

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭЛЕКТРОНИКА И СХЕМОТЕХНИКА

Часть 1

ЛЕКЦИЯ №1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

1. Линейные цепи постоянного тока.
2. Линейные цепи переменного тока.
3. Переходные процессы.
4. Линии с распределёнными параметрами.

Линейные цепи постоянного тока

Законы Кирхгофа

Рассмотрим простую электрическую цепь с одной ЭДС и несколькими сопротивлениями, соединёнными параллельно. Будем считать, что величины ЭДС и сопротивлений нам известны. Все элементы цепи соединены параллельно, поэтому

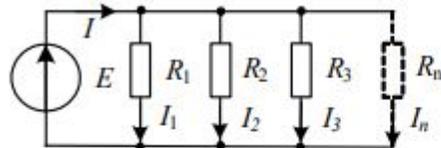


Рис. 1.1

напряжение на каждом элементе одинаково и равно E , но токи разные – они обратно пропорциональны величинам сопротивлений соответствующих ветвей и определяются по закону Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_1}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2}, \quad I_3 = \frac{E}{R_3} \quad \dots \quad I_n = \frac{E}{R_n}. \quad (1)$$

Результирующий ток I , протекающий в ветви с ЭДС, будет равен сумме токов всех ветвей без ЭДС, то есть

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n. \quad (2)$$

Если подставить выражение (1) в (2), то можно получить:

$$I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3} + \dots + \frac{E}{R_n} = E \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = E \cdot \frac{1}{R_3} = E \cdot g_3 \quad (3)$$

Коэффициент пропорциональности между током и ЭДС называется проводимостью и измеряется в сименсах [См]. Итак, мы получили важную формулу, позволяющую определить результирующее – эквивалентное сопротивление схемы с параллельным соединением проводников:

$$g_3 = g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_3} \rightarrow R_3 = \frac{1}{g_3} \quad (4)$$

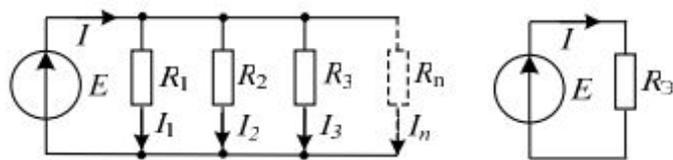


Рис. 1.2

В частном случае, когда в цепи два сопротивления, выражение (4) можно переписать:

$$g_3 = g_1 + g_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_3} \rightarrow R_3 = \frac{1}{g_3} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5)$$

Это выражение следует запомнить, потому что в электротехнике часто приходится преобразовывать цепь с двумя параллельно включенными сопротивлениями.

Отметим полезную информацию, которая содержится в выражении (4). Если вы правильно подсчитали результирующее (эквивалентное) сопротивление схемы параллельно соединённых проводников, то величина результирующего сопротивления должна быть меньше величины самого маленького сопротивления цепи. Теперь вернёмся к выражению (2). Это выражение называется **первым законом Кирхгофа**, и формулируется следующим образом: **Алгебраическая сумма токов в узле равняется нулю.**

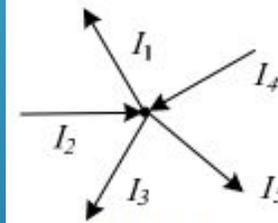
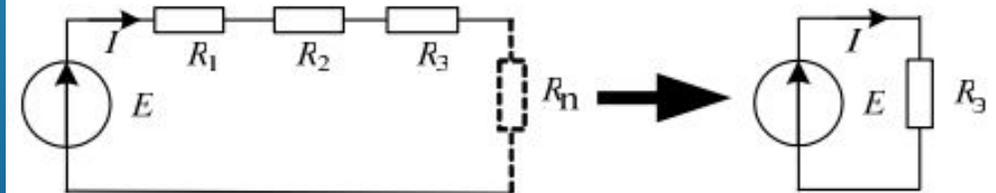


Рис. 1.3

Алгебраическая сумма означает, что следует учитывать знаки, например если входящие в узел токи берутся со знаком плюс, то выходящие должны быть взяты со знаком минус. Или наоборот. Запишем первый закон Кирхгофа для узла, приведённого на рисунке 1.3:

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим простейшую цепь с последовательным соединением проводников, приведённую на рисунке 1.4. В представленной схеме известны все сопротивления и ЭДС. Через все



Линейные цепи постоянного тока

сопротивления проходит один и тот же ток. Результирующее или суммарное сопротивление схемы равняется сумме всех сопротивлений:

$$R_3 = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (7)$$

По закону Ома, ЭДС в результирующей цепи равняется произведению силы тока на результирующее сопротивление. Проведя несложные преобразования можно получить:

$$E = R_3 \cdot I = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n) I = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (8)$$

где $U_1 = I \cdot R_1$, $U_2 = I \cdot R_2$, и т.д. В результате мы получили **второй закон Кирхгофа**, который формулируется следующим образом: **алгебраическая сумма напряжений для любого замкнутого контура равняется алгебраической сумме ЭДС контура**:

$$\sum_m \pm E_m = \sum_k \pm U_k \quad (9)$$

При смешанном соединении проводников, представленном на рис.

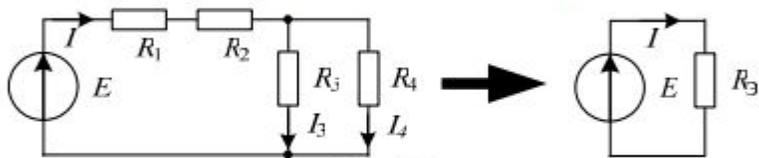


Рис. 1.5

сунке 1.5, преобразование схемы производят в следующем порядке. Сначала преобразуют сопротивления, соединённые параллельно (R_3 и R_4), а затем производят преобразования для сопротивлений, соединённых последовательно, то есть:

$$R_3 = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}. \quad (10)$$

Рассмотрим **правило параллельных ветвей** для ветвей с токами I_3 и I_4 (рис. 1.5.). Напряжения на ветвях одинаково, следовательно,

$$I_3 R_3 = I_4 R_4 \text{ и } I = I_3 + I_4 \quad (11)$$

Решая систему уравнений относительно I_3 и I_4 , получаем правило параллельных ветвей:

$$I_3 = \frac{I \cdot R_4}{R_3 + R_4}, \quad I_4 = \frac{I \cdot R_3}{R_3 + R_4}. \quad (12)$$

Это правило иногда называют "правилом разброса", так как общий ток ветвей 3 и 4 разбрасывается по ветвям с коэффициентами пропорциональности $R_4 / (R_3 + R_4)$ и $R_3 / (R_3 + R_4)$.

Примеры использования законов Кирхгофа (методы расчётов)

Для определения токов в электрической схеме использовать правило преобразования параллельно и последовательно соединённых сопротивлений можно не всегда.

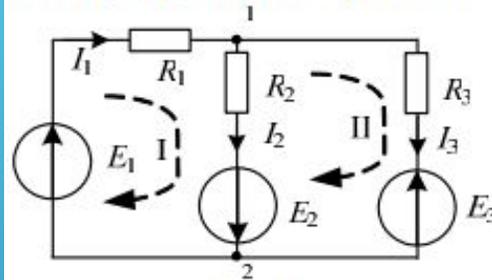


Рис. 1.6

Например, для цепи представленной на рис. 1.6, это мешает сделать ЭДС E_1 , E_2 и E_3 . В таких случаях для определения токов используют первый и второй законы Кирхгофа. Число уравнений, необходимых для определения токов, равно числу ветвей.

Число независимых уравнений, которых можно записать по первому закону Кирхгофа, равно $Y-1$, где Y – число узлов в схеме. Остальные недостающие уравнения, которые нужны для завершения системы, записывают по второму закону Кирхгофа. Рассмотрим в качестве примера схему, представленную на рисунке 1.6, предполагая, что все сопротивления и ЭДС нам известны.

Схема имеет три ветви, следовательно, необходимо записать три уравнения. Записываем одно уравнение по первому закону Кирхгофа. Например, для второго узла:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (13)$$

Два недостающих уравнения записываем по второму закону Кирхгофа для первого и второго контуров соответственно:

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1 + E_2 \\ -I_2 R_2 + I_3 R_3 = -E_2 - E_3 \end{cases} \quad (14)$$

Запишем уравнения (13) и (14) в виде системы уравнений, предварительно правильно сгруппировав коэффициенты при неизвестных, в результате получаем формальное решение:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \quad (15)$$

Рассмотрим пример с числовыми данными.

Линейные цепи постоянного тока (практика)

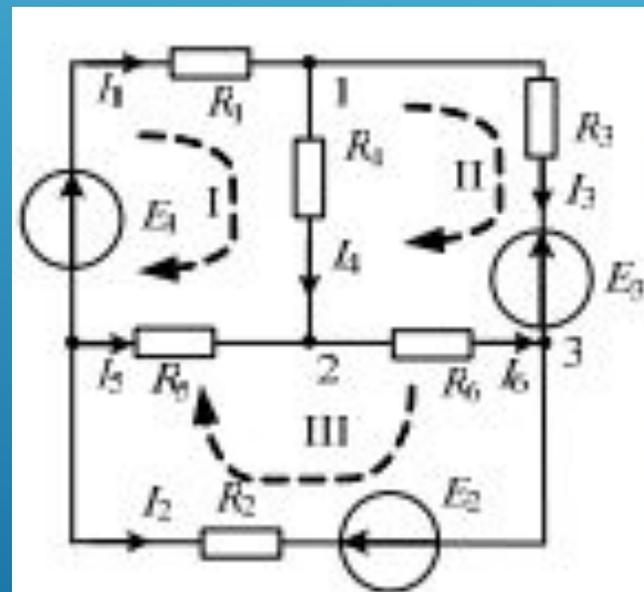


Рис. 1.7

Пример 1: Дана схема с тремя ЭДС и шестью сопротивлениями. Определить все токи в схеме (рис. 1.7), если:

$R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 12 \text{ Ом}$, $R_3 = 15 \text{ Ом}$,
 $R_4 = 20 \text{ Ом}$, $R_5 = 10 \text{ Ом}$, $R_6 = 8 \text{ Ом}$,
 $E_1 = 50 \text{ В}$, $E_2 = 30 \text{ В}$, $E_3 = 15 \text{ В}$.

Схема имеет шесть ветвей, следовательно, необходимо составить шесть уравнений. Три уравнения (У-1-3) по первому закону Кирхгофа (1-ЗК) и три уравнения по второму закону Кирхгофа (2-ЗК). Для узлов 1, 2 и 3 соответственно записываем по 1 закон Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_4 = 0; \\ I_4 + I_5 - I_6 = 0; \\ I_2 + I_3 + I_6 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Для контуров I, II и III используем 2 закон Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = E_1; \\ I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_6 R_6 = -E_3; \\ -I_2 R_2 + I_5 R_5 + I_6 R_6 = E_2. \end{cases} \quad (17)$$

Перепишем в матричном виде и подставим числовые значения. В результате получаем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 & -R_6 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & R_5 & R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & 0 & -8 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ -E_3 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,329 \\ -2,075 \\ 1,121 \\ 1,209 \\ -0,254 \\ 0,955 \end{pmatrix}.$$

Линейные цепи постоянного тока

Матрично-топологический метод

Когда ветвей и узлов в схеме много, решение методом Кирхгофа становится утомительным, потому что приходится составлять алгебраические уравнения высокого порядка. Поэтому в электротехнике существуют методы, позволяющие понизить порядок системы линейных алгебраических уравнений. Такие методы называются матрично-топологическими. Топологические методы особенно удобны для использования компьютерных вычислений.

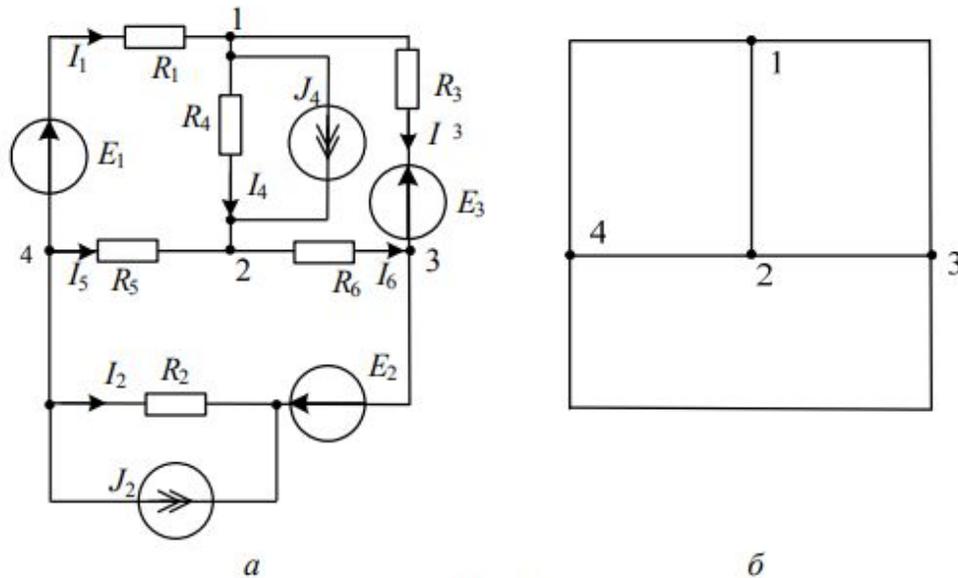


Рис. 1.8

Рассмотрим использование матрично – топологического метода для схемы, приведённой на рисунке 1.8 а.

Прежде всего, рисуют ненаправленный (неориентированный) топологический граф схемы. Рисуются ветви схемы без элементов. Причем, рисуются только те ветви схемы, элементы которых имеют конечное сопротивление. Например, для рис. 1.8,б приведен граф схемы, представленной на Рис. 1.8 а, на котором видно восемь ветвей и четыре узла.

Затем задают направления токов, и граф становится направленным (ориентированным). Следующим этапом составляют узловую матрицу, задавшись базовым узлом. Базовый узел – это узел, потенциал которого равен некой постоянной величине, в частности нулю. Пусть, например, четвертый узел будет базовым узлом. Тогда сформируем узловую матрицу **A** по следующему правилу: если ток ветви подтекает к узлу, то ставим -1, если ток ветви оттекает от узла, то ставим 1, если ветвь не имеет связи с узлом, то ставим 0. Для схемы, изображённой на Рис. 1.9, узловая топологическая матрица будет следующей:

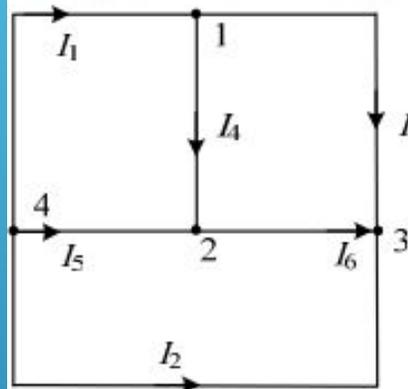


Рис 1.9.

Узлы

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Ветви} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Составим теперь матрицу контуров **B** по следующему правилу: если ветвь не входит в контур, то ставим 0, если ветвь входит в контур, то ставим 1 в случае совпадения направления обхода контура с направлением тока, и ставим -1 в противном случае. Для схемы, изображённой на Рис. 1.9, контурная топологическая матрица будет иметь вид:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Ветви} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Если узловая и контурная матрицы составлены правильно, то их произведения должны равняться нулевой матрице:

Линейные цепи постоянного тока

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Важными являются также диагональные матрицы сопротивлений $diag(\mathbf{R})$ и проводимостей $diag(\mathbf{g})$, а также матрицы ЭДС и источников тока.

Диагональная матрица сопротивлений состоит только из диагональных элементов, элементами которой являются величины сопротивлений ветвей. То есть первый диагональный элемент – это результирующее сопротивление первой ветви, второй диагональный элемент – это результирующее сопротивление второй ветви и так далее.

Диагональная матрица проводимостей – матрица обратная диагональной матрице сопротивлений $diag(\mathbf{g}) = diag(\mathbf{R})^{-1}$.

Топологическая матрица ЭДС – это столбцевая матрица, количество элементов которой равно количеству ветвей схемы без источников тока. Элементы матрицы ЭДС формируются по следующему правилу: если ЭДС в ветви отсутствует, то ставим 0, если направление ЭДС совпадает с направлением тока в ветви, то ставим ЭДС с положительным знаком, в противном случае ставим ЭДС с отрицательным знаком.

Топологическая матрица источников тока является столбцевой матрицей, количество элементов которой равно количеству ветвей схемы без источников тока. Элементы матрицы источников тока формируются также как матрица ЭДС: если источник тока соединён параллельно i -той ветви с током I_i и направление источника тока совпадает с направлением тока I_i , то в этом случае ставим величину источника тока с положительным знаком. Если направление источника тока не совпадает с направлением тока в ветви I_i , то ставим величину источника тока с отрицательным знаком. И, наконец, если источник тока отсутствует, то ставим нуль. Ниже приводится пример формирования топологических матриц для схемы, приведенной на рисунке 1.8.

$$\mathbf{r} = diag(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = diag(\mathbf{g}) = diag(\mathbf{R})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_2 \\ 0 \\ J_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейные цепи постоянного тока

Метод контурных токов

Прежде чем продолжить рассмотрение матрично-топологического метода, рассмотрим метод контурных токов. Суть метода заключается в уменьшении размерности матрицы СЛАУ для определения токов. Рассмотрим, например, схему, приведённую на рисунке 1.10 примера 1.

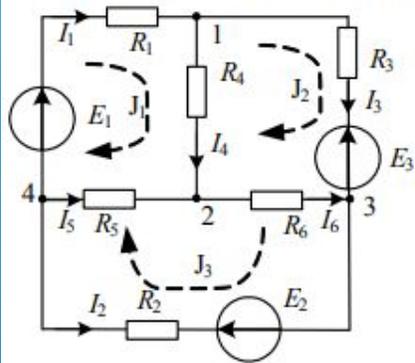


Рис. 1.10

Выберем произвольное направление токов в ветвях. Будем считать, что в первом контуре течёт только ток J_1 и будем называть его контурным током. Аналогично во втором контуре, полагаем, что течёт ток J_2 . И, наконец, в третьем контуре будем считать, что течёт ток J_3 . Составляем уравнения для контурных токов по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} J_1(R_1 + R_4 + R_5) - J_2R_4 - J_3R_5 = E_1 \\ -J_1R_4 + J_2(R_4 + R_3 + R_6) - J_3R_6 = -E_3 \\ -J_1R_5 - J_2R_6 + J_3(R_5 + R_6 + R_2) = E_2 \end{cases} \quad (19)$$

При составлении уравнений учтено, что в смежных ветвях протекают два контурных тока, направленных навстречу друг другу. Подставляем числовые значения сопротивлений и ЭДС в СЛАУ и получаем решения:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 + R_5 & -R_4 & -R_5 \\ -R_4 & R_4 + R_3 + R_6 & -R_6 \\ -R_5 & -R_6 & R_5 + R_6 + R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -20 & -10 \\ -20 & 43 & -8 \\ -10 & -8 & 30 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_3 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,329 \\ 1,121 \\ 2,075 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Теперь можно найти токи в ветвях, используя их связь с контурными токами:

$$I_1 = J_1, I_2 = -J_3, I_3 = J_2, I_4 = J_1 - J_2, I_5 = J_3 - J_1, I_6 = J_3 - J_2, \quad (21)$$

$$I^T = (2,329 \quad -2,075 \quad 1,121 \quad 1,209 \quad -0,254 \quad 0,955).$$

Баланс мощностей

При составлении СЛАУ по первому и второму законам Кирхгофа можно допустить ошибку, например, пропустить в нужном месте знак минус, и, как следствие, получить неправильное значение токов. Для проверки числовых значений токов составляют баланс мощностей для источников энергии – ЭДС и источников тока, и для потребителей энергии – сопротивлений. Это закон сохранения энергии – сколько энергии было выделено источниками энергии – столько же должно быть потреблено потребителями. Определим мощность источников и мощность приёмников для нашей схемы.

Мощность источников энергии:

$$P_{\text{И}} = E_1 I_1 - E_3 I_3 - E_2 I_2 = 161,899 \text{ Вт}. \quad (22)$$

Мощность потребителей энергии:

$$P_{\text{П}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 161,899 \text{ Вт}. \quad (23)$$

Баланс сошелся, следовательно, все токи найдены правильно.

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Метод контурных токов на основе матрично-топологического подхода

Теперь решим задачу примера 1 матрично-топологическим методом. Топологический метод заключается в формализации всех операций. Для этого нам понадобятся топологическая контурная матрица и диагональная матрица сопротивлений:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (24).$$

Матрицу сопротивлений для контуров можно переписать в виде матричного произведения трех топологических матриц:

Линейные цепи постоянного тока (практика)

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_4 & -R_5 \\ -R_4 & R_4 + R_3 + R_6 & -R_6 \\ -R_5 & -R_6 & R_5 + R_6 + R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицу вектора правых частей тоже можно записать в виде произведения топологических матриц

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ -E_3 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Линейные цепи постоянного тока (практика)

И, наконец, контурные токи можно выразить через токи в ветвях, используя топологические матрицы

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ -J_3 \\ J_2 \\ J_1 - J_2 \\ -J_1 + J_3 \\ -J_2 + J_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, можно формализовать метод контурных токов, используя топологические матрицы. Последовательность действий такова: записываем произведение матриц:

$$\mathbf{BRB}^T = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 + R_5 & -R_4 & -R_5 \\ -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & -R_6 \\ -R_5 & -R_6 & R_5 + R_6 + R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -20 & -10 \\ -20 & 43 & -8 \\ -10 & -8 & 30 \end{pmatrix}, \mathbf{BE} = \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_3 \\ -E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -15 \\ -30 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

находим контурные токи, а затем и токи в ветвях:

$$\mathbf{J} = (\mathbf{BRB}^T)^{-1} \cdot \mathbf{BE} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,329 \\ 1,121 \\ 2,075 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Линейные цепи постоянного тока

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}^T \mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,329 \\ -2,075 \\ 1,121 \\ 1,209 \\ -0,254 \\ 0,955 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Проверим результат решения, проделав виртуальную лабораторную работу с помощью программы Electronics Workbench. Измерим токи в ветвях, подключив амперметры последовательно с сопротивлениями. Листинг программы Electronics Workbench, представленный на рисунке 1.11, свидетельствует о правильном расчете.

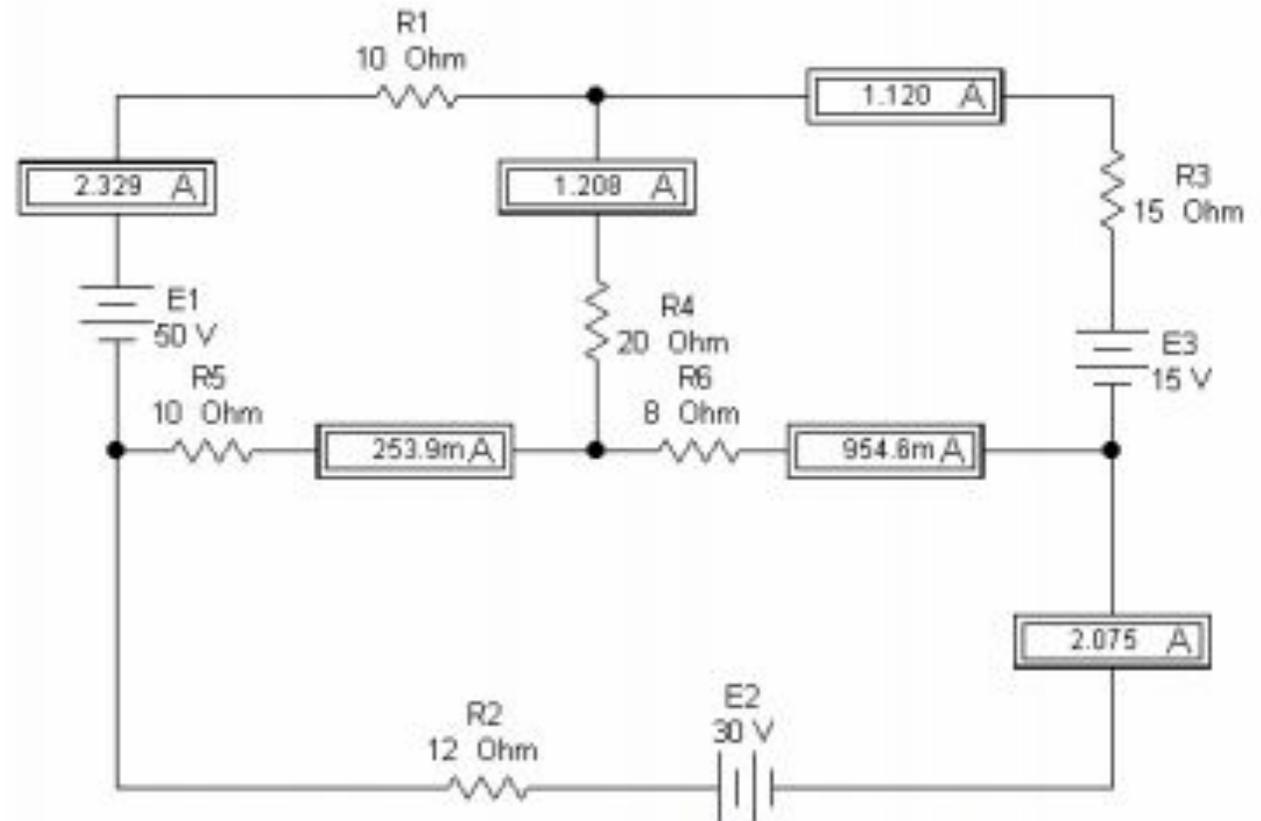


Рис. 1.11. Схема, собранная в Electronics Workbench.

