

**АНПОО «КОЛЛЕДЖ ВОРОНЕЖСКОГО ИНСТИТУТА ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ»**

# **АЛГЕБРА ЛОГИКИ**

# Булева алгебра

---

**Двоичное кодирование** – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

**Задача** – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

**Джордж Буль** разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



**Почему "логика"?**

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

**Алгебра высказываний (логики)** – математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

**Логическое высказывание** – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно сказать истинно оно или ложно.



Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Например:

6 – четное число – это истинное высказывание

Число 6 больше 8 – это ложное высказывание

Сложные высказывания состояются из простых высказываний, соединенных логическими связками: «и», «или», «не» и т.д.

**6 – четное число и число 6 больше 8** –это сложное высказывание  
$$A \text{ и } B = A * B = A \wedge B$$

Над логическим высказыванием в компьютере выполняется та или иная логическая операция.

**Существует 8 основных логических операций:**

- **Инверсия;**
- **Конъюнкция;**
- **Дизъюнкция;**
- **Штрих Шеффера;**
- **Стрелка Пирса;**
- **Импликация;**
- **Сложение по модулю 2 (Исключающее ИЛИ);**
- **Эквиваленция.**

# Отрицание (выражается словом «НЕ» Читается «*неверно, что x*») ИЛИ инверсия.

Обозначается чертой над высказыванием.

Функция, реализующая эту операцию,

записывается в виде

$$y = \overline{x}$$

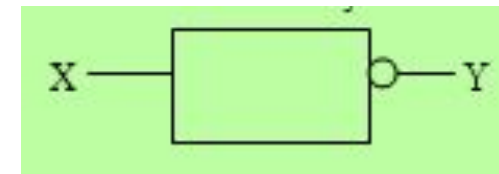
*Эта функция истинна, если переменная (высказывание) ложна.*

Таблица истинности для данной операции:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Устройство, реализующее эту операцию

на схемах, называется **инвертором** и обозначается следующим образом



# **Конъюнкция** (выражается словом «И») или **ЛОГИЧЕСКОЕ умножение** (Читается «**х и у**»)

Обозначается \*, ^, &(амперсенд).

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

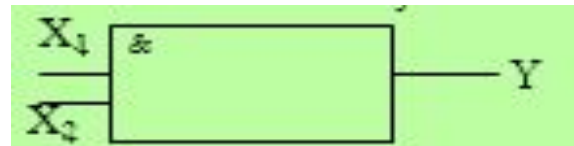
$$Y = X_1 * X_2 \text{ или } Y = X_1 \wedge X_2 \text{ или } Y = X_1 \& X_2.$$

*Эта функция истинна тогда и только тогда, когда все переменные (высказывания) истинны одновременно.*

Таблица истинности для данной операции:

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **конъюнктором** и обозначается следующим образом:



# Дизъюнкция (выражается словом «ИЛИ») логическое сложение (Читается « $x$ или $y$ »)

Обозначается  $+$ ,  $\vee$ .

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

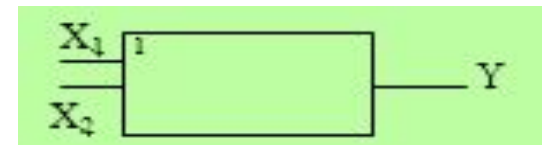
$$Y = X_1 + X_2 \text{ или } Y = X_1 \vee$$

*Эта функция истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одна переменная (высказывание) истинна или истинны обе переменные (высказывания) одновременно.*

Составим таблицу истинности для данной операции:

$X_1$	$X_2$	$Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **дизъюнктором** и обозначается следующим образом:



# *Импликация* ( «если...то», «из...следует»)

Читается **«из x следует y»** или **«если x, то y»**

Обозначается знаком  $\square$

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде.  $Y = X_1 \square X_2.$

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание

$$\text{или } Y = \bar{X}_1 \vee X_2$$

**Функция ложна тогда и только тогда, когда  $X_1$  истинно, а  $X_2$  ложно.**

Таблица истинности для данной операции:

X1	X2	$X_1 \square X_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



# Эквиваленция

(Читается «для того, чтобы  $x$ , необходимо и достаточно, чтобы  $y$ » или « $x$  тогда и только тогда, когда  $y$ »)

Обозначается знаком  $\leftrightarrow$  или  $\sim$ .

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде  $Y = X_1 \leftrightarrow X_2$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$X_1 \leftrightarrow X_2 = (\overline{X_1} \vee X_2) \cdot (X_2 \vee X_1)$$

*Функция истинна тогда и только тогда, когда значения  $X_1$  и  $X_2$  совпадают.*

Таблица истинности для данной операции:

$X_1$	$X_2$	$X_1 \leftrightarrow X_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Алгебра логики используется при построении основных узлов ЭВМ.

При изучении работы различных устройств компьютера приходится рассматривать такие его сложные элементы, в которых реализуются сложные логические выражения.

Поэтому необходимо научиться определять результат этих выражений, то есть строить для них таблицы истинности.

### **Построение таблицы истинности**

1. Подсчитать кол-во переменных в выражении  $=n$ .
2. Число строк в таблице  $= 2^n + \text{заголовок}$ .
3. Кол-во столбцов  $= n + \text{кол-во операций}$ .
4. Ввести названия столбцов: сначала переменные, затем операции в соответствии с приоритетом.
5. Ввести наборы значений переменных.
6. Вычислить значения операций для всех наборов переменных.

