АНПОО «КОЛЛЕДЖ ВОРОНЕЖСКОГО ИНСТИТУТА ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ»

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Булева алгебра

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).

Почему "логика"?
Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Алгебра высказываний (логики) – математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно сказать истинно оно или ложно.

! **Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

Например:

6 – четное число -это истинное высказывание

Число 6 больше 8 -это ложное высказывание

Сложные высказывания составляются из простых высказываний, соединенных логическими связками: «и», «или», «не» и т.д.

6 – четное число и число 6 больше 8 -это сложное высказывание

$$\mathbf{A \text{ и } B = A * B = A \land B}$$

Над логическим высказыванием в компьютере выполняется та или иная логическая операция.

Существует 8 основных логических операций:

- ***Инверсия;***
- ***Конъюнкция;***
- ***Дизъюнкция;***
- ***Штрих Шеффера;***
- ***Стрелка Пирса;***
- ***Импликация;***
- ***Сложение по модулю 2 (Исключающее ИЛИ);***
- ***Эквиваленция.***

Отрицание ***(выражается словом «НЕ»***

Читается «неверно, что x») ИЛИ **инверсия.**

Обозначается чертой над высказыванием.

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

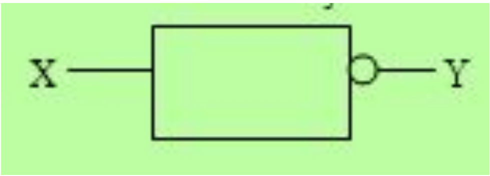
$$y = \overline{X}$$

Эта функция истинна, если переменная (высказывание) ложна.

Таблица истинности для данной операции:

A	¬A
0	1
1	0

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **инвертором** и обозначается следующим образом



Конъюнкция (выражается словом «**И**») или **логическое умножение (Читается «х и у»)**

Обозначается *, ^, &(амперсенд).

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

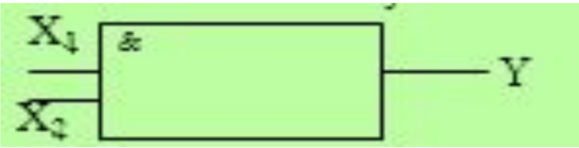
$$Y = X_1 * X_2 \text{ или } Y = X_1 \wedge X_2 \text{ или } Y = X_1 \,\&\, X_2.$$

Эта функция истинна тогда и только тогда, когда все переменные (высказывания) истинны одновременно.

Таблица истинности для данной операции:

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **конъюнктором** и обозначается следующим образом:



Дизъюнкция (выражается словом «ИЛИ») логическое сложение (Читается «х или у»)

Обозначается +, v.

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде

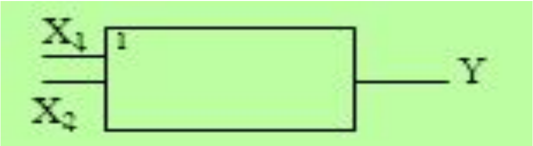
$Y = X_1 + X_2$ или $Y = X_1 \vee X_2$

***Эта функция истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одна переменная (высказывание) истинна или истинны обе переменные (высказывания) одновременно*.**

Составим таблицу истинности для данной операции:

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Устройство, реализующее эту операцию на схемах, называется **дизъюнктором** и обозначается следующим образом:



Импликация («если…то», «из…следует»)

Читается «из х следует у» или «если х, то у»

Обозначается знаком □

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде. **$Y = X_1$ □ X_2.**

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание

или $Y = \overline{X}_1 \vee X_2$

Функция ложна тогда и только тогда, когда X_1 истинно, а X_2 ложно.

Таблица истинности для данной операции:

X1	X2	X_1 □ X_2
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция

(**Читается «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y»**)

Обозначается знаком ↔ или ~.

Функция, реализующая эту операцию, записывается в виде $Y = X_1 \leftrightarrow X_2$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$X_1 \leftrightarrow X_2 = (\overline{X_1} \vee X_2) \cdot (X_2 \vee X_1)$$

Функция истинна тогда и только тогда, когда значения X_1 и X_2 совпадают.

Таблица истинности для данной операции:

X1	X2	X1↔X2
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Алгебра логики используется при построении основных узлов ЭВМ.
При изучении работы различных устройств компьютера приходится рассматривать такие его сложные элементы, в которых реализуются сложные логические выражения.
Поэтому необходимо научиться определять результат этих выражений, то есть строить для них таблицы истинности.

Построение таблицы истинности

1. Подсчитать кол-во переменных в выражении =n.
2. Число строк в таблице = 2^n + заголовок.
3. Кол-во столбцов = n + кол-во операций.
4. Ввести названия столбцов: сначала переменные, затем операции в соответствии с приоритетом.
5. Ввести наборы значений переменных.
6. Вычислить значения операций для всех наборов переменных.