Линейные цепи постоянного тока

Метод узловых потенциалов

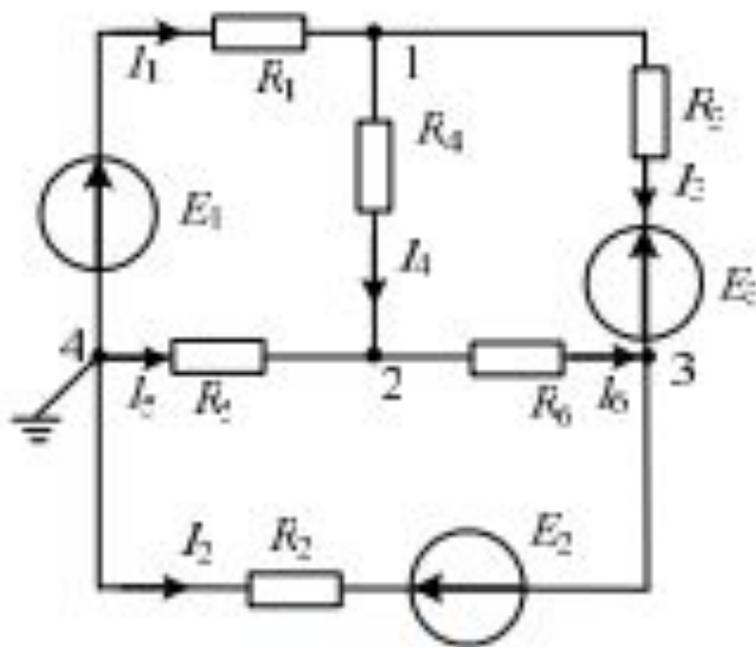


Рис. 1.12

Рассмотрим еще один метод понижения порядка СЛАУ. Прежде всего, обозначим все узлы на схеме. Затем выбираем базовый узел, потенциал которого равен нулю. Пусть это будет узел 4. То есть потенциал узла 4 равен нулю $\varphi_4 = 0$. Для определения потенциалов остальных узлов нужно составить уравнения относительно неизвестных потенциалов узлов.

Прежде всего, запишем систему уравнений относительно токов по первому закону Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_1 - I_3 - I_4 = 0 \text{ (1уз);} \\ I_4 + I_5 - I_6 = 0 \text{ (2уз);} \\ I_2 + I_3 + I_6 = 0 \text{ (3уз).} \end{cases}$$

Линейные цепи постоянного тока

Теперь запишем токи через неизвестные значения потенциалов и известные значения ЭДС и сопротивлений.

$$\begin{cases} \frac{-\varphi_1 + E_1}{R_1} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_4} - \frac{\varphi_1 - \varphi_3 - E_3}{R_3} = 0 \quad (1uz); \\ \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_4} + \frac{-\varphi_2}{R_5} - \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_6} = 0 \quad (2uz); \\ \frac{-\varphi_3 - E_2}{R_2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_3 - E_3}{R_3} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4} = 0 \quad (3uz). \end{cases}$$

Сгруппируем эти уравнения относительно неизвестных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и в результате получаем

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right) \varphi_1 - \frac{1}{R_4} \varphi_2 - \frac{1}{R_3} \varphi_3 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3}; \\ -\frac{1}{R_4} \varphi_1 + \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) \varphi_2 - \frac{1}{R_6} \varphi_3 = 0; \\ -\frac{1}{R_3} \varphi_1 - \frac{1}{R_6} \varphi_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3} \right) \varphi_3 = -\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}. \end{cases}$$

Линейные цепи постоянного тока

Сумма проводимостей ветвей, подходящих к узлу, называется *собственной проводимостью узла*. Например, для узлов 1, 2 и 3 это будет соответственно:

$$g_{11} = g_1 + g_4 + g_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}, \quad g_{22} = g_5 + g_4 + g_6 = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6},$$
$$g_{33} = g_2 + g_6 + g_3 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3}$$

или в матричном виде:

$$\mathbf{g} \cdot \varphi = \mathbf{b},$$

$$\text{где } \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,217 & -0,05 & -0,067 \\ -0,05 & 0,375 & -0,125 \\ -0,067 & -0,125 & -0,275 \end{pmatrix} \quad (29)$$

и \mathbf{b} – столбцевая матрица правых частей

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 + E_3}{R_1 + R_3} \\ 0 \\ -\frac{E_2 - E_3}{R_2 - R_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3,5 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Линейные цепи постоянного тока

Решая систему уравнений (29), получаем потенциалы узлов:

$$\varphi = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26,71 \\ 2,539 \\ -5,098 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

И, наконец, находим токи во всех ветвях:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_1 - \varphi_1) / R_1 \\ (-E_2 - \varphi_3) / R_2 \\ (\varphi_1 - \varphi_3 - E_3) / R_3 \\ (\varphi_1 - \varphi_2) / R_4 \\ -\varphi_2 / R_5 \\ (\varphi_2 - \varphi_3) / R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,329 \\ -2,075 \\ 1,121 \\ 1,209 \\ -0,254 \\ 0,955 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Метод узловых потенциалов на основе матрично-топологического метода

Решим задачу примера 1 матрично-топологическим методом. Прежде всего, запишем узловую топологическую матрицу учитывая, что базовым узлом является узел 4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Теперь нам понадобятся диагональная матрица проводимостей, которая равна обратной диагональной матрице сопротивлений и матрица ЭДС.

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Теперь нам понадобятся диагональная матрица проводимостей, которая равна обратной диагональной матрице сопротивлений и матрица ЭДС.

$$\mathbf{g} = \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,083 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,067 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,125 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_3 \\ -E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -15 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Приведём произведение матриц, результатом которого будет матрица проводимостей узлов:

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Приведём произведение матриц, результатом которого будет матрица проводимостей узлов:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_6 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{A}^T \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,217 & -0,05 & -0,067 \\ -0,05 & 0,375 & -0,125 \\ -0,067 & -0,125 & -0,275 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Следующим шагом будет произведение матриц:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_3 \\ -E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} \\ 0 \\ -\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3,5 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Теперь можно найти потенциалы узлов, используя следующие соотношения:

$$\varphi = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26,71 \\ 2,539 \\ -5,098 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

При известных потенциалах узлов находим напряжения на каждой ветви:

Линейные цепи постоянного тока (практика)

При известных потенциалах узлов находим напряжения на каждой ветви:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_3 \\ -E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23,29 \\ -24,902 \\ 16,808 \\ 24,171 \\ -2,539 \\ 7,637 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

И, наконец, находим токи во всех ветвях:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1/R_1 \\ U_2/R_2 \\ U_3/R_3 \\ U_4/R_4 \\ U_5/R_5 \\ U_6/R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,329 \\ -2,075 \\ 1,121 \\ 1,209 \\ -0,254 \\ 0,955 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

В завершении задачи рекомендуется проверить баланс мощностей и убедиться, что расчет сделан правильно. В матричной форме баланс мощностей записывается в следующем виде:

$$P_{II} = \mathbf{I}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = 161,899 \text{ Вт.} \quad P_{II} = \mathbf{I} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} = 161,899 \text{ Вт.}$$

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Проверим наши данные, проделав виртуальную лабораторную работу в Electronics–Workbench. Подключив параллельно сопротивлениям вольтметры можно определить напряжения. Разделив показание вольтметров на соответствующие сопротивления можно найти токи в ветвях.

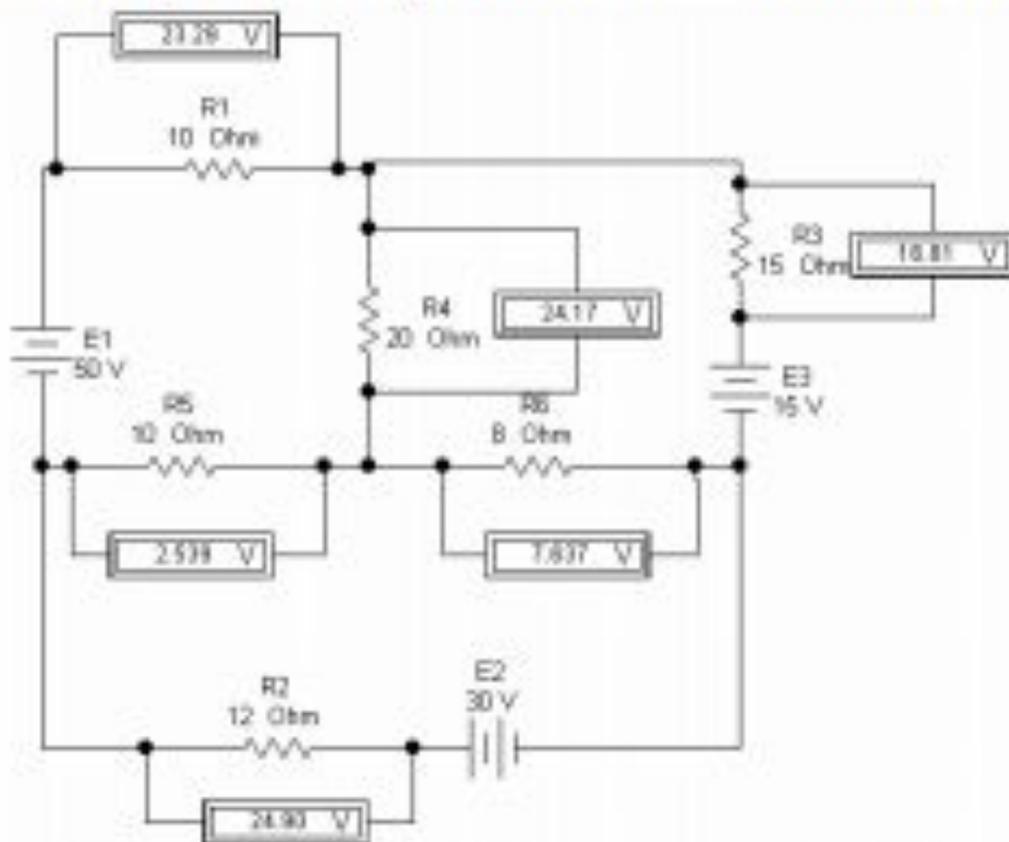


Рис. 1.13. Схема, собранная в Electronics Workbench

Линейные цепи постоянного тока

Метод эквивалентных преобразований

Рассмотрим фрагмент электрической цепи, приведённый на рисунке 1.14:

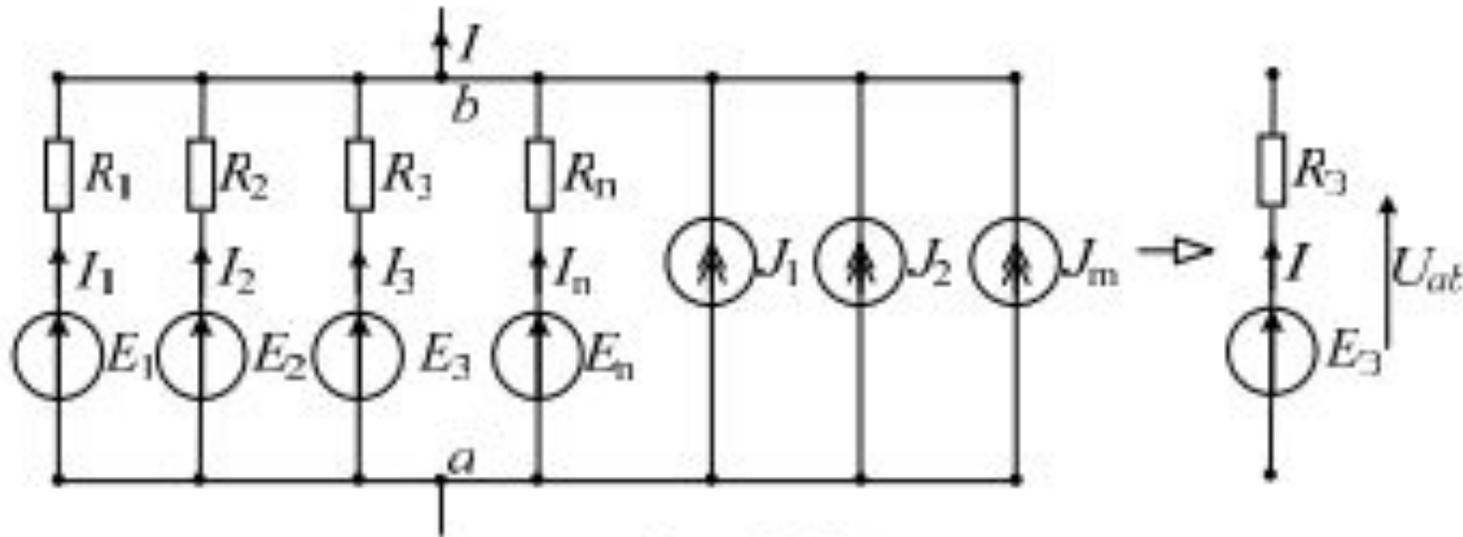


Рис. 1.14

Токи в каждой ветви с ЭДС определяются выражениями:

$$I_1 = \frac{E_1 + U_{ab}}{R_1} = g_1 \cdot (E_1 + U_{ab}), \quad I_2 = \frac{E_2 + U_{ab}}{R_2} = g_2 \cdot (E_2 + U_{ab}),$$

$$I_k = \frac{E_k + U_{ab}}{R_k} = g_k \cdot (E_k + U_{ab}).$$

Линейные цепи постоянного тока

Результирующий ток будет определяться суммой всех токов в ветвях:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n + \sum_k^m J_k = \sum_{k=0}^n E_k g_k + U_{ab} \sum_{k=0}^n g_k + \sum_k^m J_k. \quad (40)$$

С другой стороны, мы видим, что ток в эквивалентной ветви определяется выражением:

$$I = (E_{\text{Э}} + U_{ab}) g_{\text{Э}} = E_{\text{Э}} g_{\text{Э}} + U_{ab} g_{\text{Э}}. \quad (41)$$

Сравнивая последние два выражения, получаем:

$$E_{\text{Э}} = \frac{\sum_{k=0}^n E_k g_k + \sum_k^m J_k}{\sum_{k=0}^n g_k}, \quad g_{\text{Э}} = \sum_{k=0}^n g_k. \quad (42)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

Линейные цепи постоянного тока

Рассмотрим некоторые частные случаи:

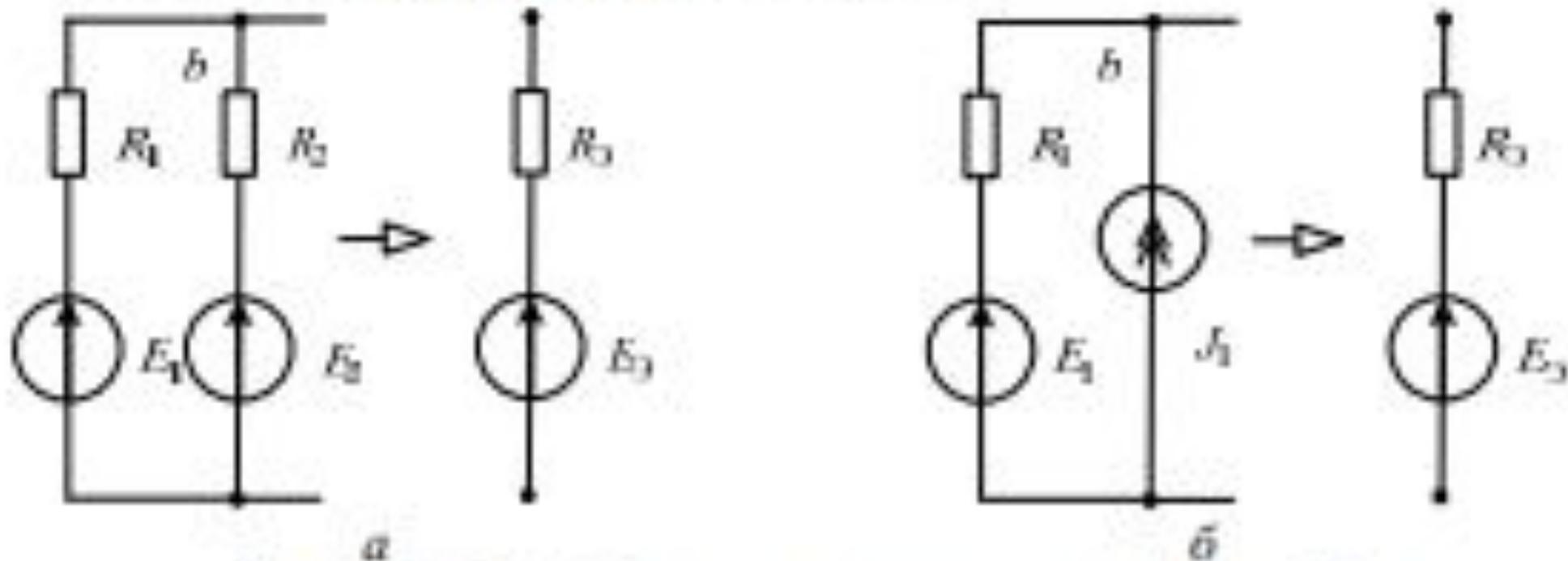


Рис. 1.15. Преобразование параллельных ветвей

Для рисунка 1.15 ветви будут преобразованы по формулам для схем а и б соответственно:

$$E_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}, \quad R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad E_3 = E_1 + J_1 R_1, \quad R_3 = R_1. \quad (43)$$

Линейные цепи постоянного тока

В соответствии с методом эквивалентных преобразований легко получить полезные преобразования, приведённые на рисунках 1.16 и 1.17.

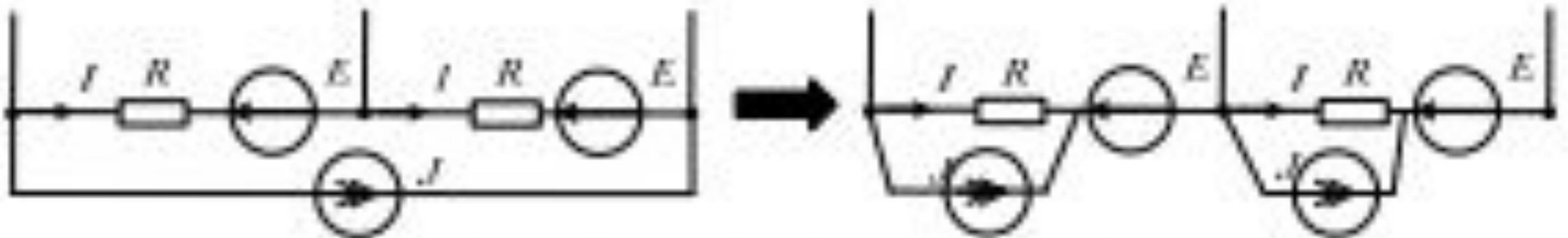


Рис. 1.16. Расщепление источника тока

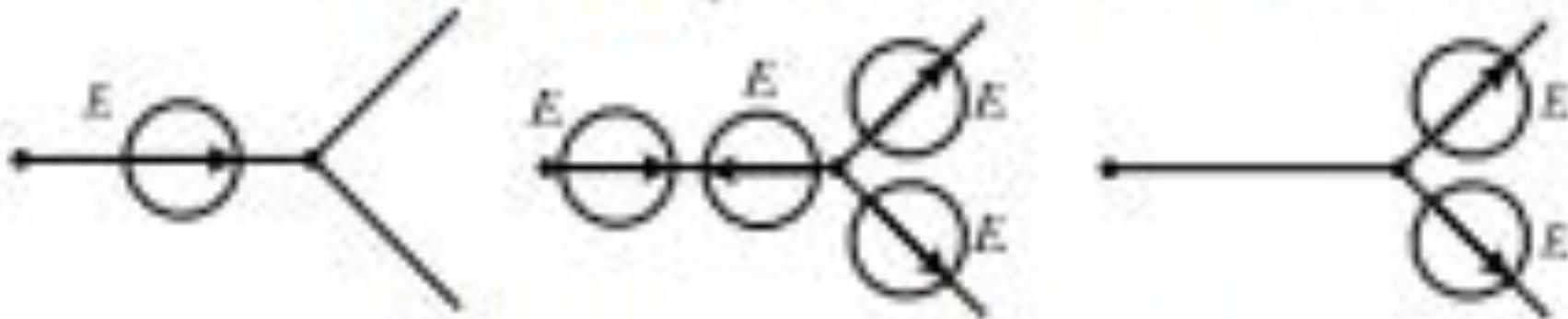


Рис. 1.17. Перенос ЭДС через узел

Линейные цепи постоянного тока

Преобразование треугольника в звезду и звезды в треугольник

Мы рассматривали преобразование сопротивлений, соединённых последовательно или параллельно. В ряде случаев бывают соединения сопротивлений не подчиняющиеся ни правилу параллельного соединения, ни последовательного (например, в трехфазных цепях). В таких случаях могут быть полезными правила преобразования треугольника в звезду или наоборот, звезды в треугольник, которые мы приведем без доказательств.

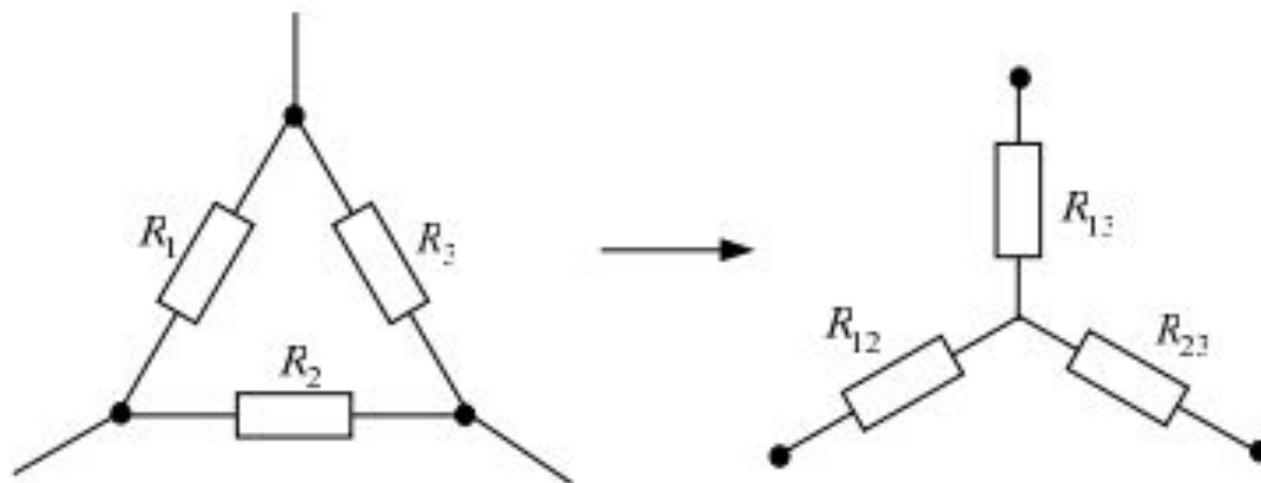


Рис. 1.18

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Пример 2: Даны сопротивления $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 15 \text{ Ом}$, соединённые треугольником. Преобразовать соединение треугольником в соединение звездой.