## ПРИМЕР №1

$$F = (A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$$

1. Кол-во строк таблицы (кол-во сочетаний из 0 и 1) определяется по формуле  $2^n = 2^2 = 4$ , где  $n$ -число переменных в формуле две переменные **A** и **B** – два простых высказывания.
2. Кол-во столбцов: 2 переменные + 5 лог операций =7

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \vee B$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

**ПРИМЕР №2 -Выполнить самостоятельно**

$$F(ABC) = (A \vee \overline{B}) \leftrightarrow \overline{C} \rightarrow (\overline{A * B})$$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>							
0	0	0							
0	0	1							
0	1	0							
0	1	1							
1	0	0							
1	0	1							
1	1	0							
1	1	1							

# Равносильные логические выражения

Равносильные логические выражения - у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают. Обозначают “=”.  $A * B = B * A$

Докажите равносильность выражений:

$$\overline{A \& B} \text{ и } \overline{A \vee B}$$

## ПРИМЕР №3

Таблица истинности для

$$\overline{A \vee B}$$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Таблица истинности для

$$\overline{A \& B}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \& B}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

### Решение логических задач с помощью таблиц истинности.

Пример 1. По обвинению в преступлении перед судом предстали Иванов, Петров и Сидоров. Следствием установлено:

- 1) если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен;
- 2) если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен.

Виновен ли Иванов?

Решение. Запишем на языке алгебры высказываний факты установленные следствием. Пусть

$A$  = «Иванов виновен»,  $B$  = «Петров виновен»,  $C$  = «Сидоров виновен», тогда факты, установленные следствием имеют вид

- 1)  $(\bar{A} \vee B) \rightarrow C$ ;
- 2)  $\bar{A} \rightarrow \bar{C}$ .

Таким образом, обобщая, сведения, получим информацию  $F = (\bar{A} \vee B \rightarrow C) \cdot (\bar{A} \rightarrow \bar{C})$ .

Составим таблицу истинности для полученного высказывания

$A$	$B$	$C$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$\bar{A} \vee B \rightarrow C$	$\bar{C}$	$\bar{A} \rightarrow \bar{C}$	$F$
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Проанализируем все строки, где  $F = 1$ . Во всех случаях, когда сложное высказывание истинно  $A = 1$ , т.е. Иванов виновен.

Решение логических  
задач с помощью ТИ

**Задание.** Решить логическую задачу с помощью таблицы истинности

**На вопрос, кто из трёх учащихся изучал информатику, был получен ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто из учащихся изучал информатику?**

**2.4.** Пусть  $x = 1, y = 1, z = 0$ . Определить логические значения следующих формул: 1)  $x \& y \& z$ , 2)  $x \vee y \vee z$ , 3)  $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ , 4)  $x \rightarrow y \rightarrow z$ , 5)  $x \vee y \rightarrow z$ .



## Законы и тождества алгебры логики

**Теоретическая часть.** Две формулы алгебры логики называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них элементарных высказываний.

Равносильность формул  $L_1$  и  $L_2$  обозначается как  $L_1 \equiv L_2$ .

Основные равносильности:

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $x \& 0 \equiv 0$ ,          | 7. $x \vee 0 \equiv x$ ,        |
| 2. $x \& 1 \equiv x$ ,          | 8. $x \vee 1 \equiv 1$ ,        |
| 3. $x \& x \equiv x$ ,          | 9. $x \vee x \equiv x$ ,        |
| 4. $x \& \bar{x} \equiv 0$ ,    | 10. $x \vee \bar{x} \equiv 1$ , |
| 5. $x \& (y \vee x) \equiv x$ , | 11. $\bar{\bar{x}} \equiv x$ .  |
| 6. $x \vee y \& x \equiv x$ ,   |                                 |

Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ , | 4. $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$ ,                     |
| 2. $x \& y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ , | 5. $x \vee y \equiv \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$ ,                     |
| 3. $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$ ,         | 6. $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$ . |

Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $x \& y \equiv y \& x$ ,                      | 4. $x \vee y \equiv y \vee x$ ,                      |
| 2. $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$ ,        | 5. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ ,    |
| 3. $x \& (y \vee z) \equiv x \& y \vee x \& z$ , | 6. $x \vee y \& z \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$ . |

Какое логическое выражение равносильно выражению:

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$$

1)  $\neg A \vee B \vee \neg C$

2)  $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$

3)  $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$

4)  $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от 3-х аргументов X,Y,Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.

Какое выражение соответствует F?

1)

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0

- 1)  $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$       2)  $X \wedge Y \wedge \neg Z$       3)  $X \vee \neg Y \vee \neg Z$       4)  $\neg X \vee \neg Y \vee Z$

2)

X	Y	Z	F
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

- 1)  $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$       2)  $X \vee \neg Y \vee Z$       3)  $X \wedge \neg Y \wedge Z$       4)  $\neg X \vee Y \vee \neg Z$

3)

X	Y	Z	F
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1

- 1)  $X \vee Y \vee Z$       2)  $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$       3)  $X \vee \neg Y \vee Z$       4)  $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$

**1) Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$A \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge \neg D$$

1)  $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$

2)  $A \vee \neg B \vee C \vee \neg D$

3)  $A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \neg D$

4)  $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$

**2) Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$\neg(A \wedge \neg B \wedge C)$$

1)  $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

2)  $\neg A \wedge B \wedge \neg C$

3)  $\neg A \vee B \vee \neg C$

4)  $A \vee \neg B \vee C$

**3) Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C$$

1)  $\neg A \vee B \vee \neg C$

2)  $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

3)  $A \vee \neg B \vee \neg C$

4)  $A \vee B \vee \neg C$