ПРИМЕР №1

$$F = (A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$$

1. Кол-во строк таблицы (кол-во сочетаний из 0 и 1) определяется по формуле $\mathbf{2^n} = 2^2 = 4$, где **n**-число переменных в формуле две переменные **A** и **B** – два простых высказывания.
2. Кол-во столбцов: 2 переменные + 5 лог операций =7

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

<u>ПРИМЕР №2 -</u>Выполнить самостоятельно

$$F(ABC)= (A \vee \overline{B}) \leftrightarrow \bar{C})) \rightarrow (\overline{A * B})$$

A	B	C							
0	0	0							
0	0	1							
0	1	0							
0	1	1							
1	0	0							
1	0	1							
1	1	0							
1	1	1							

Равносильные логические выражения

Равносильные логические выражения - у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают. Обозначают “=“. **A*B = B*A**

Докажите равносильность выражений:

$$\overline{A} \& \overline{B} \quad и \quad \overline{A \vee B}$$

ПРИМЕР №3

Таблица истинности для $\overline{A \vee B}$

A	B	AvB	$\overline{A \vee B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Таблица истинности для $\overline{A} \& \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \& \overline{B}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Решение логических задач с помощью ТИ

Решение логических задач с помощью таблиц истинности.

Пример 1. По обвинению в преступлении перед судом предстали Иванов, Петров и Сидоров. Следствием установлено:

1) если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен;
2) если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен.

Виновен ли Иванов?

Решение. Запишем на языке алгебры высказываний факты установленные следствием. Пусть

A= «Иванов виновен», B= «Петров виновен», C= «Сидоров виновен», тогда факты, установленные следствием имеют вид

1) $(\overline{A} \vee B) \to C$;

2) $\overline{A} \to \overline{C}$.

Таким образом, обобщая, сведения, получим информацию $F = (\overline{A} \vee B \to C) \cdot (\overline{A} \to \overline{C})$.

Составим таблицу истинности для полученного высказывания

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$\overline{A} \vee B \to C$	$\overline{C}$	$\overline{A} \to \overline{C}$	F
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Проанализируем все строки, где $F = 1$. Во всех случаях, когда сложное высказывание истинно $A = 1$, т.е. Иванов виновен.

Задание. Решить логическую задачу с помощью таблицы истинности

На вопрос, кто из трёх учащихся изучал информатику, был получен ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто из учащихся изучал информатику?

2.4. Пусть $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$. Определить логические значения следующих формул: 1) $x \& y \& z$, 2) $x \vee y \vee z$, 3) $x \to (y \to z)$, 4) $x \to y \to z$, 5) $x \vee y \to z$.

Законы и тождества алгебры логики

Теоретическая часть. Две формулы алгебры логики называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них элементарных высказываний.

Равносильность формул L_1 и L_2 обозначается как $L_1 \equiv L_2$.

Основные равносильности:

1. $x \& 0 \equiv 0$,
2. $x \& 1 \equiv x$,
3. $x \& x \equiv x$,
4. $x \& \overline{x} \equiv 0$,
5. $x \& (y \vee x) \equiv x$,
6. $x \vee y \& x \equiv x$,
7. $x \vee 0 \equiv x$,
8. $x \vee 1 \equiv 1$,
9. $x \vee x \equiv x$,
10. $x \vee \overline{x} \equiv 1$,
11. $\overline{\overline{x}} \equiv x$.

Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $\overline{x \& y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$,
2. $x \& y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$,
3. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$,
4. $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \& \overline{y}$,
5. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$,
6. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \& (y \to x)$.

Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x \& y \equiv y \& x$,
2. $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$,
3. $x \& (y \vee z) \equiv x \& y \vee x \& z$,
4. $x \vee y \equiv y \vee x$,
5. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$,
6. $x \vee y \& z \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$.

Какое логическое выражение равносильно выражению:

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$

2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$

3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$

4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от 3-х аргументов X,Y,Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

1)

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0

1) $\neg X \land \neg Y \land Z$	2) $X \land Y \land \neg Z$	3) $X \lor \neg Y \lor \neg Z$	4) $\neg X \lor \neg Y \lor Z$

2)

X	Y	Z	F
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

1) $\neg X \land Y \land \neg Z$	2) $X \lor \neg Y \lor Z$	3) $X \land \neg Y \land Z$	4) $\neg X \lor Y \lor \neg Z$

3)

X	Y	Z	F
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1

1) $X \lor Y \lor Z$	2) $X \land \neg Y \land \neg Z$	3) $X \lor \neg Y \lor Z$	4) $\neg X \land Y$ [illegible] $\neg Z$

1) **Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$A \wedge \neg(B \vee \neg C) \wedge \neg D$$

1) $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$

2) $A \vee \neg B \vee C \vee \neg D$

3) $A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge \neg D$

4) $A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D$

2) **Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$\neg(A \wedge \neg B \wedge C)$$

1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

2) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$

3) $\neg A \vee B \vee \neg C$

4) $A \vee \neg B \vee C$

3) **Какое логическое выражение равносильно выражению:**

$$\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$

2) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

3) $A \vee \neg B \vee \neg C$

4) $A \vee B \vee \neg C$