Решение:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 4,444 \text{ Ом},$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 3,333 \text{ Ом}, \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 6,666 \text{ Ом}.$$

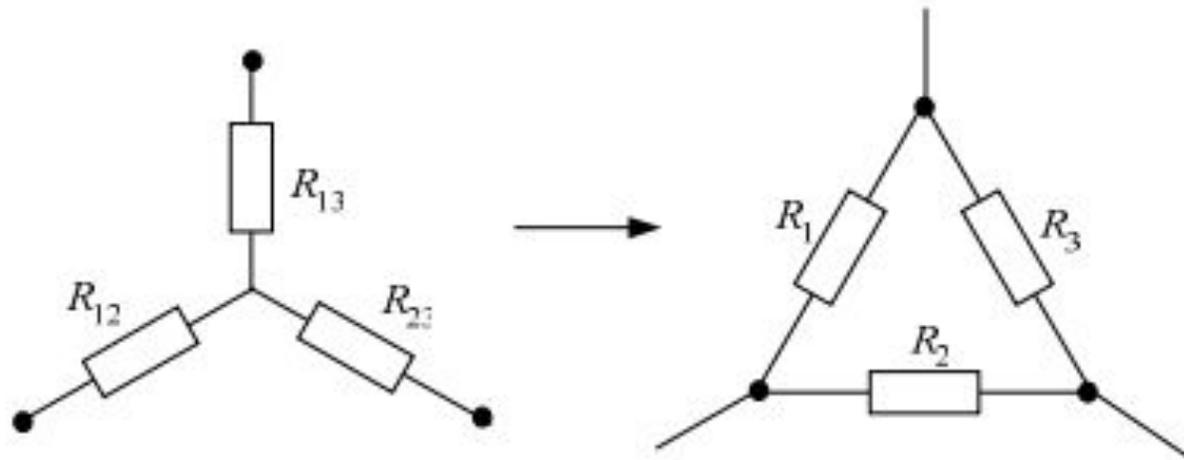


Рис. 1.19

Линейные цепи постоянного тока (практика)

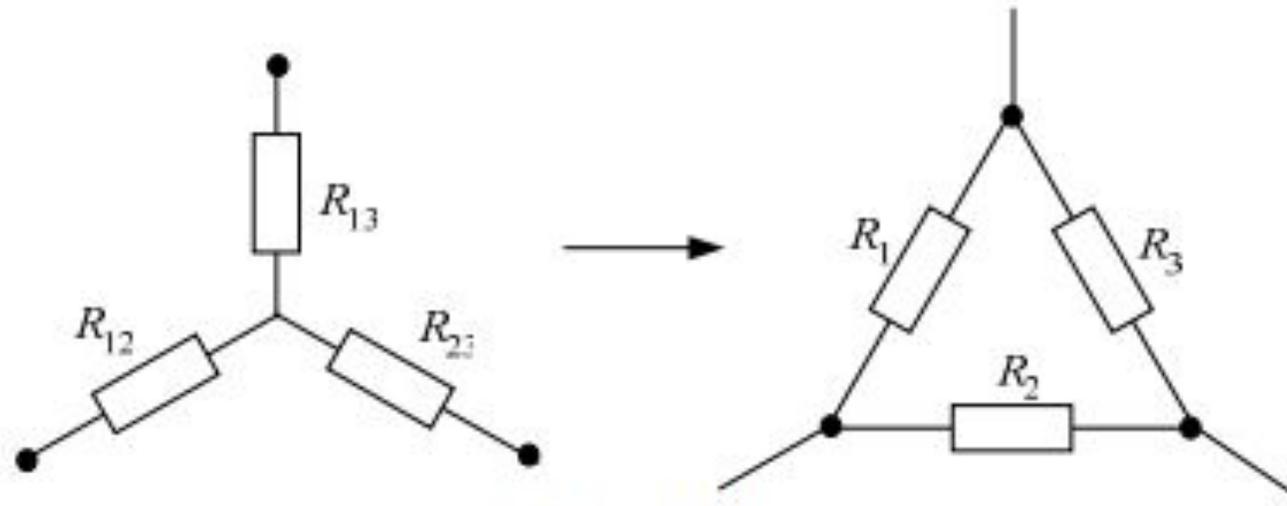


Рис. 1.19

Пример 3: Даны сопротивления $R_{12} = 4,444$ Ом, $R_{13} = 3,333$ Ом, $R_{23} = 6,666$ Ом, соединённые звездой. Преобразовать соединение звездой в соединение треугольником.

Решение:

$$R_1 = R_{12} + R_{13} + \frac{R_{12}R_{13}}{R_{23}} = 10 \text{ Ом},$$

$$R_2 = R_{12} + R_{23} + \frac{R_{12}R_{23}}{R_{13}} = 20 \text{ Ом}, \quad R_3 = R_{13} + R_{23} + \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12}} = 15 \text{ Ом}.$$

Линейные цепи постоянного тока

Метод эквивалентного генератора Суть метода заключается в том, что в схеме выделяется ветвь, в которой нужно найти ток, а вся оставшаяся часть схемы заменяется активным двухполюсником – эквивалентным генератором. Существуют две схемы замещения активно-двухполюсника (см. рис. 1.20.):

1-я схема – двухполюсник состоит из источника напряжения, ЭДС – E_{Γ} и сопротивления R_{Γ} ;

2-я схема – двухполюсник состоит из источника тока – J_{Γ} и проводимости $g_{\Gamma} = 1/R_{\Gamma}$.

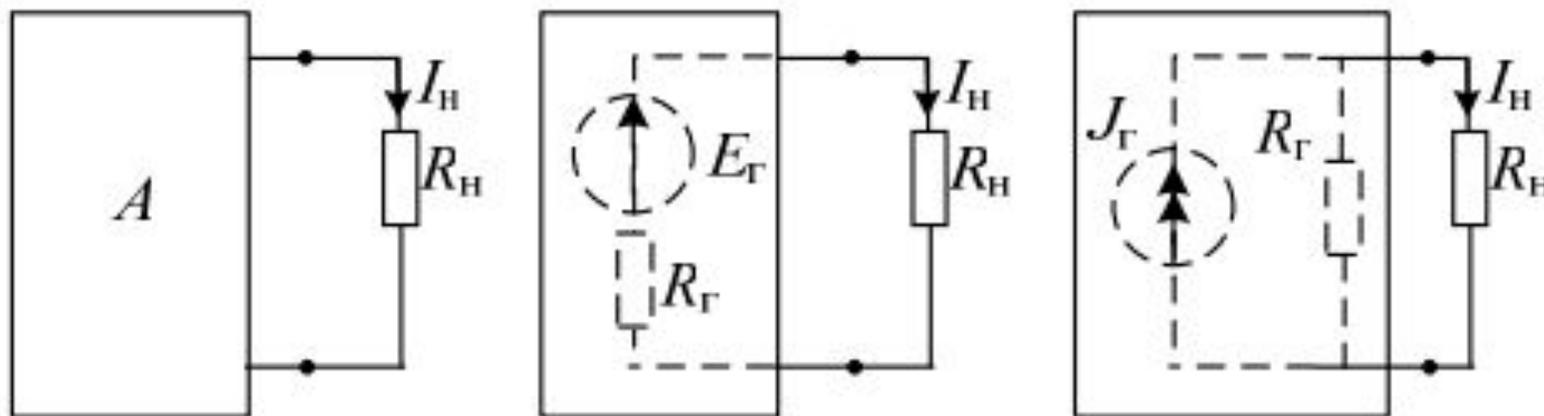


Рис. 1.20. Схема замещения эквивалентного генератора

Линейные цепи постоянного тока

Чтобы определить ЭДС генератора E_{Γ} , следует найти напряжение холостого хода – $U_{ХХ}$ относительно выходных зажимов эквивалентного генератора, это и будет искомая ЭДС. Для того чтобы найти сопротивление генератора R_{Γ} , следует найти сопротивление относительно выходных зажимов генератора. После определения E_{Γ} и R_{Γ} легко найти ток короткого замыкания – $I_{КЗ} = E_{\Gamma}/R_{\Gamma}$. Источник тока эквивалентного генератора – J_{Γ} равен току короткого замыкания $J_{\Gamma} = I_{КЗ}$. При известных параметрах эквивалентного генератора можно найти ток в нагрузке:

$$I_{Н} = \frac{E_{\Gamma}}{R_{Н} + R_{\Gamma}}. \quad (44)$$

Если известен ток короткого замыкания $J_{\Gamma} = I_{КЗ}$, применив правило разброса легко найти ток в нагрузке, используя соотношение:

$$I_{Н} = \frac{J_{\Gamma} R_{\Gamma}}{R_{Н} + R_{\Gamma}} = \frac{J_{\Gamma}}{1 + R_{Н}/R_{\Gamma}}. \quad (45)$$

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Пример 4: Даны сопротивления и ЭДС:

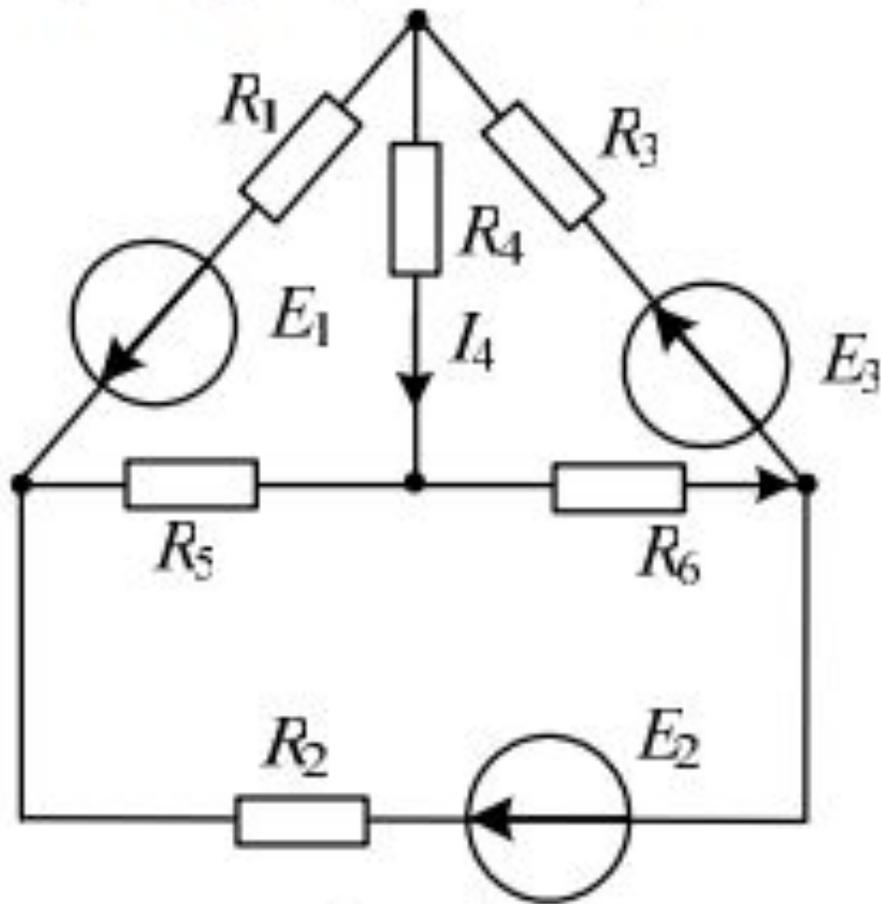


Рис. 1.21

$$R_1 = 20 \text{ Ом}, R_2 = 18 \text{ Ом},$$

$$R_3 = 25 \text{ Ом}, R_4 = 21 \text{ Ом},$$

$$R_5 = 12 \text{ Ом}, R_6 = 8 \text{ Ом},$$

$$E_1 = 25 \text{ В}, E_2 = 35 \text{ В}, E_3 = 50 \text{ В}.$$

Определить ток I_4 в четвертой ветви, используя метод эквивалентного генератора.

Решение: Прежде всего, необходимо преобразовать схему в двухполюсник: выделяем ветвь с сопротивлением R_4 , а всю оставшуюся часть заме-

няем двухполюсником – эквивалентным генератором.

Линейные цепи постоянного тока (практика)

Затем находим напряжение холостого хода и сопротивление эквивалентного генератора.

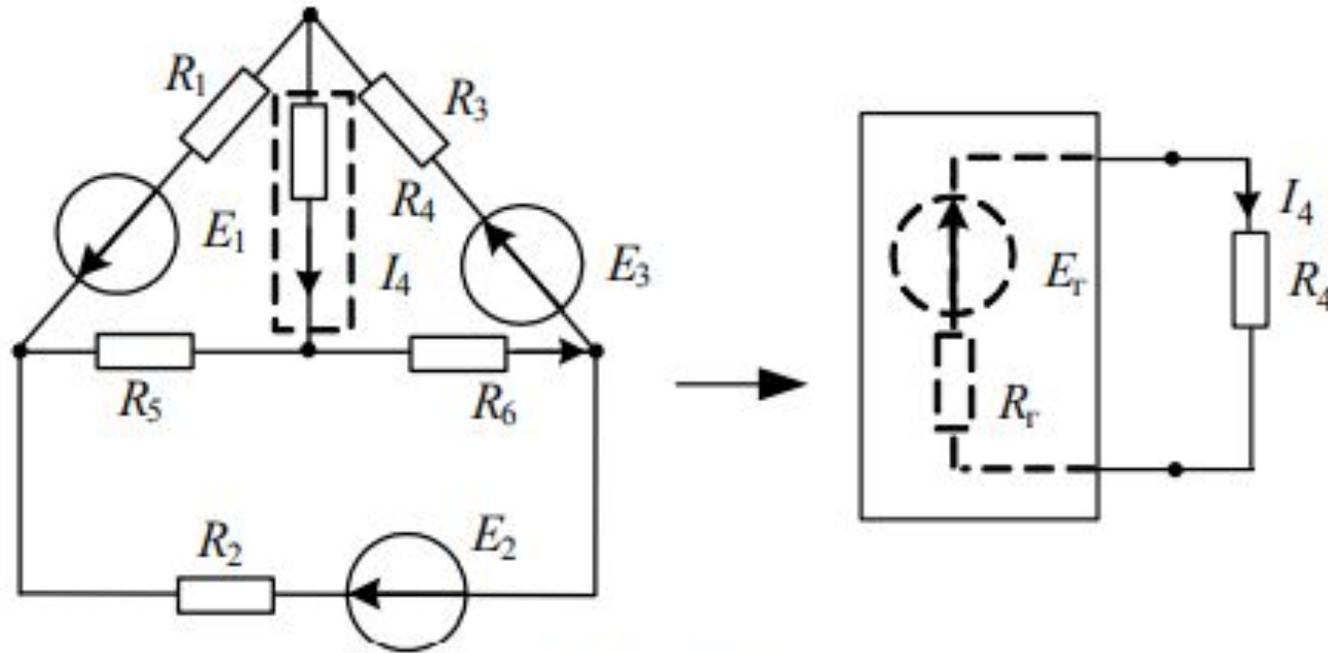


Рис. 1.22

Составляем матрицу сопротивлений и столбцовую матрицу правых частей, и находим необходимые токи:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_5 + R_6 & -R_5 - R_6 \\ -R_5 - R_6 & R_2 + R_5 + R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & -20 \\ -20 & 38 \end{pmatrix},$$

Линейные цепи постоянного тока (практика)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -E_1 - E_3 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 \\ 35 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1,039 \\ 0,374 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = -1,413 \text{ A.}$$

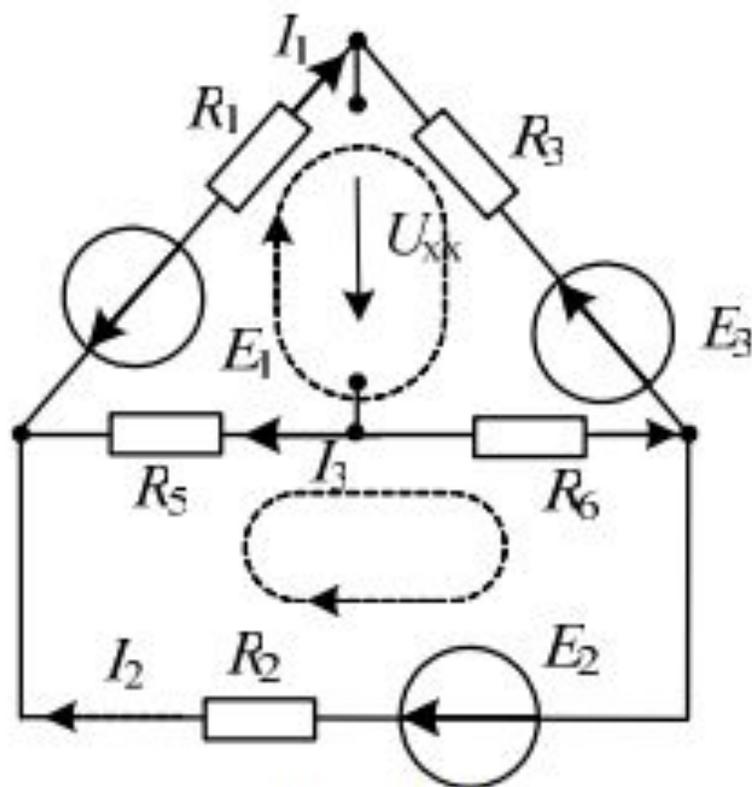


Рис. 1.23

Используя найденные токи можно найти напряжение холостого хода $U_{XX} = E_{\Gamma}$:

$$U_{XX} = E_{\Gamma} = -E_1 - I_1 R_1 - I_3 R_5 = 12,729 \text{ В.}$$

Для определения сопротивления генератора – сопротивления относительно зажимов a и b , необходимо треугольник сопротивлений преобразовать в звезду и затем сделать некоторые преобразования:

Линейные цепи постоянного тока (практика)

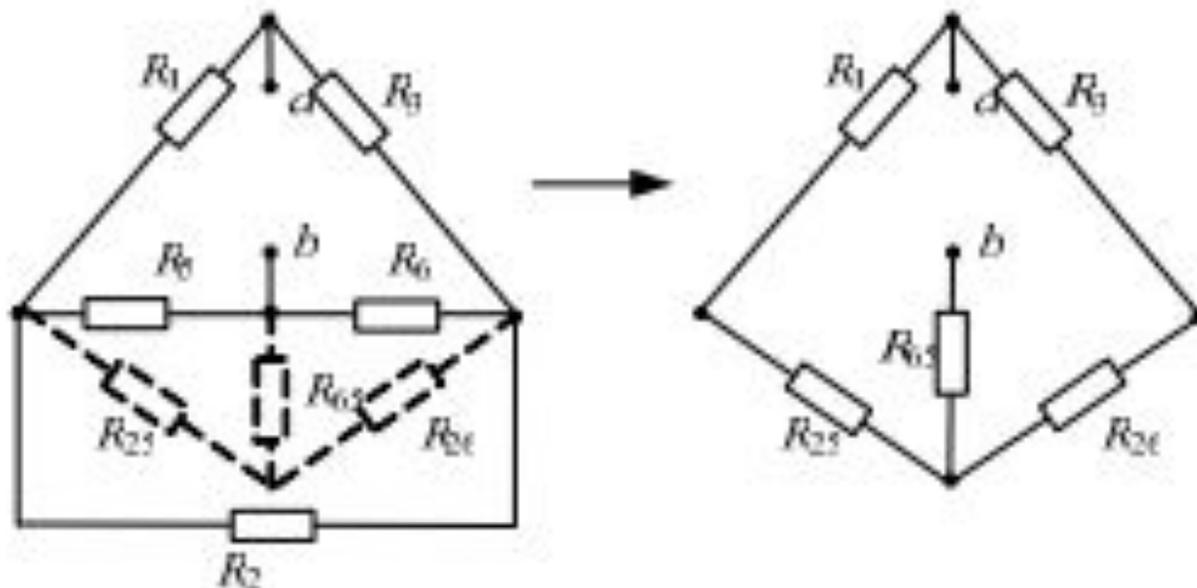


Рис. 1.24

$$R_{25} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5 + R_6} = 5,684 \text{ Ом},$$

$$R_{65} = \frac{R_6 R_5}{R_2 + R_5 + R_6} = 2,526 \text{ Ом}.$$

$$R_{26} = \frac{R_2 R_6}{R_2 + R_5 + R_6} = 3,789 \text{ Ом},$$

$$R_T = \frac{(R_{25} + R_1) \cdot (R_{26} + R_3)}{R_{25} + R_1 + R_{26} + R_3} + R_{65} = 16,1 \text{ Ом}.$$

В соответствии со схемой эквивалентного генератора находим ток короткого замыкания и ток в 4-той ветви I_4

$$I_{\text{кз}} = \frac{U_{\text{кз}}}{R_T} = 0,791 \text{ А}, \quad I_4 = \frac{U_{\text{кз}}}{R_4 + R_T} = 0,343 \text{ А}.$$

Линейные цепи постоянного тока

Метод наложения (метод суперпозиции).

Пример. Методом наложения определить ток во второй ветви, если известны величины элементов электрической цепи:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 20 \text{ Ом}, R_3 = 5 \text{ Ом}, E_1 = 10 \text{ В}, E_2 = 15 \text{ В}, J = 1 \text{ А}.$$

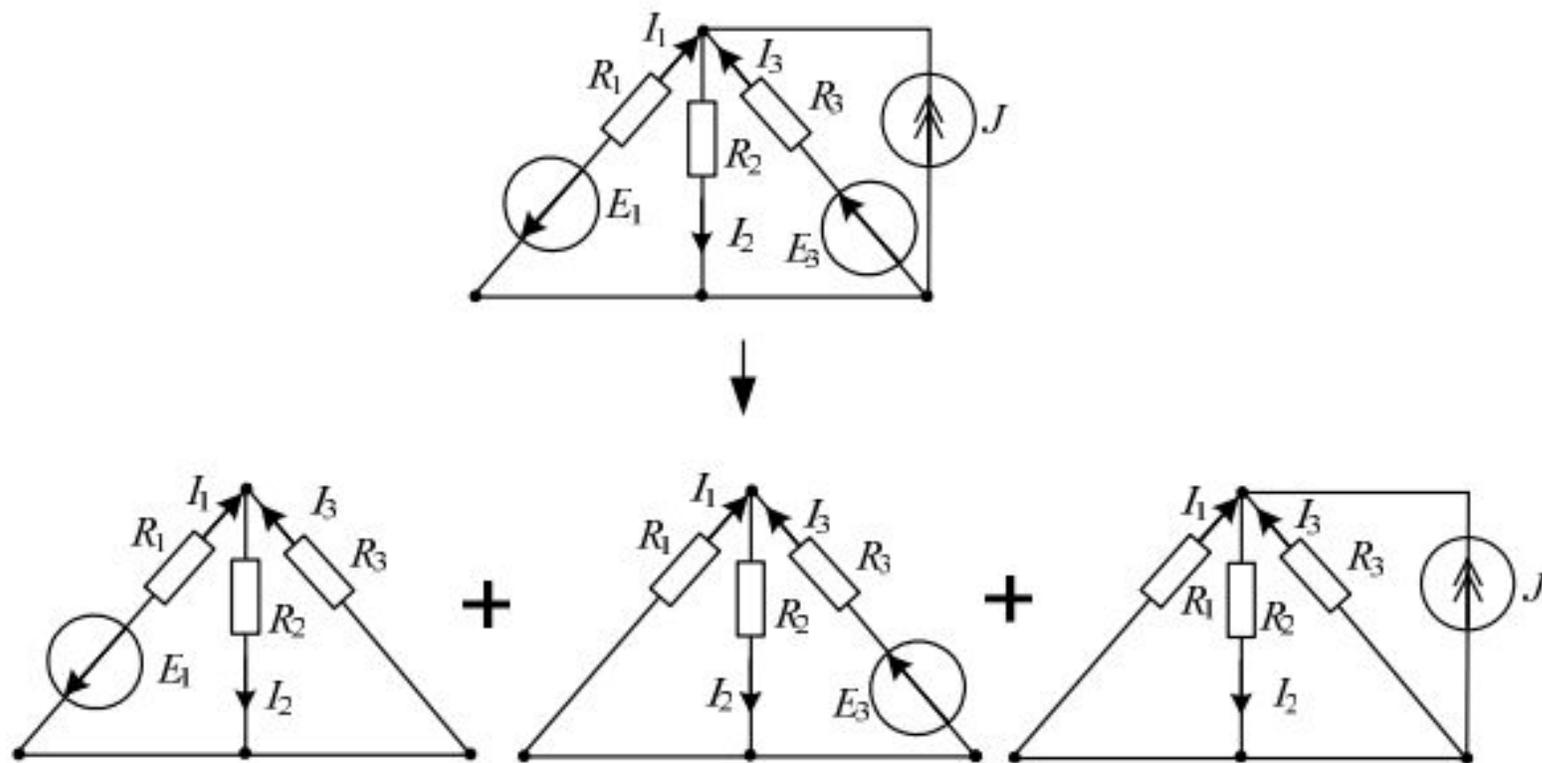


Рис. 1.28. Разложение схемы на подсхемы для определения частичных токов

Линейные цепи постоянного тока

Используем принцип суперпозиции: *резльтирующий ток равен сумме частичных токов, определённых при воздействии отдельно взятого источника энергии.* Представим исходную схему в виде двух схем, в каждой из которых действует только одна ЭДС. Определим частичный ток I_2' в схеме с ЭДС E_1 :

$$I_1' = \frac{-E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_3 + R_2}} = -0,714 \text{ А}, \quad I_2' = I_1' \frac{R_3}{R_3 + R_2} = -0,143 \text{ А}.$$

Определим частичный ток I_2'' в схеме с ЭДС $-E_2$:

$$I_3'' = \frac{E_2}{R_3 + \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2}} = 1,286 \text{ А}, \quad I_2'' = I_3'' \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,429 \text{ А}.$$

Наконец определим третий частичный ток I_2''' в схеме с источником тока:

$$I_2''' = J \frac{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2} = 0,143 \text{ А}.$$

Находим результирующий ток как сумму частичных токов:

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = 0,143 + 0,429 - 0,143 = 0,429 \text{ А}$$

Линейные цепи переменного тока

Ток, изменяющийся во времени называется переменным током. Ток может иметь различные формы, он может быть пилообразным, импульсным, синусоидальным. Все это переменный ток.

Электрический ток - это скорость изменения заряда во времени, то есть это производная заряда по времени

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

Измерение емкости. Заряд накапливается на пластинах конденсатора, и чем больше напряжение, тем больше зарядов на пластинах,

$$q = U \cdot C \quad (2)$$

Здесь C - коэффициент пропорциональности, называемый электрической емкостью. Емкость отражает способность проводника накапливать заряды q . И чем больше емкость, тем больше зарядов накапливается на

проводнике. Емкость зависит только от геометрических размеров и диэлектрических свойств среды, в которой находится проводник.

Поставим выражение (1) в (2), получим

$$i(t) = \frac{d(UC)}{dt} = C \frac{dU}{dt} \quad (3)$$

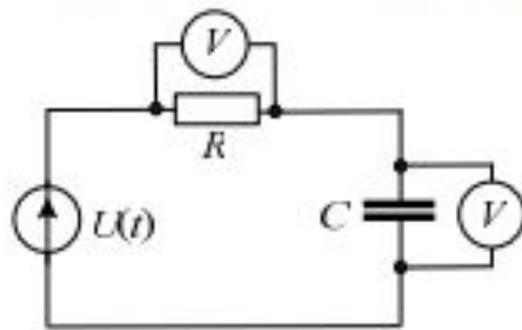


Рис. 2.1

Таким образом, ток через конденсатор определяется выражением (3).

Линейные цепи переменного тока

Допустим, нам нужно определить емкость конденсатора. Для этого подключим его к источнику напряжения и пусть напряжение, подаваемое на конденсатор, имеет пилообразную форму с периодом T (см рис. 2.2). На схеме приведено сопротивление R , величина которого



Рис. 2.2. Пилообразное напряжение

очень мала. Измерив напряжение на сопротивлении и разделив его на величину сопротивления, получаем ток в цепи. Будем считать, что сопротивление R в схеме известно, оно имеет маленькую величину и несущественно влияет на напряжение на конденсаторе. Используя формулу (3) можно найти ток

Линейные цепи переменного тока

$i(t)$ на интервале $t \in \left(0, \frac{T}{4}\right)$. Напряжение на том же интервале является линейной функцией и определяется выражением:

$$U(t) = \frac{U_m}{T/4}t = \frac{4U_m}{T}t, \quad t \in \left(0, \frac{T}{4}\right). \quad (4)$$

Следовательно, на этом интервале ток равен постоянной величине:

$$i(t) = C \frac{4U_m}{T} = I_m, \quad t \in \left(0, \frac{T}{4}\right). \quad (5)$$

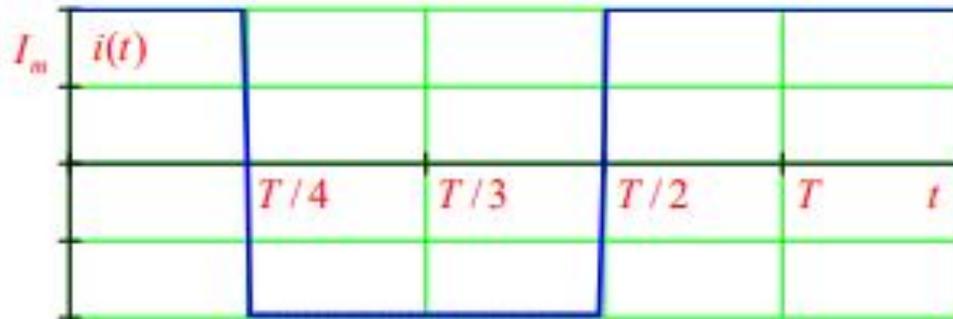


Рис. 2.3. Кусочно-постоянный ток

При известном токе и напряжении можно определить величину емкости

$$i(t) = C \frac{4U_m}{T} = I_m \rightarrow C = \frac{I_m T}{4U_m}, \quad t \in \left(0, \frac{T}{4}\right). \quad (7)$$

Результат дифференцирования по формуле (3) изображен на рисунке 2.3.

Величину тока можно определить, измерив напряжение на сопротивлении R

$$i = U_R / R = I_m. \quad (6)$$

Линейные цепи переменного тока

Измерение индуктивности. Изменение потокосцепления вызывает падение напряжения

$$U(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} \quad (8)$$

Потокосцепление пропорционально току $\Psi = Li$. Чем больше ток, тем больше потокосцепление. Коэффициент пропорциональности L между током и потокосцеплением называется индуктивностью проводника. Индуктивность L зависит от геометрических свойств проводника, его конструктивных особенностей. Так как индуктивность является величиной постоянной, то напряжение на индуктивности определяется выражением:

$$U(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (9)$$

Определим экспериментально значение индуктивности L при известном входном напряжении (см. рис. 2.4). На схеме приведено сопротивление R , величина которого очень мала. Измерив, напряжение на со-

Линейные цепи переменного тока

противлении и разделив его на величину сопротивления, получаем ток в цепи. Пусть входное напряжение остается прежним, пилообразным (рис. 2.2).

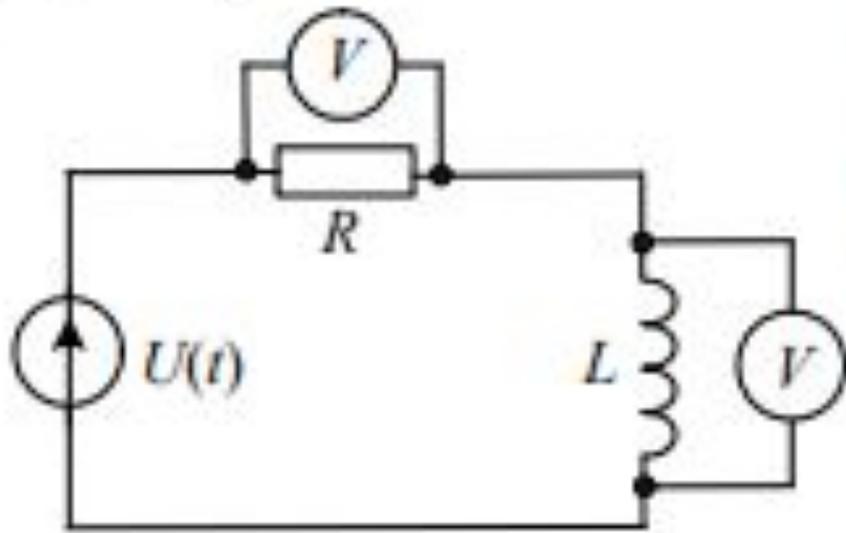


Рис. 2.4

Сопротивление схемы, как и прежде, будем считать малым, слабо влияющим на напряжение индуктивности.

Определим ток из выражения (9)

$$U(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow di(t) = \frac{U(t)dt}{L} \quad (10)$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau + i(0).$$

Линейные цепи переменного тока

Будем считать, что величина тока в начальный момент времени равна нулю

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau. \quad (11)$$

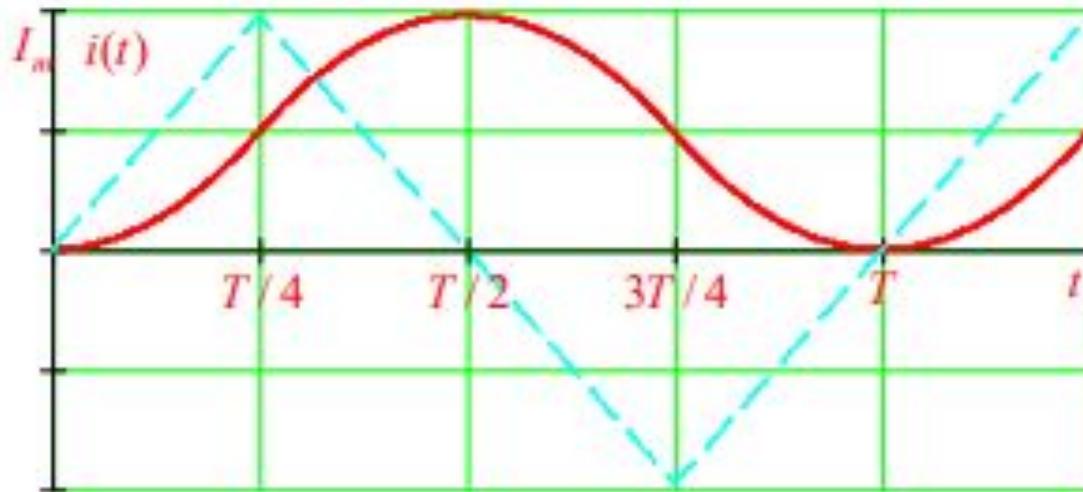


Рис. 2.5

После интегрирования напряжения на участке $t \in (0, T/4)$ получаем максимальный ток, который можно определить, измерив напряжения на сопротивлении:

$$i\left(\frac{T}{4}\right) = I_m = \frac{1}{L} \int_0^{T/4} \frac{4U_m}{T} \tau d\tau = \frac{1}{L} \frac{4U_m}{T} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{T/4} = \frac{1}{L} \frac{4U_m}{T} \frac{T^2}{32} = \frac{U_m T}{8L}.$$

Используя последнее выражение можно определить индуктивность $L = \frac{U_m T}{8I_m}$.

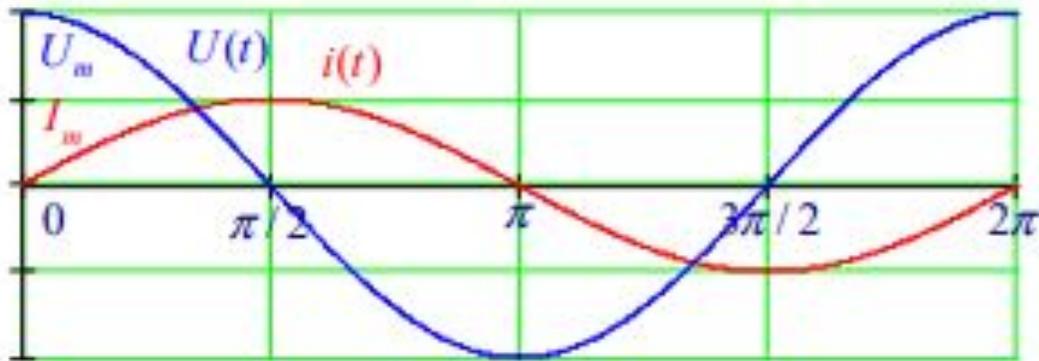
Линейные цепи переменного тока

Фазовые соотношения. Рассмотрим, в каком фазовом соотношении находятся ток и напряжение на конденсаторе и на индуктивности при воздействии гармонического напряжения.

Пусть ток через индуктивность $i(t) = I_m \sin(\omega t)$, $\omega = 2\pi f$. Определим напряжение на индуктивности:

$$U(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L\omega I_m \cos(\omega t) = L\omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, напряжение на индуктивности опережает ток на 90° , или на $\pi/2$.



Рассмотрим напряжение на конденсаторе $U(t) = U_m \sin(\omega t)$. В этом случае ток через конденсатор определяется выражением

Рис. 2.6

$$i(t) = C \frac{dU}{dt} = C\omega U_m \cos(\omega t) = C\omega U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Линейные цепи переменного тока

$$i(t) = C \frac{dU}{dt} = C\omega U_m \cos(\omega t) = C\omega U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

В данном случае ток опережает напряжение на 90° , или на $\pi/2$. Можно сказать, что напряжение отстает от тока на $\pi/2$.

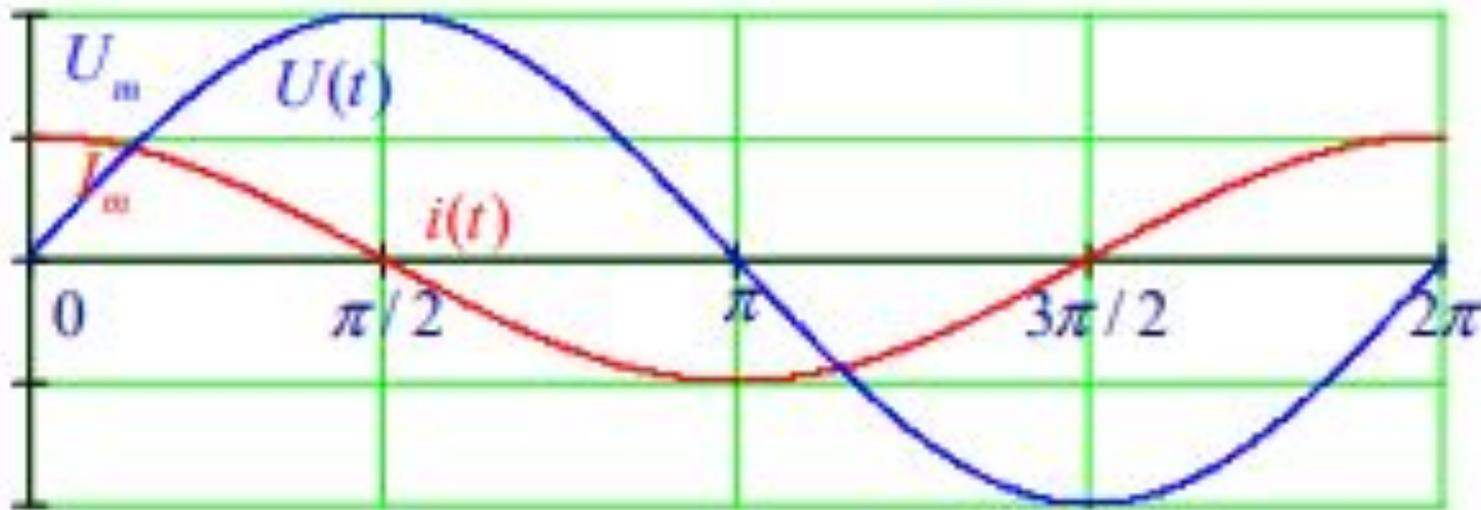


Рис. 2.7

Линейные цепи переменного тока

Синусоидальные токи и напряжения. Метод комплексных амплитуд (Символический метод)

На рисунке 2.9 представлен график синусоидального напряжения,

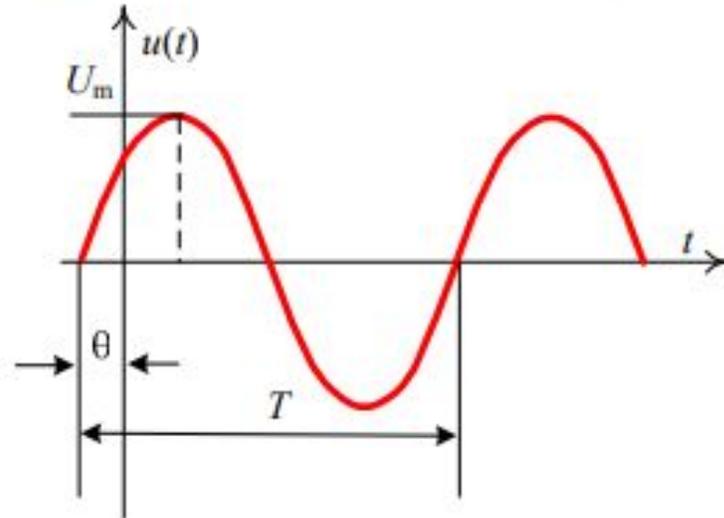


Рис. 2.9

его ещё называют гармоническим напряжением. В аналитическом виде гармонические токи и напряжения записываются следующим образом

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) \text{ В},$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha) \text{ А}.$$

Кривая имеет некоторое максимальное значение U_m , называемое амплитудным значением. Кривая сдвинута относительно вертикальной оси на угол θ .

Это значение угла называется фазовым сдвигом. Синусоида имеет период T – это кратчайшее расстояние между двумя одинаковыми значениями напряжения. В выражениях для напряжения и тока присутствует круговая частота ω (рад/сек), которая связана с частотой f (Гц-герц) и периодом T соотношением:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Линейные цепи переменного тока

При определении синусоидальных токов и напряжений в электрических схемах мы будем осуществлять различные алгебраические операции с тригонометрическими функциями. Поэтому следует перейти от тригонометрических функций ($i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \theta_1)$) к комплексным числам ($I_{m1} e^{j\theta_1} = \underline{I}_1$), которые существенно упрощают алгебраические операции. Например, для того, чтобы сложить два тока одной частоты и разных фазовых сдвигов нужно проделать нижеследующие операции:

$$i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \theta_1) \rightarrow I_{m1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t} = \underline{I}_1 e^{j\omega t};$$

$$i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \theta_2) \rightarrow I_{m2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t} = \underline{I}_2 e^{j\omega t};$$

$$\begin{aligned} I_{m1} \sin(\omega t + \theta_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \theta_2) &\rightarrow \left(I_{m1} e^{j\theta_1} + I_{m2} e^{j\theta_2} \right) e^{j\omega t} \\ &= \left(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 \right) e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t} = I_m e^{j\theta} e^{j\omega t} \rightarrow I_m \sin(\omega t + \theta). \end{aligned}$$

Аналогично осуществляются все другие операции – умножение, деление, разность и даже дифференцирование и интегрирование:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \rightarrow \frac{di(t)}{dt} \rightarrow j\omega I_m e^{j\theta} = j\omega \underline{I};$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \rightarrow \int i(t) dt \rightarrow \frac{I_m}{j\omega} e^{j\theta} = -j \frac{I_m}{\omega} e^{j\theta} = -j \frac{\underline{I}}{\omega}.$$

Линейные цепи переменного тока

Аналогично осуществляются все другие операции – умножение, деление, разность и даже дифференцирование и интегрирование:

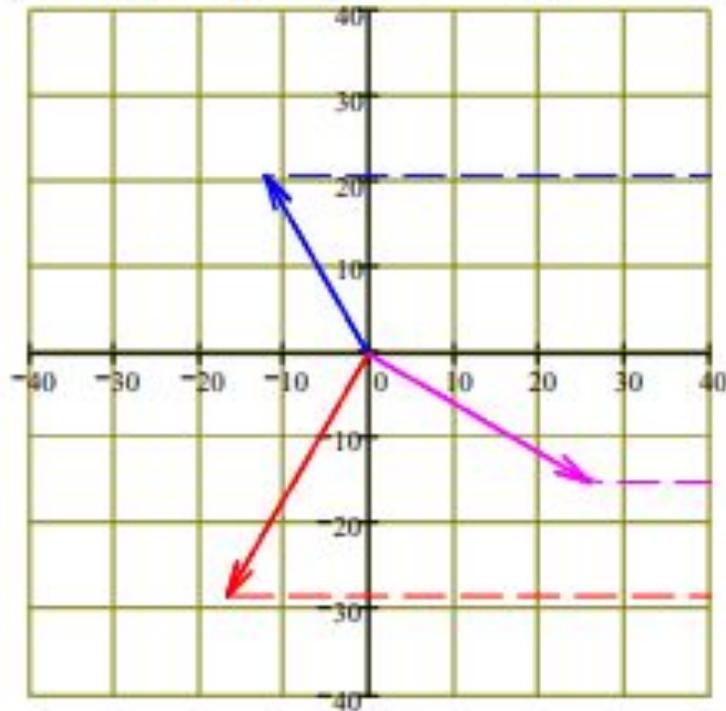
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \rightarrow \frac{di(t)}{dt} \rightarrow j\omega I_m e^{j\theta} = j\omega \underline{I};$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \rightarrow \int i(t) dt \rightarrow \frac{I_m}{j\omega} e^{j\theta} = -j \frac{I_m}{\omega} e^{j\theta} = -j \frac{\underline{I}}{\omega}.$$

Линейные цепи переменного тока

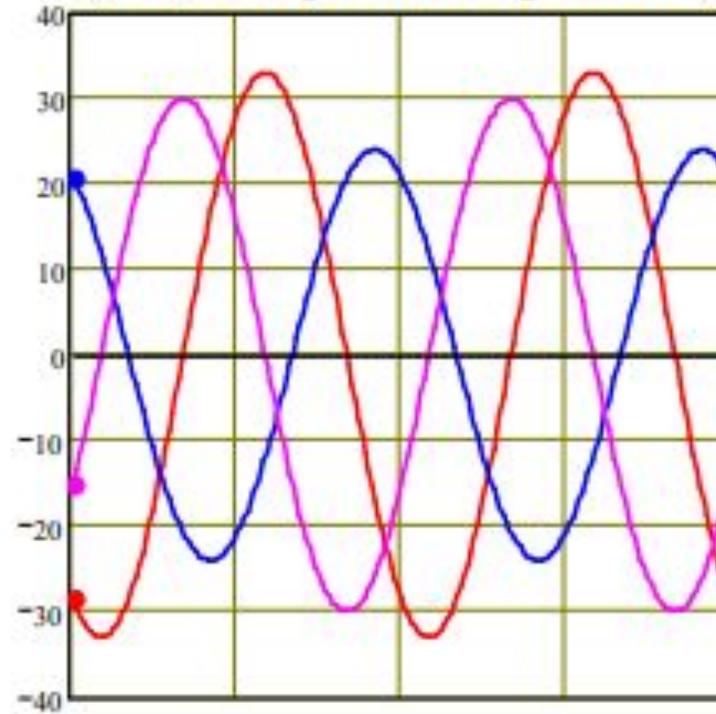
Метод замены синусоидальных величин на комплексные называется символическим методом. Этот метод позволяет заменить интегро-дифференциальные уравнения алгебраическими, что позволяет существенно упростить решение. На рисунке 2.10 приведено изображение волновой диаграммы напряжений в виде векторов.

Векторная диаграмма напряжений



а

Осциллограмма напряжений



б

Рис.2.10. а-векторная диаграмма напряжений,
б-волновая диаграмма напряжений

Линейные цепи переменного тока

В действительности все вектора вращаются с частотой ω . Запишем выражения для напряжений на элементах схемы в символической форме:

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow jL\omega I_m e^{j\theta} = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I},$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow \frac{I_m e^{j\theta}}{j\omega C} = -j \frac{I_m e^{j\theta}}{\omega C} = -jX_C \underline{I},$$

$$U_R(t) = i(t)R \rightarrow I_m e^{j\theta} R = \underline{I}R.$$

Здесь $X_L = \omega L$, $X_C = 1/\omega C$ индуктивное и емкостное сопротивления соответственно. Таким образом, вместо реактивных элементов индуктивности и емкости в символическую (комплексную) схему замещения вводятся их реактивные сопротивления:

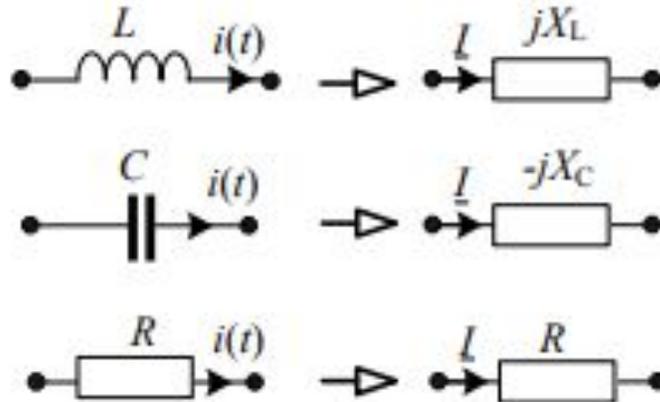


Рис. 2.11

Линейные цепи переменного тока

Факт присутствия комплексной единицы j перед индуктивным сопротивлением jX_L означает, что напряжение на индуктивности опережает ток через индуктивность на 90 градусов.

