны разности соответствующих координат этих векторов : если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$, то $\vec{a} - \vec{b} = (x-u; y-v)$.

Если на плоскости Oxy задана точка $A(x; y)$, то вектор \vec{OA} называется **радиус-вектором** точки A . Для радиус-вектора \vec{OA} верно равенство $\vec{OA} = (x; y)$, т.е. соответствующие координаты точки A и радиус-вектора \vec{OA} совпадают.

Пусть задан вектор $\vec{a} = \vec{AB}$ и $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Тогда выполняется равенство $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$, т.е. $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

КООРДИНАТНЫЙ ВИД СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ определяется по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$$

Если векторы $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ взаимно перпендикулярны, то $(\vec{a}, \wedge \vec{b}) = 90^\circ$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$. Тогда имеем: $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

Это и есть **условие перпендикулярности** ненулевых векторов.

С помощью формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$ можно найти косинус угла между векторами $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Действительно, их формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \wedge \vec{b})$ находим, что

$$\cos(\vec{a}, \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



ВСЕМ УСПЕХОВ!

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ