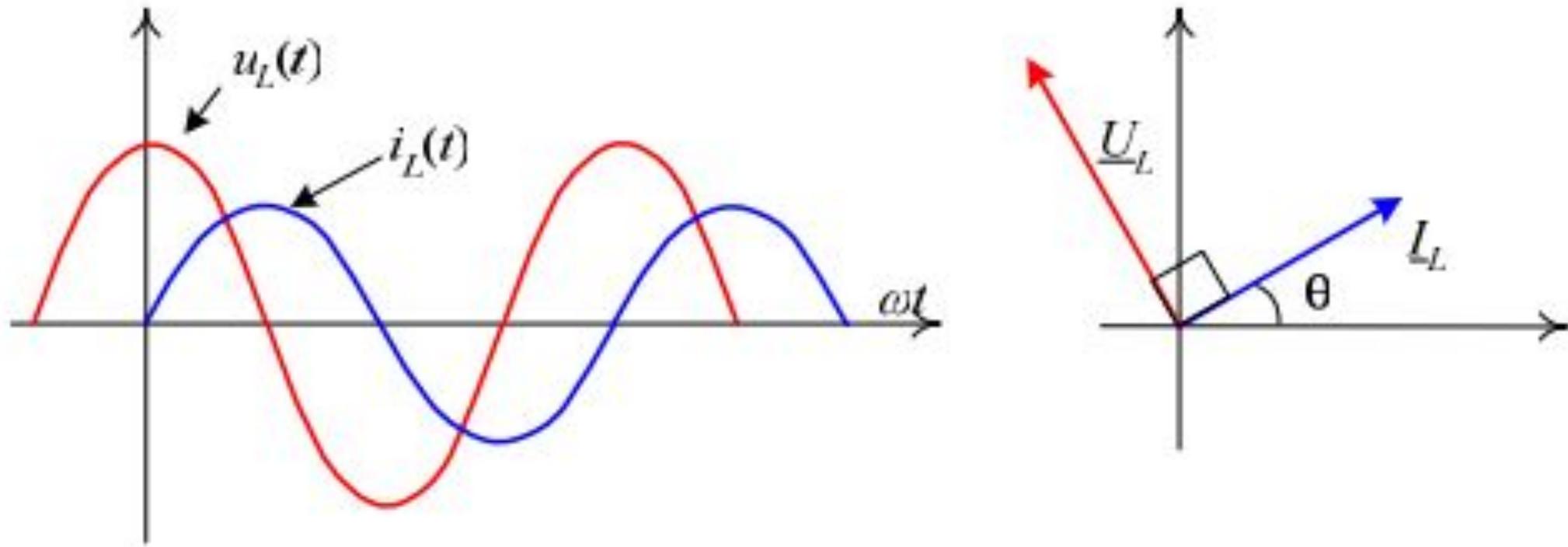


Рис. 2.12

Линейные цепи переменного тока

Факт присутствия отрицательной комплексной единицы j перед ёмкостным сопротивлением $-jX_C$ означает, что напряжение на ёмкости отстаёт от тока через ёмкость на 90 градусов.

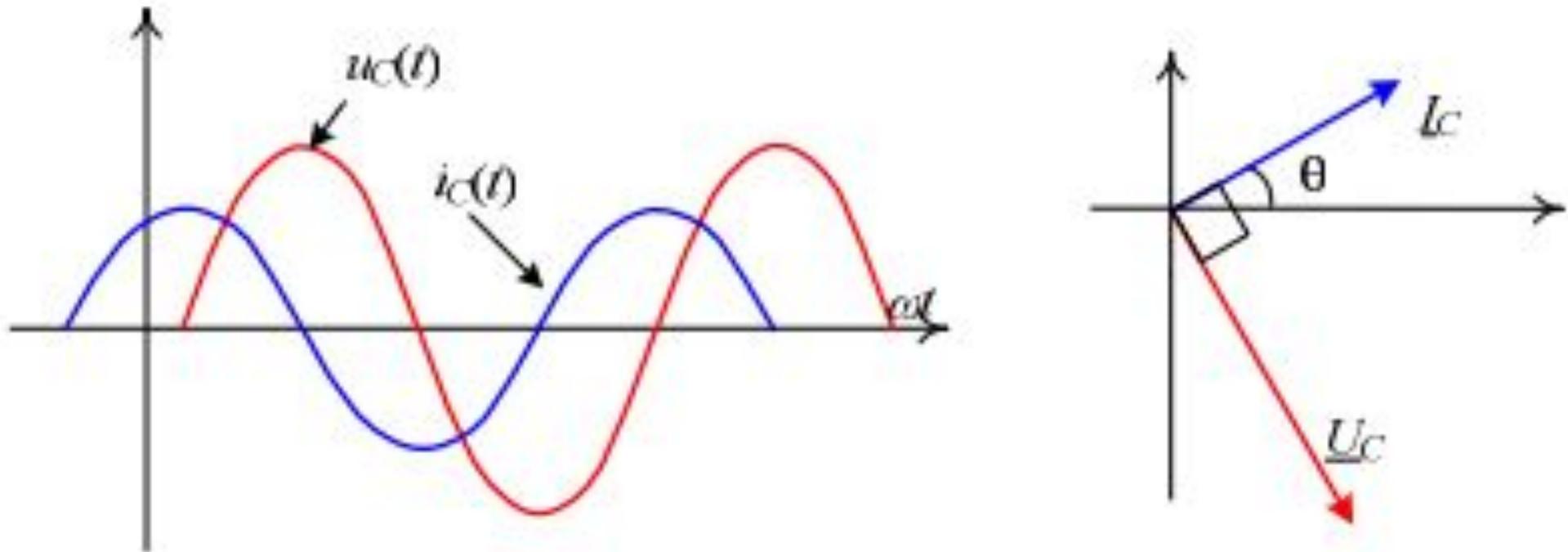


Рис. 2.13

Линейные цепи переменного тока

Если в схеме имеются несколько последовательно соединенных элементов, то их можно заменить результирующим - эквивалентным сопротивлением:

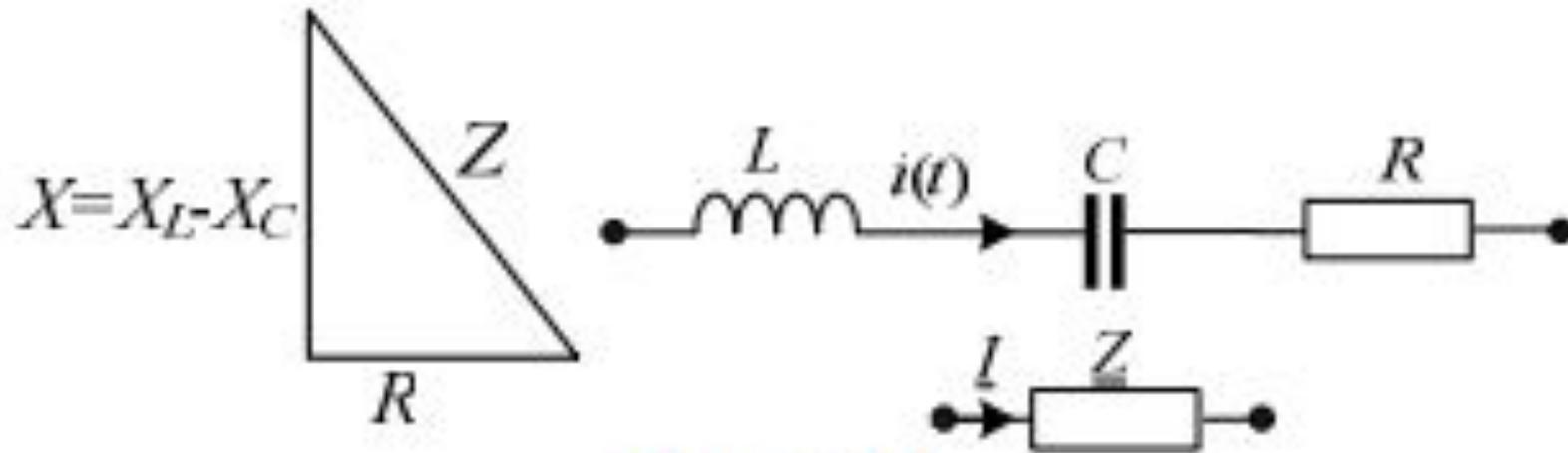
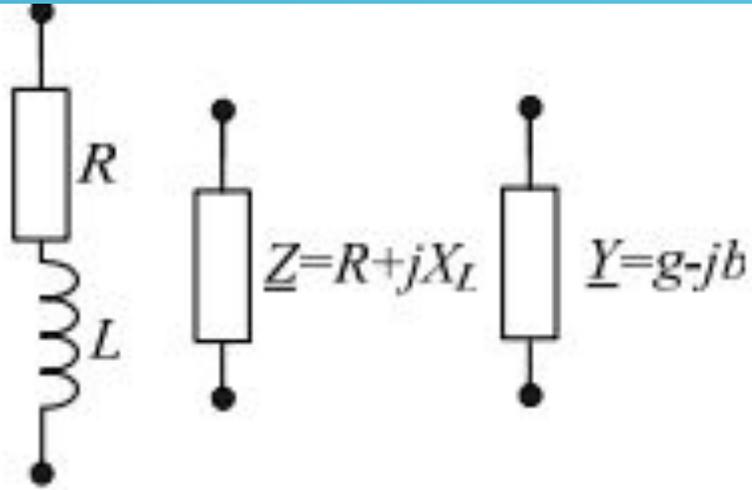


Рис. 2.14

Здесь $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$, $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$, $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\varphi = \text{arctg}(X/R)$;
 $R = Z\cos(\varphi)$, $X = Z\sin(\varphi)$.

Линейные цепи переменного тока



В случае параллельного соединения элементов удобнее пользоваться проводимостью. Приведем связь между комплексным сопротивлением и комплексной проводимостью, в алгебраической и показательной формах:

Рис. 2.15

$$\underline{Z} = R + jX, \quad \underline{Z} = Ze^{j\varphi};$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2};$$

$$\underline{Y} = g - jb, \quad g = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad b = \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = \frac{e^{-j\varphi}}{Z} = \frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad \underline{Y} = Ye^{-j\varphi}.$$

Линейные цепи переменного тока (практика)

Пример. Рассмотрим электрическую цепь с заданными параметрами:
 $e(t) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$, $\omega = 500 \text{ рад/с}$, $R = 20 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 50 \text{ мФ}$.

Определяем индуктивное и емкостное сопротивления:

$X_L = \omega L = 30 \text{ Ом}$ – индуктивное сопротивление,

$X_C = \frac{1}{\omega C} = 66,66 \text{ Ом}$ – емкостное сопротивление.

Запишем второй закон Кирхгофа для замкнутого контура представленной схемы. Сумма напряжений на пассивных элементах равно величине воздействующей ЭДС.

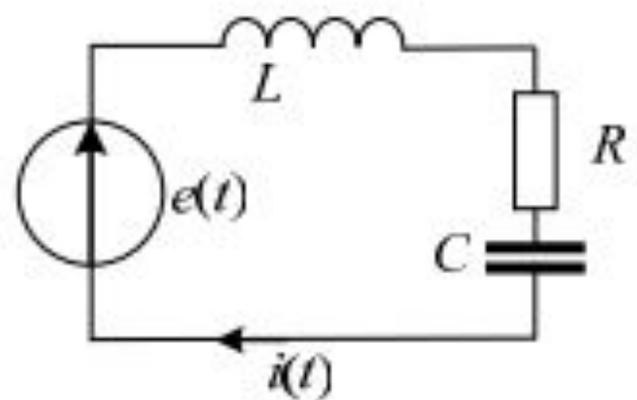


Рис. 2.

$$U_L + U_R + U_C = e(t)$$

$$U_R = iR, \quad i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int i dt, \quad U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt,$$

$$\Psi = Li, \quad U_L = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int i dt = e(t)$$

Линейные цепи переменного тока (практика)

В соответствии с символическим методом можно сделать замену:

$$i(t) \rightarrow I_m e^{j\theta_1} = \underline{I}, \quad e(t) \rightarrow E_m e^{j\theta_2} = \underline{E},$$

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow j\omega L \underline{I}, \quad U_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow \frac{\underline{I}}{j\omega C} = -j \frac{\underline{I}}{\omega C}$$

$$U_R(t) = i(t)R \rightarrow \underline{U} = R \underline{I}$$

Подставим все величины в уравнение для напряжений, и в результате получим:

$$U_L + U_R + U_C = e(t)$$

$$j\omega L \underline{I} - j \frac{\underline{I}}{\omega C} + R \underline{I} = \underline{E} \rightarrow \left(j\omega L - j \frac{1}{\omega C} + R \right) \cdot \underline{I} = \underline{E}$$

$$\left(j\omega L - j \frac{1}{\omega C} + R \right) \cdot \underline{I} = \underline{E}$$

Линейные цепи переменного тока (практика)

Коэффициенты пропорциональности при токах имеют размерность сопротивления и обозначаются следующим образом:

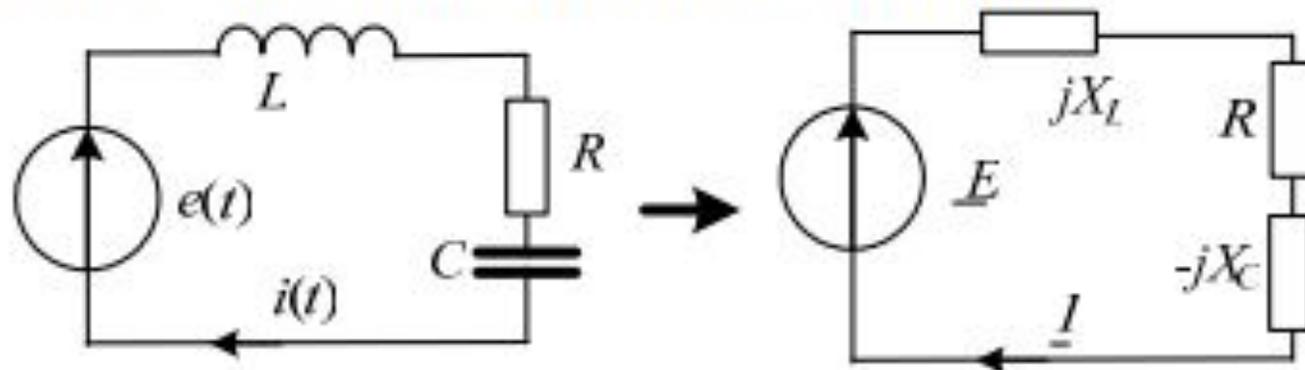


Рис. 2.17

$$\begin{aligned} (jX_L - jX_C + R) \cdot \underline{I} &= \underline{E} \rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{E}}{j(X_L - X_C) + R} = \frac{10e^{j45}}{20 + j(30 - 66,66)} \\ &= \frac{10e^{j45}}{41,76e^{-j61,38}} = -0,23 + j0,068 = 0,239e^{j106,38} \text{ А.} \end{aligned}$$

Теперь можно записать мгновенное значение тока:

$$i(t) = 0,239 \cdot \sin(\omega t + 106,38) \text{ А.}$$

Линейные цепи переменного тока

Мощность в цепи переменного тока

Полная мощность определяется выражением

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^N \pm \underline{E}_k \underline{I}_k^* = P + jQ, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

P - активная мощность, Q - реактивная мощность. Знак плюс выбирается, в случае если ЭДС и ток совпадают по направлению (на схему) и минус в противном случае. * - знак комплексного сопряжения.

Потребляемая активная и реактивная мощности определяются соотношениями соответственно:

$$P = \sum_{k=1}^N R_k I_k^2, \quad Q = \sum_{k=1}^N X_{Lk} I_k^2 - \sum_{k=1}^M X_{Ck} I_k^2.$$

P - активная мощность величина положительная. Q - реактивная мощность может быть как положительной так и отрицательной величиной. Если преобладает индуктивная составляющая $X_L > X_C$ то $Q > 0$. Если $X_C > X_L$ то $Q < 0$.

Линейные цепи переменного тока

Цепи с индуктивно связанными элементами

Последовательное соединение катушек с индуктивной связью.

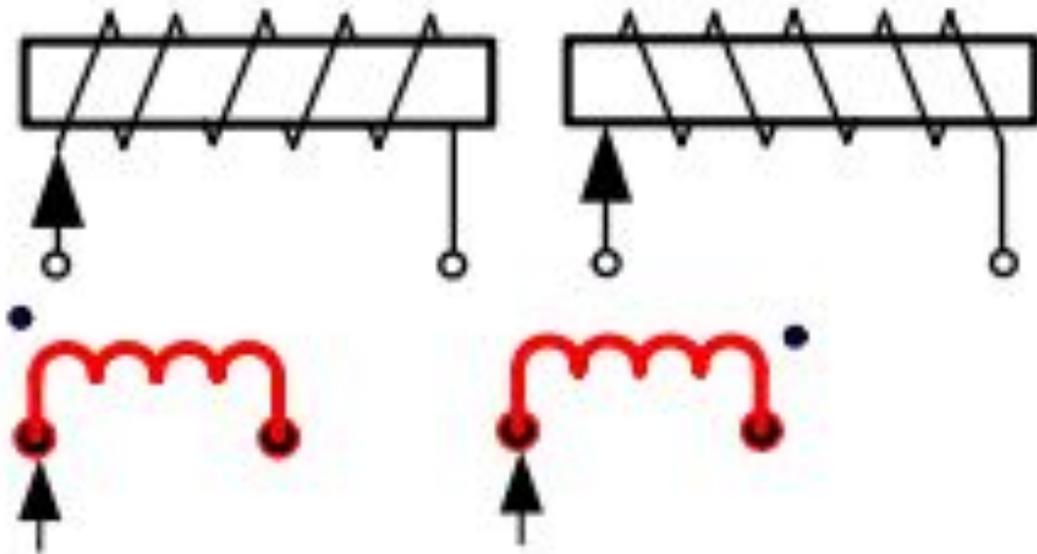


Рис. 2.19. Условное обозначение катушек

Рассмотрим цепь с взаимной индуктивностью. По катушкам протекают токи, направленные в одну сторону. Но провода намотаны в разные стороны. Условно на рисунке этот факт можно обозначить звездочками или точками. При этом токи создают магнитное поле вокруг проводов. В одном случае они складываются, а в другом они

вычитаются. Тогда можно записать уравнение Кирхгофа для последовательного контура, учитывая не идеальность катушек.

Линейные цепи переменного тока

При согласном соединении, когда токи входят в катушки с одной стороны

$$L_1 \frac{di}{dt} + iR_1 + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + iR_2 + M \frac{di}{dt} = e(t).$$

При встречном соединении, когда токи входят в катушки с разных сторон.

$$L_1 \frac{di}{dt} + iR_1 - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + iR_2 - M \frac{di}{dt} = e(t)$$

В символической форме это можно записать так.

$$(R_1 + jX_{L1} + jX_M) \underline{I} + (R_2 + jX_{L2} + jX_M) \underline{I} = \underline{E};$$

$$(R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} + 2X_M)) \underline{I} = \underline{E}.$$

При согласном соединении, когда токи входят в катушки с одной стороны.

$$(R_1 + jX_{L1} - jX_M) \underline{I} + (R_2 + jX_{L2} - jX_M) \underline{I} = \underline{E};$$

$$(R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - 2X_M)) \underline{I} = \underline{E}.$$

При встречном соединении, когда токи входят в катушки с одной стороны. Здесь $X_M = \omega M$, $X_L = \omega L$.

Линейные цепи переменного тока (практика)

При встречном соединении, когда токи входят в катушки с одной стороны. Здесь $X_M = \omega M$, $X_L = \omega L$.

Если ввести обозначения для сопротивлений согласного \underline{Z}_C и встречного \underline{Z}_B соответственно

$$\underline{Z}_C = R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} + 2X_M), \quad \underline{Z}_B = R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - 2X_M),$$

то можно найти взаимную индукцию

$$|\underline{Z}_C - \underline{Z}_B| = 2X_M + 2X_M = 4X_M = 4M\omega \rightarrow M = \frac{|\underline{Z}_C - \underline{Z}_B|}{4\omega}$$

Как экспериментально определить какой тип соединения в цепи, согласное и встречное соединение индуктивностей? Ответ – через токи при фиксированном входном напряжении в цепи. При согласном соединении сопротивление больше \underline{Z}_C – ток меньше. При встречном соединении сопротивление больше \underline{Z}_B – ток больше.

Линейные цепи переменного тока

Построение диаграммы при встречном и согласном включении индуктивностей с магнитной связью

1. По оси x в масштабе тока $M_I[A/cm]$ откладываем значение тока в цепи I . Затем, относительно тока строим топографическую диаграмму напряжений. Напряжение откладываем в масштабе напряжения $M_U[B/cm]$. Напряжение U_{R1} совпадает по фазе с током I .

Напряжение U_{L1} опережает ток на 90 градусов. Затем напряжение взаимной индукции U_M опережает ток на 90 градусов, потому что мы имеем согласное включение, при этом взаимные потоки складываются. Далее откладываем напряжение U_{R2} на сопротивлении R_2 совпадающее по фазе с током I . Затем откладываем напряжение U_{L2} опережающее ток на 90 градусов. Далее откладываем напряжение взаимной индуктивности U_M , опережающее ток на 90 градусов.

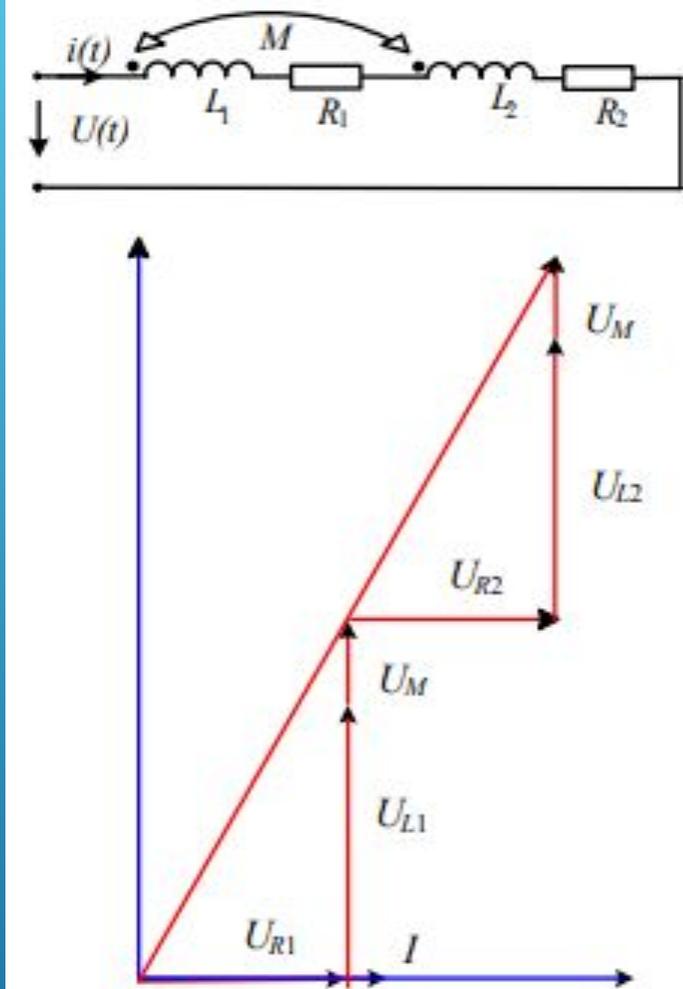


Рис. 2.20

Линейные цепи переменного тока

2. По оси x в масштабе тока $M_I [A/cm]$ откладываем значение тока в цепи I . Затем, относительно тока строим топографическую диаграмму напряжений. Напряжение откладываем в масштабе напряжения $M_U [B/cm]$. Напряжение U_{R1} совпадает по фазе с током I . Напряжение U_{L1} опережает ток на 90 градусов. Затем напряжение взаимной индукции U_M отстает от тока на 90 градусов, потому что мы имеем встречное включение, при этом взаимные потоки вычитаются. Далее откладываем напряжение U_{R2} на сопротивлении R_2 совпадающее по фазе с током I . Затем откладываем напряжение U_{L2} опережающее ток на 90 градусов. И наконец, откладываем напряжение взаимной индуктивности U_M , отстающее от тока на 90 градусов.

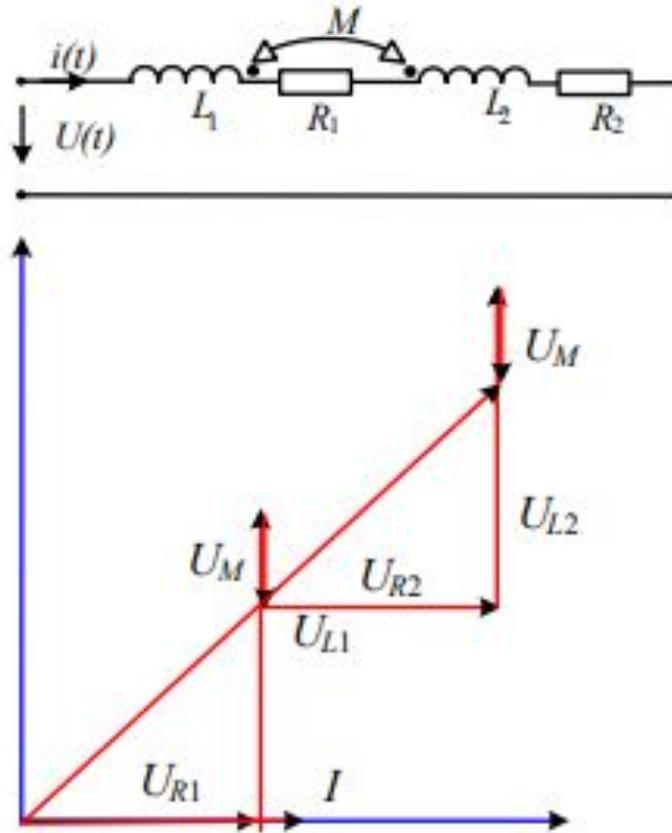


Рис. 2.21

напряжений. Напряжение откладываем в масштабе напряжения $M_U [B/cm]$. Напряжение U_{R1} совпадает по фазе с током I . Напряжение U_{L1} опережает ток на 90 градусов. Затем напряжение взаимной индукции U_M отстает от тока на 90 градусов, потому что мы имеем встречное включение, при этом взаимные потоки вычитаются. Далее откладываем напряжение U_{R2} на сопротивлении R_2 совпадающее по фазе с током I . Затем откладываем напряжение U_{L2} опережающее ток на 90 градусов. И наконец, откладываем напряжение взаимной индуктивности U_M , отстающее от тока на 90 градусов.

Линейные цепи переменного тока (практика)

Расчет цепи с магнитно-связанными индуктивностями

Рассмотрим цепь с магнитно-связанными катушками индуктивности. Данные цепи таковы:

$$e(t) = 40\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}, \quad f = 50 \text{ Гц}, \quad R = 20 \text{ Ом},$$

$$M = 0,1 \text{ Гн}, \quad L_1 = 0,2 \text{ Гн}, \quad L_2 = 0,15 \text{ Гн},$$

$$C = 60 \cdot 10^{-6} \text{ мкФ}.$$

Определим величины X_{L1} , X_{L2} , X_M , X_C , \underline{E}

$$X_M = \omega M = 31,416 \text{ Ом}, \quad X_{L1} = \omega L_1 = 62,832 \text{ Ом},$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 47,124 \text{ Ом}, \quad X_C = 53,052 \text{ Ом}, \quad \underline{E} = 40e^{j45^\circ} \text{ В}.$$

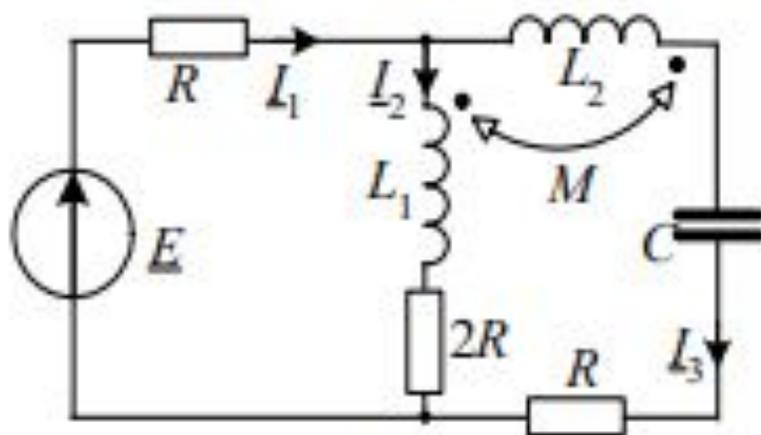


Рис. 2.22

Запишем законы Кирхгофа, с помощью которых определяются токи и напряжения в цепи. Запишем эти уравнения для мгновенных значений токов и напряжений, а затем перепишем их для комплексных - действующих значений.

Линейные цепи переменного тока (практика)

В соответствии с представленной схемой имеем.

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0;$$

$$i_1 R + L_1 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_3}{dt} + i_2 2R = e(t);$$

$$L_2 \frac{di_3}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int i_3 dt + i_3 R - i_2 2R - L_1 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt} = 0.$$

Перепишем это уравнение в символической форме:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0;$$

$$\underline{I}_1 R + jX_{L1} \underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_3 + \underline{I}_2 2R = \underline{E};$$

$$jX_{L2} \underline{I}_3 - jX_M \underline{I}_2 - jX_C \underline{I}_3 + \underline{I}_3 R - \underline{I}_2 2R - jX_{L1} \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_3 = 0.$$

Линейные цепи переменного тока (практика)

Приведем подобные члены и упорядочим в матричном виде:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0;$$

$$\underline{I}_1 R + (2R + jX_{L1})\underline{I}_2 - jX_M \underline{I}_3 = \underline{E};$$

$$(-2R - jX_{L1} - jX_M)\underline{I}_2 + (R + jX_{L2} + jX_M - jX_C)\underline{I}_3 = 0.$$

Теперь можно записать матричное уравнение

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R & 2R + jX_{L1} & -jX_M \\ 0 & -2R - j(X_{L1} + X_M) & R + j(X_{L2} + X_M - X_C) \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поставим данные и получим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 20 & 40 + 62,832j & -31,416j \\ 0 & -40 - 94,248j & 20 + 25,488j \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 28,284 + 28,284j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Линейные цепи переменного тока (практика)

$$\mathbf{AI} = \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0,509 + 0,996j \\ 0,169 + 0,211j \\ 0,34 + 0,784j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,118e^{j62,921} \\ 0,271e^{j51,416} \\ 0,855e^{j66,539} \end{pmatrix}.$$

По полученным результатам запишем мгновенные значения токов в ветвях

$$i_1(t) = 1,11\sqrt{2} \sin(\omega t + 62,921)\text{A}, \quad i_2(t) = 0,271\sqrt{2} \sin(\omega t + 51,416)\text{A},$$

$$i_3(t) = 0,855\sqrt{2} \sin(\omega t + 66,539)\text{A}.$$

Использование других методов расчета таких как метод узловых потенциалов, метод контурных токов затрудняется из-за наличия индуктивной связи, поэтому исходную схему упрощают, производя развязку индуктивной связи.

Линейные цепи переменного тока (практика)

Построение векторной диаграммы

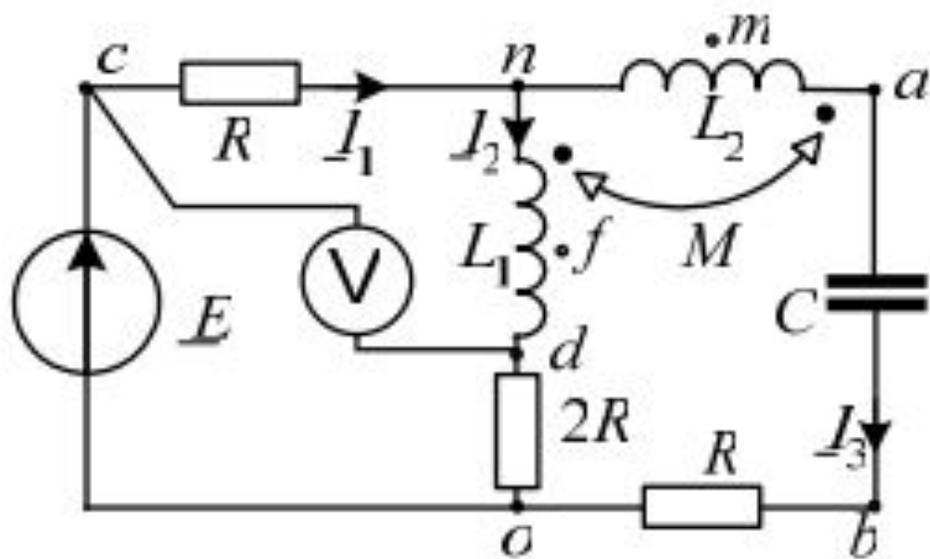


Рис. 2.26

$$\underline{E} = 40e^{j45^\circ} = 28,28 + j28,28;$$

$$U_{R1} = I_1 R = 22,369B;$$

$$U_{L1} = I_2 X_{L1} = 17B;$$

$$U_{R2} = I_2 2R = 10,822B;$$

$$U_{M2} = I_3 X_M = 26,861B;$$

$$U_{R3} = I_3 R = 17,1B;$$

$$U_C = I_3 X_C = 45,36B;$$

$$U_{R2} = I_2 2R = 10,822B;$$

$$U_{M2} = I_3 X_M = 26,861B;$$

$$U_{L2} = I_3 X_{L2} = 40,292B;$$

$$U_{M1} = I_2 X_M = 8,5B.$$

Линейные цепи переменного тока (практика)

Определим показания вольтметра:

$$V = |\underline{I}_1 R + \underline{I}_2 jX_{L1} - \underline{I}_3 jX_M| \text{ или}$$

$$V = |\underline{E} - \underline{I}_2 2R| = |28.28 + j28.28 - (0,169 + j0,211) 40| = 29.27\text{В}$$

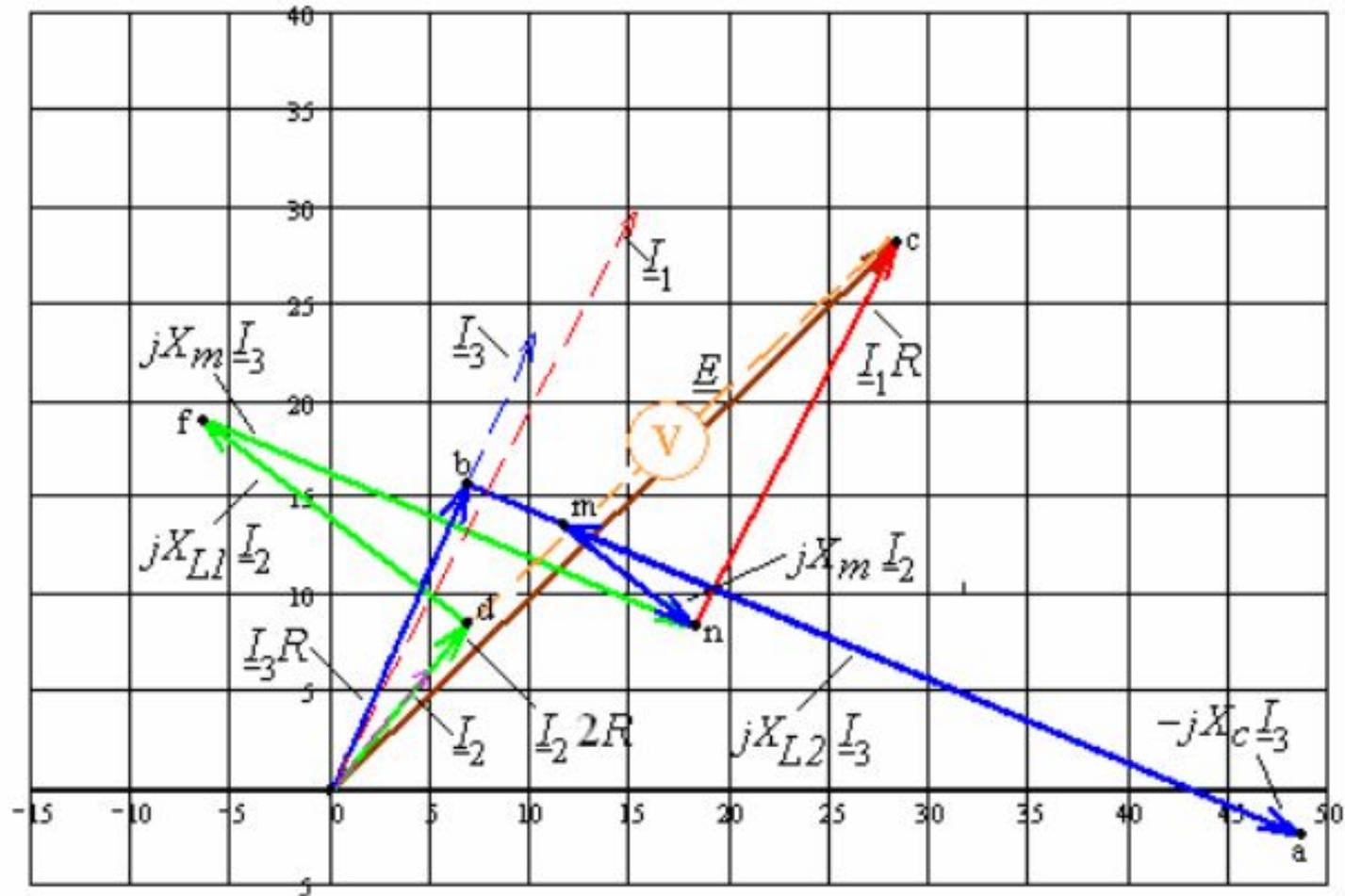


Рис. 2.27

Линейные цепи переменного тока (практика)

Мощность в цепи переменного тока с взаимной индуктивностью

Полная мощность, как и прежде, определяется выражением

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^N \pm \underline{E}_k \underline{I}_k^* = P + jQ, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

P - активная мощность, Q - реактивная мощность.

Потребляемая активная и реактивная мощности определяются соотношениями соответственно:

$$P = \sum_{k=1}^N R_k I_k^2, \quad Q = \sum_{k=1}^N X_{Lk} I_k^2 - \sum_{k=1}^M X_{Ck} I_k^2 \pm 2I_1 I_1 X_M \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Здесь токи $I_1 e^{j\varphi_1}$, $I_2 e^{j\varphi_2}$ ветвей, в которых находится индуктивности. Знак плюс выбирается, когда в цепи согласное включение катушек. В противном случае выбирается знак минус.

Ниже приводится электрическая схема, собранная в программно-интегрированной среде ElectronicsWorkbench с развязкой индуктивной связи. При развязке индуктивной связи получается отрицательная индуктивность. В место отрицательной индуктивности можно поставить эквивалентную емкость, которая определяется выражением

$$C = 1 / \omega^2 M.$$

Линейные цепи переменного тока

Трансформатор

Трансформатор состоит из двух или нескольких индуктивно связанных катушек. Рассмотрим простой двухобмоточный трансформатор.

Двухобмоточный трансформатор состоит из двух обмоток – первичной и вторичной. К первичной обмотке подводится питание а ко вторичной подсоединяется нагрузка–потребитель энергии. Токи и напряжения, относящиеся к первичной и вторичной обмоткам называются первичными и вторичными соответственно.

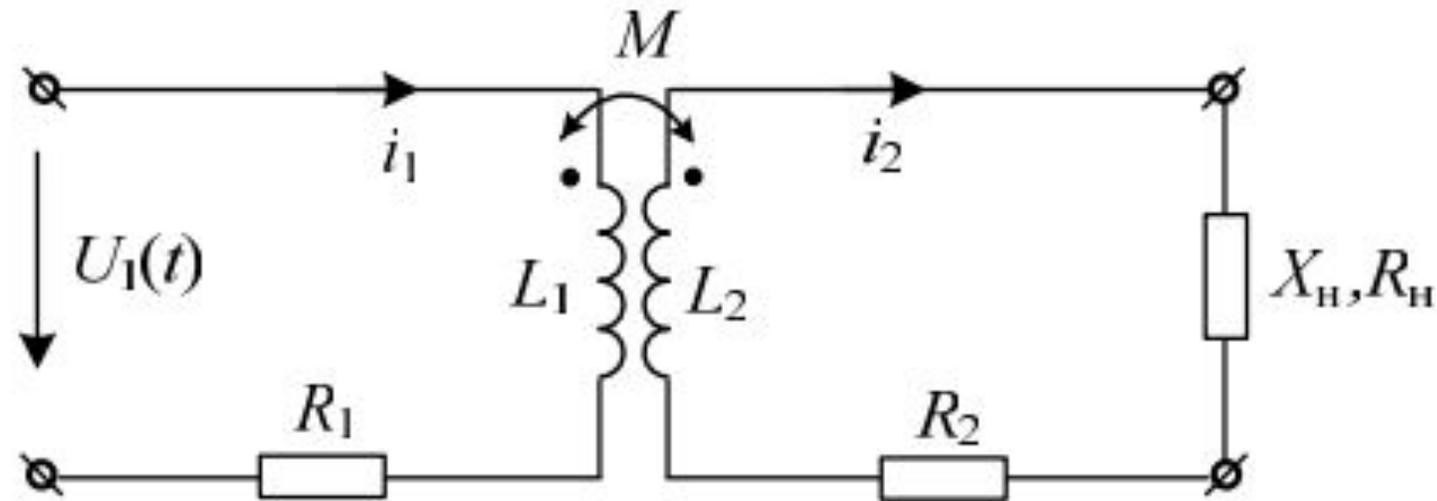


Рис. 2.29. Трансформатор

Линейные цепи переменного тока

Запишем второй закон Кирхгофа для трансформатора, введя обозначения элементов первичной и вторичной обмоток:

$$X_1 = X_{L2}, \quad R_{22} = R_2 + R_H, \quad X_{22} = X_{L2} + X_H;$$

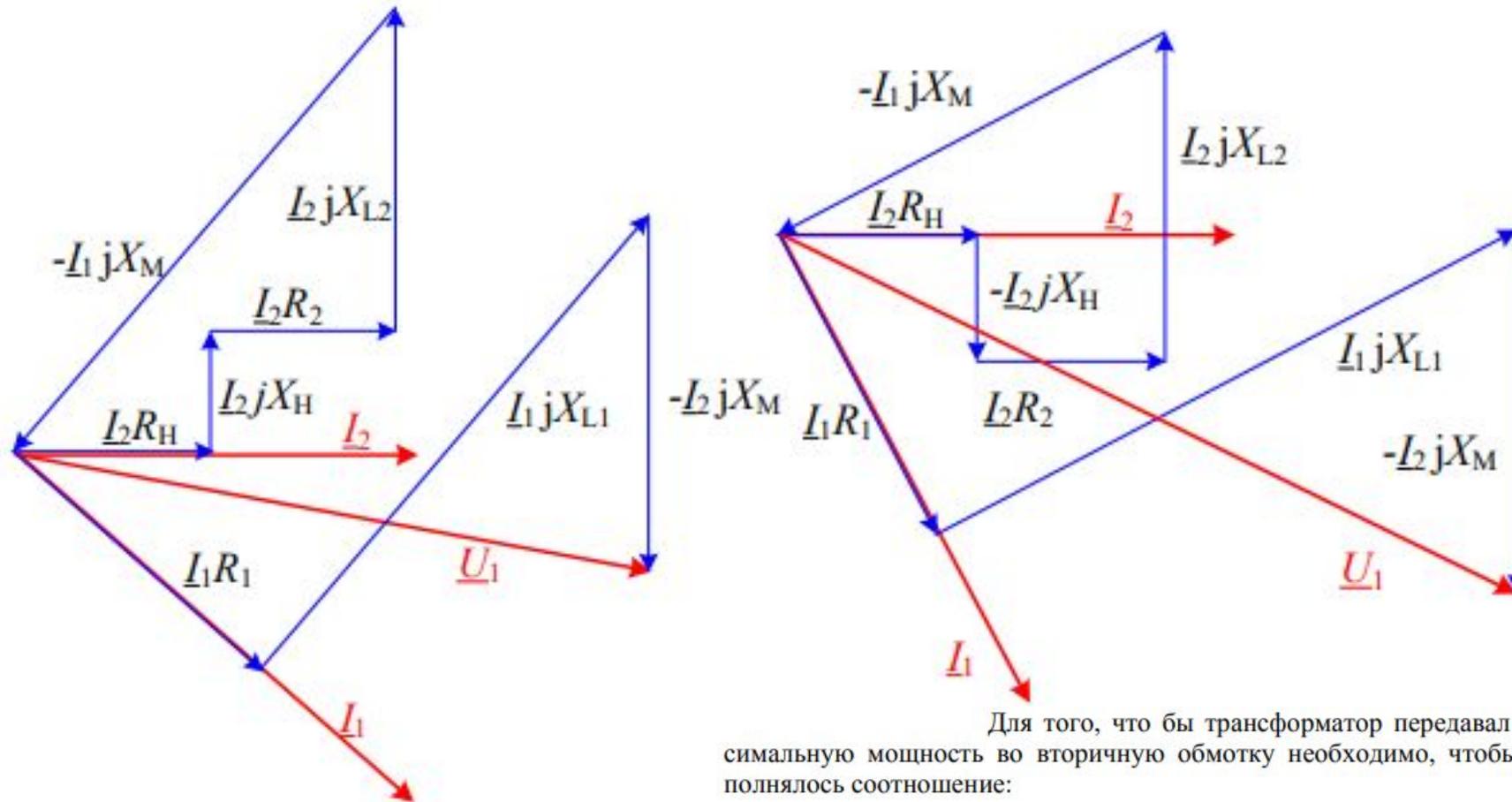
$$\begin{cases} \underline{I}_1 (R_1 + jX_1) - \underline{I}_2 jX_M = \underline{E}; \\ -\underline{I}_1 jX_M + \underline{I}_2 (R_{22} + jX_{22}) = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Умножим первое уравнение на $(R_{22} + jX_{22})$, а второе уравнение на jX_M и затем сложим. В результате получим выражение тока первичной обмотки через входное напряжение и сопротивления, вносимые вторичной обмоткой $R_{вн}$, $X_{вн}$:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{E}}{R_1 + \frac{R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_M^2 + j \left(X_1 - \frac{X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_M^2 \right)} = \\ &= \frac{\underline{E}}{R_1 + R_{вн} + j(X_1 + X_{вн})}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\text{где } R_{вн} = \frac{R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_M^2, \quad X_{вн} = -\frac{X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_M^2.$$

Линейные цепи переменного тока



Для того, что бы трансформатор передавал максимальную мощность во вторичную обмотку необходимо, чтобы выполнялось соотношение:

$$R_1 = \frac{R_{22}}{R_{22} + X_{22}^2} X_M^2, \quad X_1 = \frac{X_{22}}{R_{22} + X_{22}^2} X_M^2. \quad (52)$$

а

б

Рис. 2.30. Векторная диаграмма напряжений трансформатора при нагрузках:

а) $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$ и б) $\underline{Z}_H = R_H - jX_H$

Линейные цепи переменного тока

Что бы добиться выполнения соотношения (52) в первичную и во вторичную цепи трансформатора включаются переменные емкости, что позволяет варьировать реактивные составляющие сопротивлений первичной и вторичной цепях, рис. 2.31.

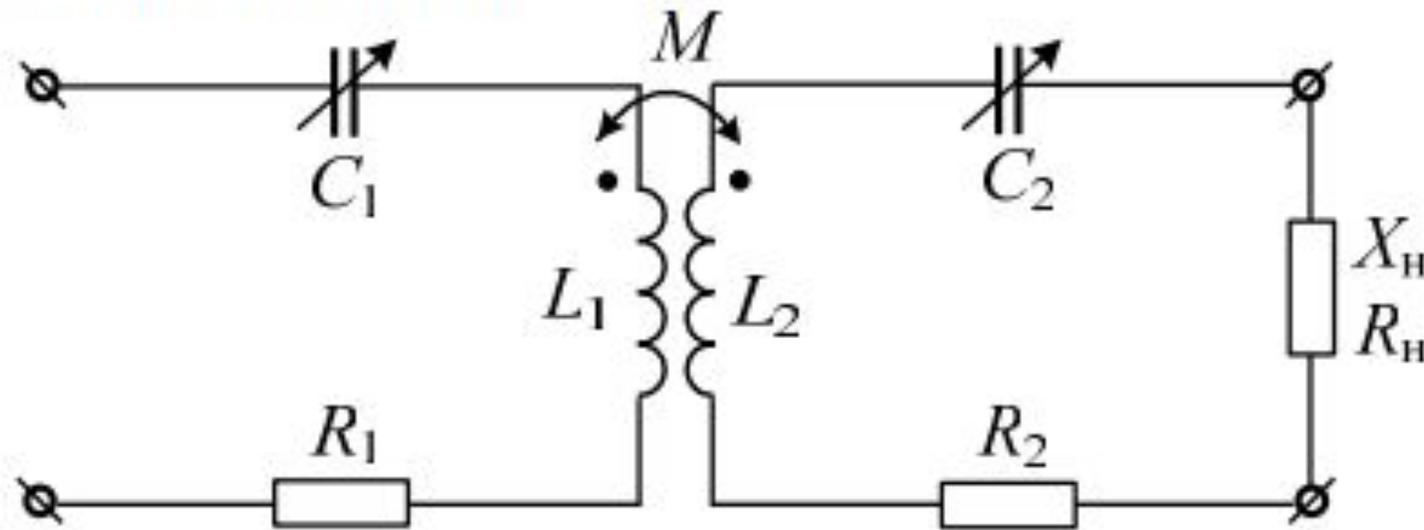


Рис. 2.31.

Для приведенной схемы реактивные составляющие будут определяться выражениями:

$$X_1 = X_M - 1/\omega C_1, \quad X_{22} = X_M + X_H - 1/\omega C_2.$$

Линейные цепи переменного тока

Резонанс напряжений

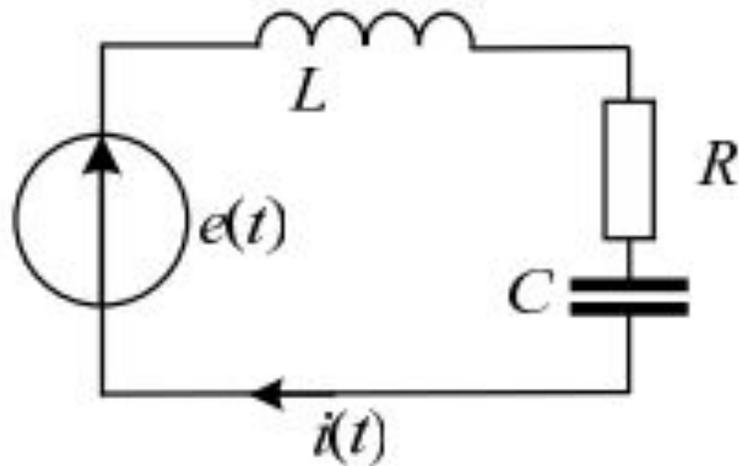


Рис. 2.32

Рассмотрим схему, в которой последовательно соединены индуктивность емкость сопротивление и источник напряжения. Индуктивное и емкостное сопротивления зависят от частоты $X_L(\omega) = \omega L$, $X_C(\omega) = 1/\omega C$. С увеличением частоты индуктивное сопротивление $X_L(\omega) = \omega L$ увеличивается, и ток в цепи с индуктивностью умень-

шается. При уменьшении частоты емкостное сопротивление уменьшается, и ток в цепи с емкостью увеличивается. Графическая зависимость индуктивного сопротивления $X_L(\omega)$ от частоты приведена на рисунке, она линейна.

Линейные цепи переменного тока

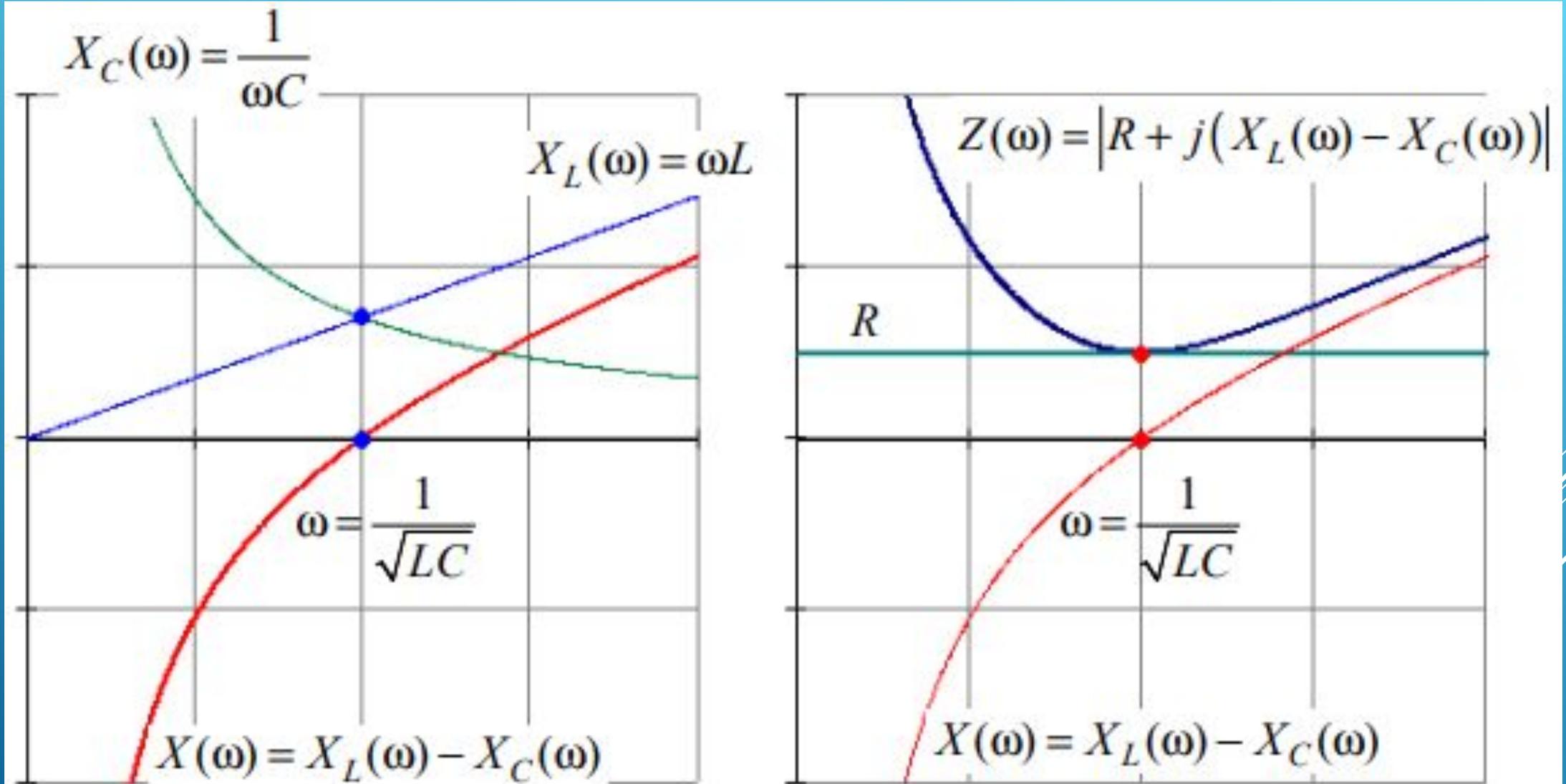


Рис. 2.33

Линейные цепи переменного тока

В цепи с последовательно соединенными элементами RLC сопротивление записывается в виде:

$$Z(\omega) = R + jX_L(\omega) - jX_C(\omega)$$

Будем изменять частоту входного напряжения в цепи. При изменении частоты будут изменяться сопротивления реактивных элементов. При увеличении частоты уменьшается емкостное сопротивление и увеличивается индуктивное сопротивление, и наоборот. При постепенном изменении частоты может наступить такой момент, когда емкостное и индуктивное сопротивления сравняются, и будет выполняться равенство

$$X_L(\omega) = X_C(\omega), \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega_0 = \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Полученная частота называется частотой свободных колебаний. При такой частоте возникают свободные колебания в цепи. Колебания электрической цепи не связанные с источником энергии, называются **собственными** или **свободными**.

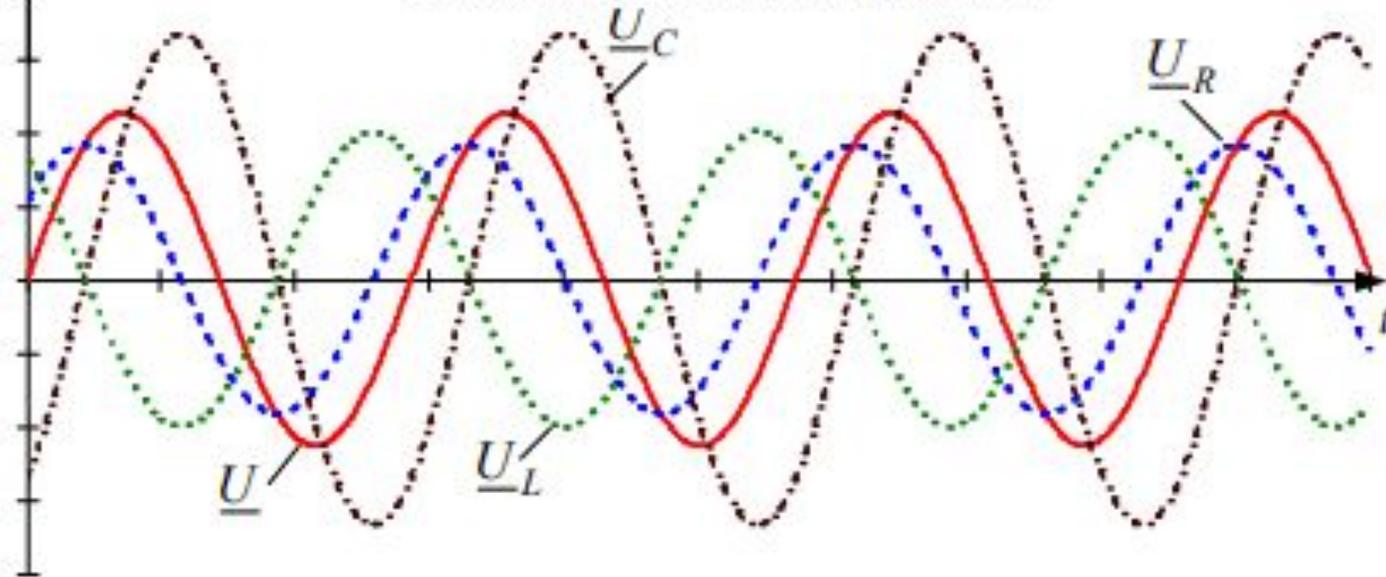
Линейные цепи переменного тока

В нашем случае при рассмотрении последовательной цепи эти колебания возбуждены внешним источником $e(t)$. При резонансной частоте общее сопротивление цепи уменьшается, так как индуктивное сопротивление компенсируется емкостным сопротивлением

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z(\omega) = R + \cancel{jX_L(\omega)} - \cancel{jX_C(\omega)} = R$$

При этом ток в цепи возрастает, Ток и напряжение совпадают по фазе. При дальнейшем увеличении частоты индуктивное сопротивление становится больше емкостного, и реактивное сопротивление становится индуктивным.

Волновая диаграмма напряжений.



Векторная диаграмма

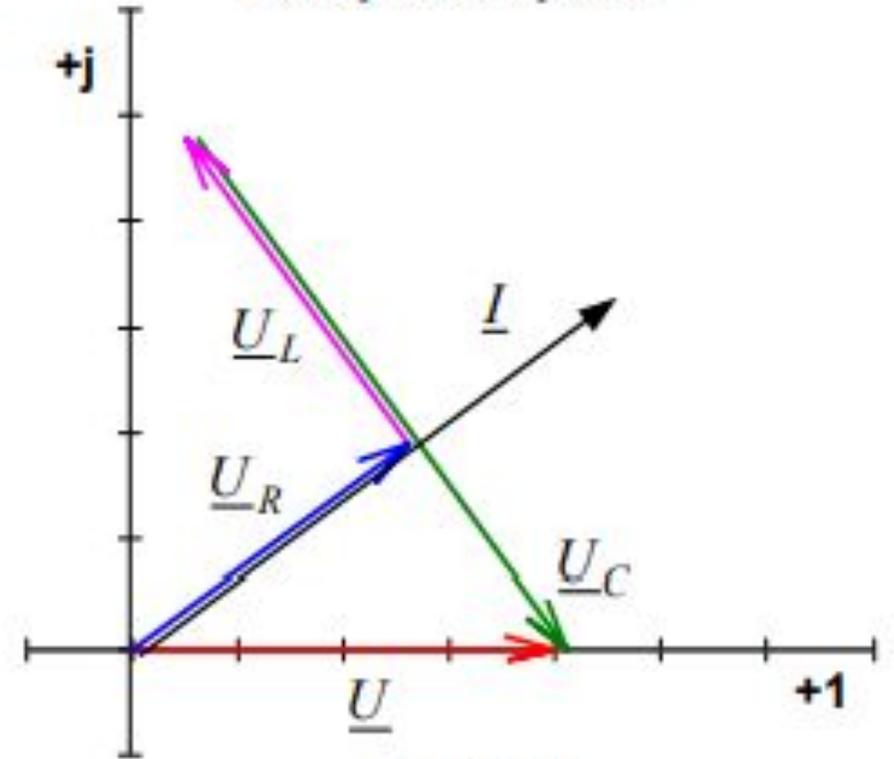


Рис. 2.34

Линейные цепи переменного тока

Режим электрической цепи при последовательном соединении участков с индуктивностью и ёмкостью, характеризующийся равенством индуктивного и ёмкостного сопротивлений, называют резонансом напряжений.

Напряжения на индуктивности и ёмкости при резонансе могут значительно превышать напряжение на входе, которое равно напряжению на активном сопротивлении.

Отметим, что частоты, при которых наблюдаются фазовый и амплитудный резонансы, не совпадают с частотой собственных колебаний контура (они совпадают только в теоретическом случае, когда катушка индуктивности и конденсатор без потерь).

Добротность Q определяется соотношением:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} = \frac{\rho}{R},$$

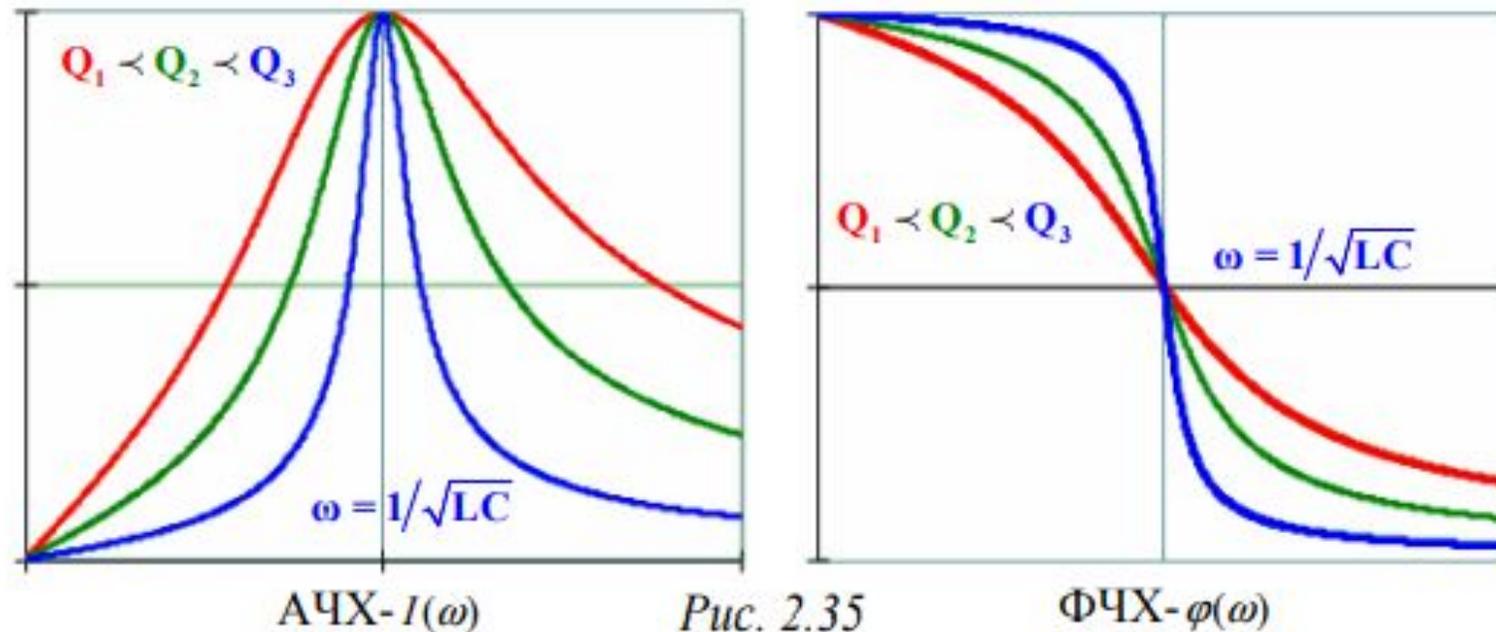
где $\rho = X_C = X_L = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление.

Линейные цепи переменного тока

Добротность Q определяется соотношением: $Q = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} = \frac{\rho}{R}$,

где $\rho = X_C = X_L = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое сопротивление.

Чем выше добротность контура Q (и уже полоса пропускания) тем выше селективность контура (лучше избирательная способность) При резонансе происходит совпадение по фазе входного напряжения $e(t)$ и тока $i(t)$ протекающего в контуре. Характер сопротивления становится чисто активным вследствие совпадения по величине емкостного и индуктивного сопротивлений.



Линейные цепи переменного тока

Ширина АЧХ $I(\omega)$ зависит от добротности. Ширина АЧХ определяется на высоте 0,707 от амплитудного значения (рис. 2.36). Определим граничные частоты

$$I(\omega) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\sqrt{\frac{L}{C}} \right)^2 (\omega\sqrt{LC} - 1/\omega\sqrt{LC})^2}};$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{R} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2 \rightarrow \omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} \mp 1 \right)$$

и полосу пропускания

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Линейные цепи переменного тока (практика)

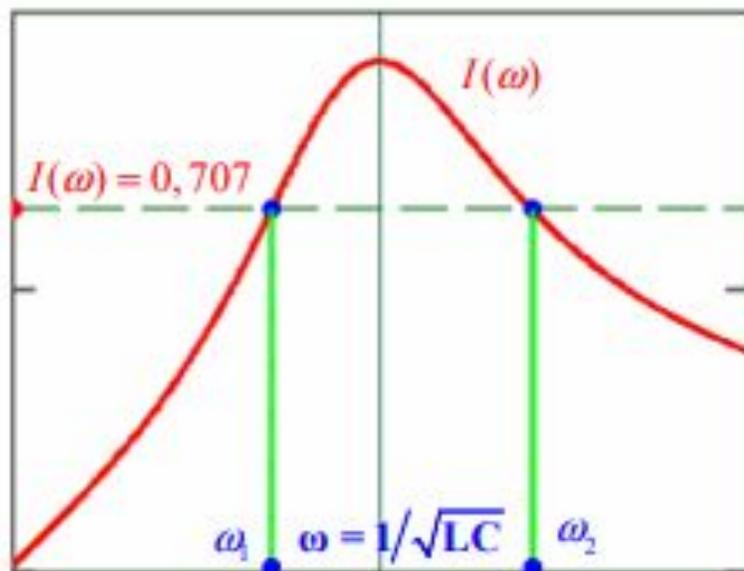


Рис. 2.36

Пример. Рассчитать резонансную частоту для схемы, приведенной на рисунке 2.36 при условии, что даны значения $C = 400 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$, $L = 2 \text{ Гн}$, $R = 20 \text{ Ом}$, $e(t) = 20\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ В}$.
Определить добротность контура, ток, полосу пропускания и граничные частоты.

$$X_L(\omega) = X_C(\omega), \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega_0 = \omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 5,627 \text{ Гц.}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right) = 100 \text{ рад/с}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} + 1 \right) = 125 \text{ рад/с};$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 25 \text{ рад/с.}$$

Полоса пропускания устанавливается на высоте сигнала равного значению $I_m / \sqrt{2} = 0,707 I_m$, I_m — максимальное значение тока.

Переходные процессы

Под переходными процессами понимают процессы перехода от одного установившегося режима работы электрической цепи к другому, чем-либо отличающемуся от предыдущего, например величинами амплитуды, фазы, частоты или значениями параметров схемы.

Коммутация это процесс замыкания и размыкания выключателей. Переходные процессы обычно являются быстропротекающими; длительность их составляет десятые, сотые, а иногда даже миллиардные доли секунд. Сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд.

Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода электрической системы от одного энергетического состояния к другому, то есть это процесс перераспределения энергии между элементами цепи.

Переходные процессы

Рассмотрим переходный процесс в простейшей цепи с источником напряжения, индуктивностью и сопротивлением, соединёнными последовательно.

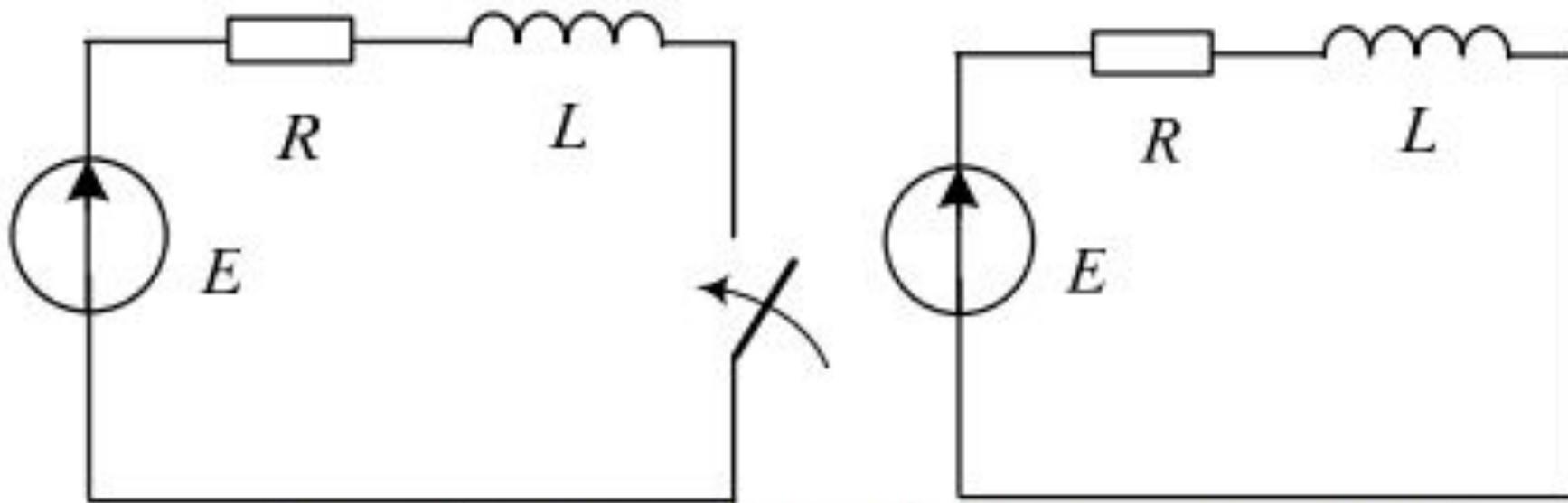


Рис. 4.1. Схема цепи до и после коммутации

Переходные процессы

Запишем последовательность действий для решения задачи на переходный процесс:

1. Записываем решение в виде свободной и принужденной составляющих

$$i(t) = i_{\text{св}}(t) + i_{\text{пр}} = Ae^{pt} + i(\infty) \text{ или } u(t) = u_{\text{св}}(t) + u_{\text{пр}} = ue^{pt} + u(\infty).$$

2. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации $u_{\text{пр}} = u(\infty)$ или $i_{\text{пр}} = i(\infty)$

3. Определяем корень характеристического уравнения p через входное сопротивление $Z(p) = 0$, в схеме после коммутации.

4. Определяем константу интегрирования A из начальных условий. Записываем окончательное решение и строим график.

Переходные процессы (практика)

В качестве примера рассмотрим цепь с конденсатором. Найдём закон изменения напряжения на конденсаторе при его зарядке.

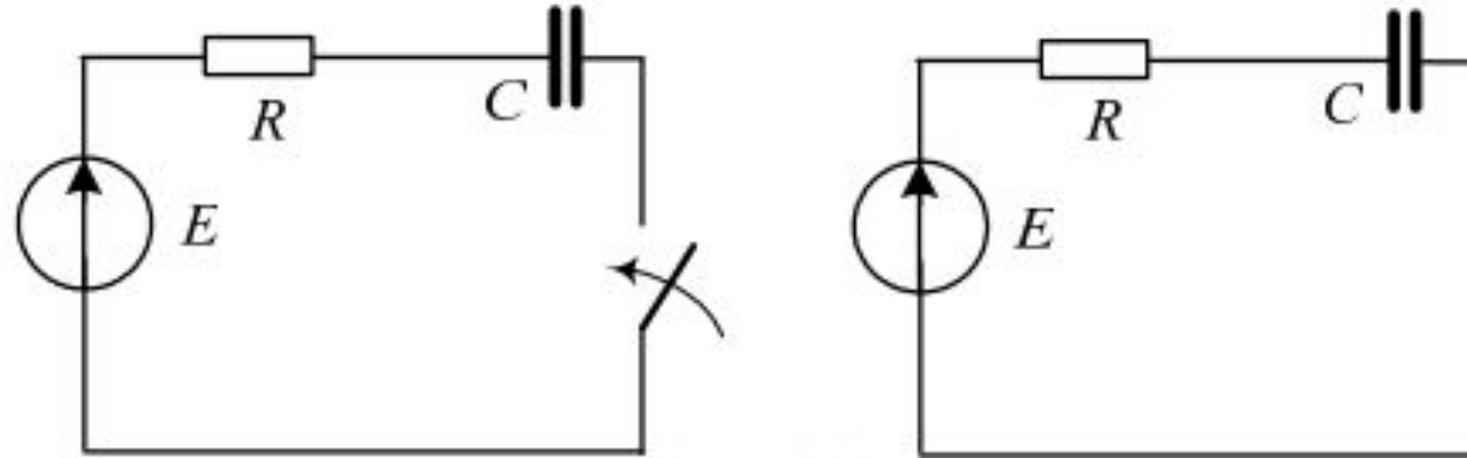


Рис. 4.3

1. Запишем искомое решение в виде двух составляющих, принуждённой и свободной:

$$u_C(t) = u_{\text{св}}(t) + u_{\text{пр}} = Ae^{pt} + u_{\text{пр}}.$$

2. После коммутации при установившемся режиме не будет тока и конденсатор будет заряжен до величины $u(\infty) = u_{\text{пр}} = E$. Следовательно,

$$u_C(t) = u_{\text{св}}(t) + u_{\text{пр}} = Ae^{pt} + E.$$

Переходные процессы (практика)

3. Корень характеристического уравнения находим через входное сопротивление в схеме после коммутации

$$Z(p) = \frac{1}{j\omega C} + R = \frac{1}{pC} + R = 0 \rightarrow p = -\frac{1}{RC}.$$

4. Находим константу интегрирования A из начальных условий. До коммутации ключ был разомкнут, и напряжение на конденсаторе отсутствовало

$$u_C(0) = A + E = 0 \rightarrow A = -E.$$

5. Записываем окончательный результат:

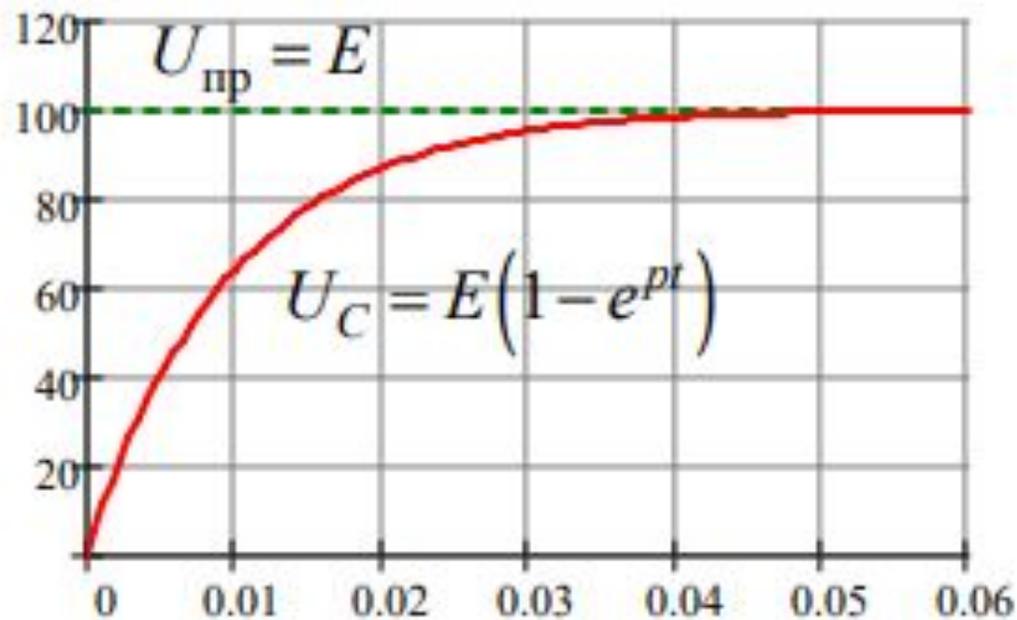
$$u_C(t) = u_{св}(t) + u_{пр} = -Ee^{-\frac{1}{RC}t} + E = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right).$$

Находим ток, через конденсатор, используя выражение $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$,

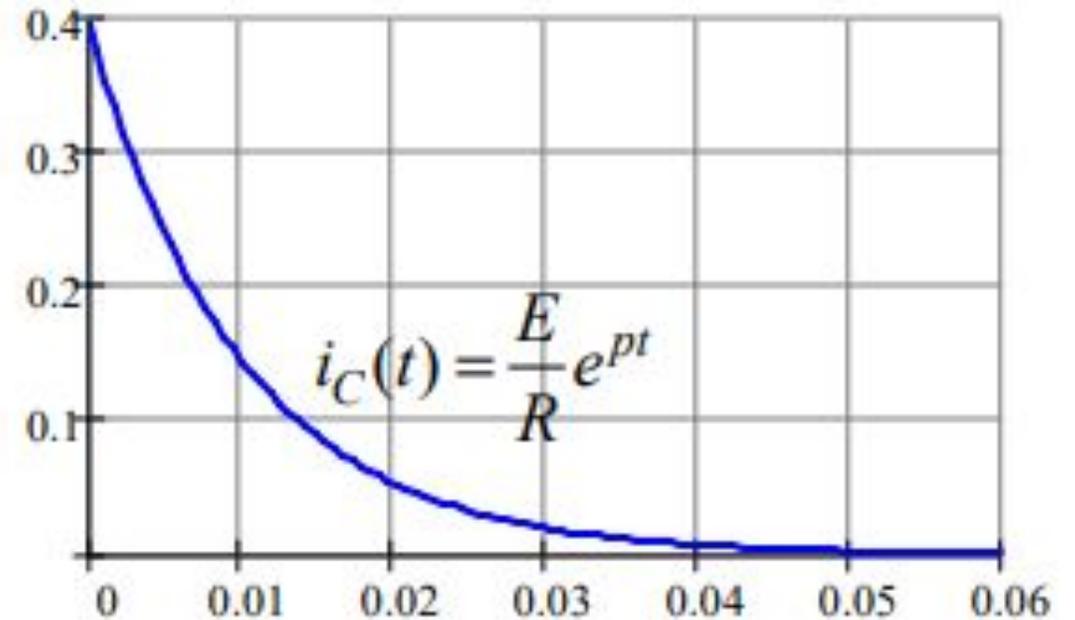
$$i_C(t) = C \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Переходные процессы (практика)

Строим графические зависимости тока и напряжения для конденсатора.



Напряжение на емкости



Ток емкости

Рис. 4.4

Переходные процессы (практика)

Первый закон (правило) коммутации – ток через индуктивность непосредственно до коммутации $i_L(0-)$ равен току через индуктивность после коммутации $i_L(0+)$:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0). \quad (*)$$

Второй закон (правило) коммутации – напряжение на ёмкости непосредственно до коммутации $u_C(0-)$ равно напряжению на ёмкости после коммутации $u_C(0+)$:

$$u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0). \quad (**)$$

Это есть независимые начальные условия. Независимыми они называются потому, что независимо от того до или после коммутации мы их наблюдаем, они всё равно одинаковы и равны, и поэтому знаки $-$ и $+$ в выражениях (*) и (**) опускают. Важно помнить, что **независимые начальные условия определяются в схеме до коммутации**. Таким образом, существует только два **независимых начальных условия – это напряжение на конденсаторе и ток через индуктивность**.

Переходные процессы

Запишем последовательность действий для определения зависимых начальных условий:

1. Определяем независимые начальные условия *в схеме до коммутации* – ток через индуктивность $i_L(0)$ и напряжения на конденсаторе $u_C(0)$.
2. Заменяем *в схеме после коммутации* индуктивность $-L$, источником тока равным значению $i_L(0)$, а емкость $-C$ источником напряжения равным значению $u_C(0)$.

Далее находим интересующие нас зависимые начальные условия.

Теперь можно приступить к решению примеров с зависимыми и независимыми начальными условиями.

Переходные процессы (практика)

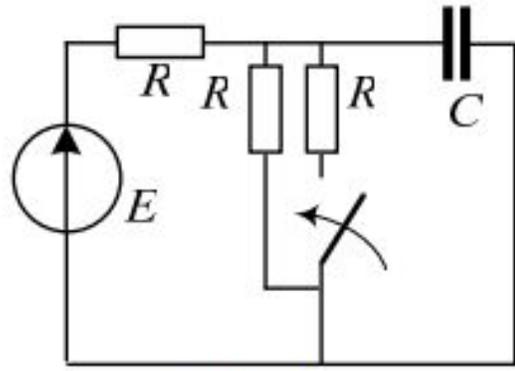


Рис. 4.5

Определяем независимые начальные условия в схеме до коммутации:

$$u_C(0) = \frac{E}{2} = 25\text{В}.$$

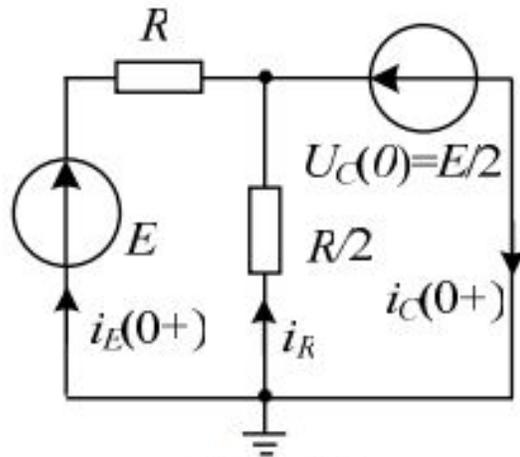


Рис. 4.6

Определяем зависимые начальные условия в схеме после коммутации заменяем при этом ёмкость на источник напряжения:

$$\begin{aligned} i_E(0+) &= \frac{E - u_C(0)}{R} = \frac{E - E/2}{R} = \\ &= \frac{E}{2R} = \frac{50}{20} = 2,5\text{А}. \end{aligned}$$

$$i_C(0+) = i_E(0+) - \frac{u_C(0)}{R/2} = i_E(0+) - \frac{E}{R} = 2,5 - 5 = -2,5\text{А}.$$

Переходные процессы (практика)

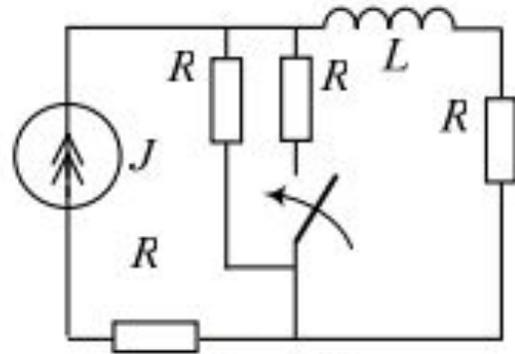


Рис. 4.7

Пример: Определить зависимые $u_J(0+), u_L(0+)$ и независимые $i_L(0)$ начальные условия для заданной схемы:

$$J = 2 \text{ А}, R = 10 \text{ Ом}, L = 0,1 \text{ Гн}.$$

Определяем независимые начальные условия в схеме до коммутации:

$$i_L(0) = \frac{J}{2} = 1 \text{ А}.$$

Определяем зависимые начальные условия в схеме после коммутации заменяем при этом индуктивность на источник тока равный $i_L(0) = J/2 = 1 \text{ А}$.

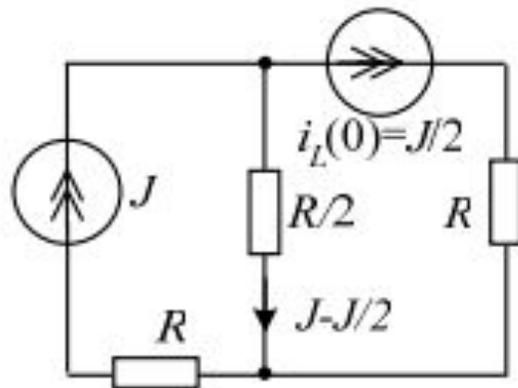


Рис. 4.8

$$u_J(0+) = JR + \frac{J}{2} \frac{R}{2} = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 25 \text{ В}$$

$$u_L(0+) = \frac{J}{2} R - \frac{J}{2} \frac{R}{2} = 1 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 5 \text{ В}$$

Переходные процессы

Переходные процессы в цепи второго порядка

Рассмотрим цепь второго порядка представленную на рис. 4.37 с параметрами: $E = 50\text{В}$, $R = 10\text{Ом}$, $L = 0.1\text{Гн}$, $C = 40\text{мкФ}$.

Записываем уравнения по второму закону Кирхгофа, в результате получаем систему дифференциальных уравнений:

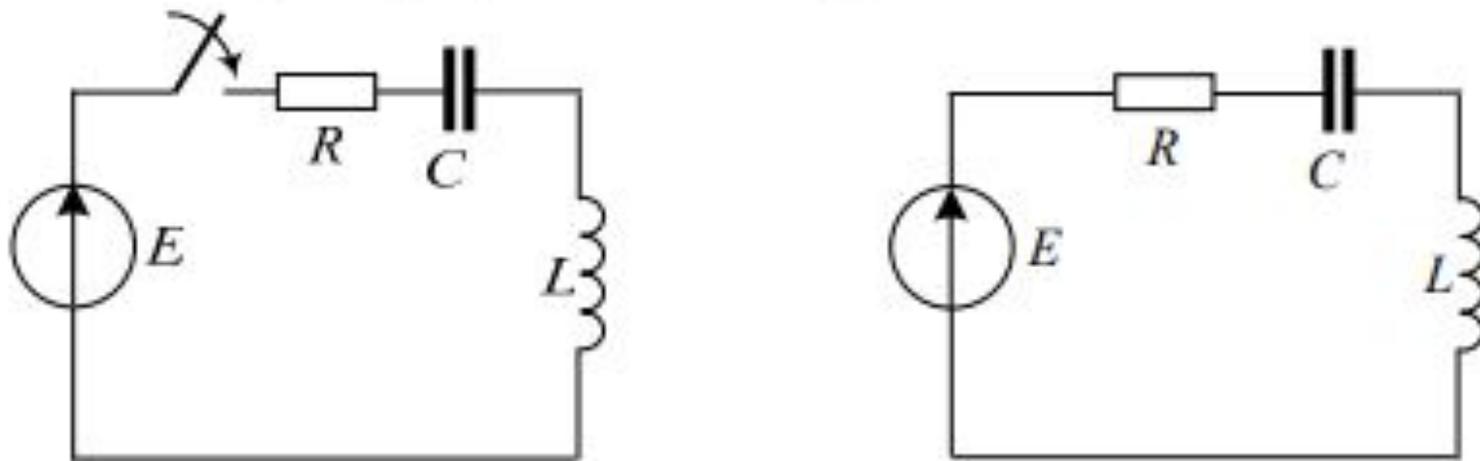


Рис. 4.37

$$u_L + u_C + i \cdot R = E \rightarrow L \frac{di}{dt} + R \cdot i + u_C = E, \quad i = C \frac{du}{dt};$$

$$LC \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \cdot \frac{du}{dt} + u = E.$$

(1)

Переходные процессы

Решение данного уравнения будем искать в виде суммы двух составляющих:

$$u_C(t) = u_{св} + u_{пр} = A_1 \cdot \exp(p_1 t) + A_2 \cdot \exp(p_2 t) + E. \quad (2)$$

Первое слагаемое это $u_{св} = A_1 \cdot \exp(p_1 t) + A_2 \cdot \exp(p_2 t)$ свободная составляющая. Она зависит только от параметров схемы, а также от начальных и конечных запасов энергии. Эта составляющая решения не зависит от формы воздействующего напряжения.

Второе слагаемое это $u_{пр} = u_C(\infty)$ принуждённая составляющая. Она зависит от внешнего воздействия и имеет форму этого воздействия. Очевидно, что в нашем случае она определяется как $u_{пр} = u_C(\infty) = E$.

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий, отражающих невозможность мгновенного изменения начальных запасов энергии в конденсаторе и в катушке.

Переходные процессы

Для определения констант интегрирования используем независимые начальные условия $u_C(0) = 0$, $i_L(0) = 0$.

$$\begin{cases} u_C(0) = 0 = A_1 + A_2 + E; \\ i_L(0) = i_C(0+) = C \frac{du}{dt} = 0 = C(A_1 p_1 + A_2 p_2). \end{cases} \quad (3)$$

Откуда следует, что

$$A_1 = \frac{-p_2 E}{p_2 - p_1}, \quad A_2 = \frac{p_1 E}{p_2 - p_1}. \quad (4)$$

Теперь можно записать окончательное решение

$$u_C(t) = \frac{-p_2 E}{p_2 - p_1} \cdot \exp(p_1 t) + \frac{p_1 E}{p_2 - p_1} \cdot \exp(p_2 t) + E = \frac{E}{p_2 - p_1} \left(-p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t} \right) + E.$$

Переходные процессы

Определим корни характеристического уравнения входящие в решение $u_C(t)$ p_1, p_2 через входное сопротивление схемы.

$$pL + \frac{1}{Cp} + R = \frac{CL \cdot p^2 + RC \cdot p + 1}{Cp} = 0 \rightarrow CL \cdot p^2 + RC \cdot p + 1 = 0. \quad (5)$$

В результате решения уравнения получаются корни:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2CL} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \quad (6)$$
$$= -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Где $\delta = \frac{R}{2L}$ – показатель затухания контура, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – угловая частота

та незатухающих колебаний, при выполнении условия $\omega_0^2 > \delta^2$ имеем

$$j\omega_{св} = j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Здесь $\omega_{св}$ – частота свободных колебаний,

Переходные процессы

Корни уравнения определяются параметрами цепи и могут принимать следующие возможные значения

- Дискриминант равен нулю. Кони вещественные, отрицательные и кратные. Критический режим $p_{1,2} = -\delta = -\frac{R}{2L}$

$$u_C(t) = E(1 + \delta t)e^{-\delta t} + E.$$

- Дискриминант положительный. Корни вещественные отрицательные и неравные. Аперiodический режим $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$;

$$u_C(t) = \frac{E}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t} \right) + E.$$

Переходные процессы

- Дискриминант отрицательный. Корни комплексно-сопряжённые, с отрицательной вещественной частью. Колебательный режим

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_{св}.$$

$$u_C(t) = Ee^{-\delta t} \left(\cos(\omega_{св}t) + \frac{\delta}{\omega_{св}} \sin(\omega_{св}t) \right) + E.$$

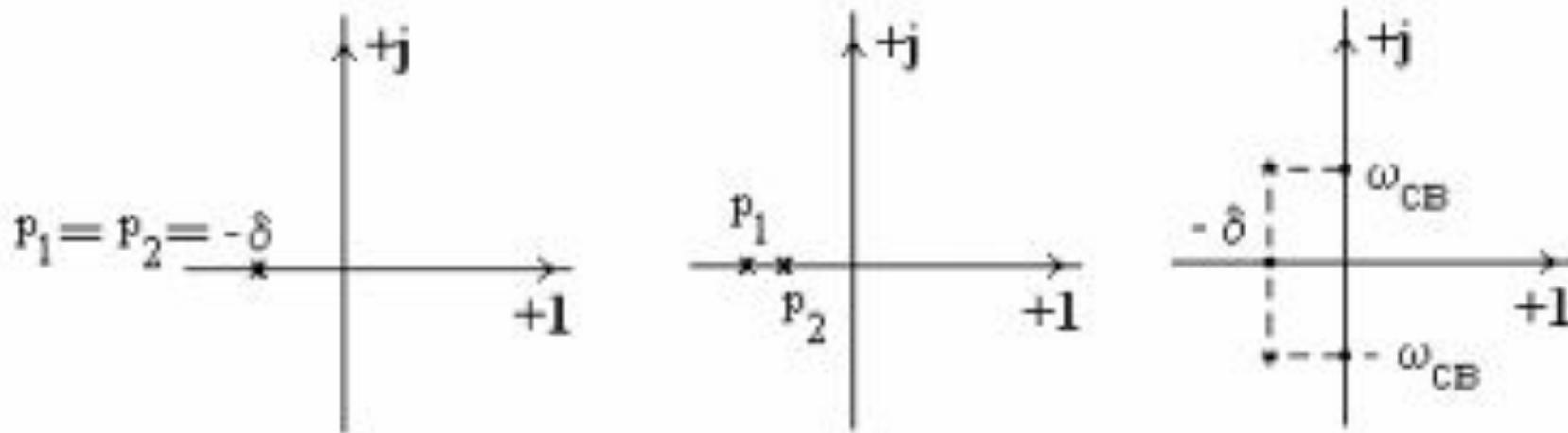


Рис. 4.38. Расположение корней на комплексной плоскости.

Переходные процессы

Операторный метод расчёта переходных процессов

Любой функции можно сопоставить её преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (7)$$

здесь $F(p)$ – изображение, $f(t)$ – оригинал. Выражение (7) записывают ещё и в операторной форме $F(p) = L[f(t)]$.

Приведём изображение нескольких часто встречающихся функций. Определим изображение константы – $f(t) = A$ (*const*):

$$F(p) = A \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

Найдем изображение экспоненциальной функции – $f(t) = e^{\alpha t}$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Переходные процессы

Изображение экспоненциальной функции поможет нам найти изображения синусоидальной косинусной функций – $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$. Для этого запишем эти функции через формулу Эйлера. Далее осуществляем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{p + j\omega - p + j\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \\ \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p + j\omega + p - j\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \end{cases}$$

Определим изображение производной $\frac{df(t)}{dt}$ функции $f(t)$, имеющей изображение $F(p)$

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

Переходные процессы

И, наконец, определим изображение интегрального выражения $\int_0^t f(t) dt$

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(t') dt' \right) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(t') dt' \right) d(e^{-pt}) = \frac{e^{-pt} \int_0^t f(t') dt'}{p} \Big|_0^{\infty} + \frac{\int_0^t f(t') e^{-pt} dt}{p} = \frac{F(p)}{p}$$

Таблица преобразований Лапласа

$f(t)$ -оригинал	$F(p)$ -изображение
1	$1/p$
$e^{\alpha t}$	$1/(p - \alpha)$
$e^{-\alpha t}$	$1/(p + \alpha)$
$\sin(\omega t)$	$\omega / (p^2 - \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p / (p^2 + \omega^2)$
$df(t)/dt$	$-f(0) + pF(p)$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$

Вернёмся теперь к переходным процессам.

Итак, мы будем сопоставлять каждой функции его изображение. Например $i(t) \rightarrow I(p)$, $u(t) \rightarrow U(p)$. С учётом полученной таблицы можно сопоставить каждому элементу его изображение:

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow L(pI(p) - i_L(0)) = pL \cdot I(p) - \text{---} \frac{i(t)}{L} \quad \text{---} \frac{I(p)}{Lp} \text{---}$$

$$u_C(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \rightarrow \frac{u(0)}{p} + \frac{I_C(p)}{pC}; \quad \text{---} \frac{i(t)}{C} \quad \text{---} \frac{I(p)}{1/Cp} \text{---}$$

$$E \rightarrow \frac{E}{p}$$

$$J \rightarrow \frac{J}{p}$$

$$\text{---} \frac{i(t)}{E} \quad \text{---} \frac{I(p)}{E/p}$$

$$\text{---} \frac{i(t)}{E} \quad \text{---} \frac{I(p)}{E/p}$$

Переходные процессы (практика)

Пример: Определить ток источника напряжения если $E = 50\text{В}$, $R = 10\text{Ом}$, $L = 0,4\text{Гн}$.

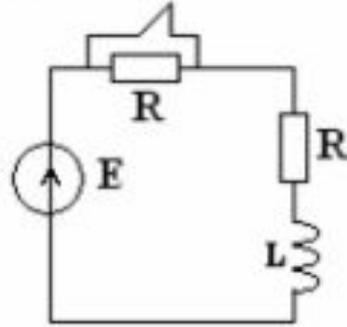


Рис. 4.49

1. Определим независимые начальные условия $i_L(0)$

$$i_L(0) = E / R = 50 / 10 = 5\text{А}.$$

2. Изображаем операторную схему замещения после коммутации и находим изображение тока

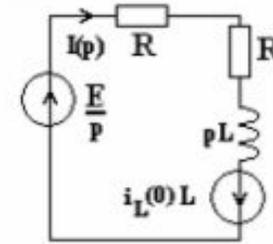


Рис. 4.50

$$I(p) = \frac{E/p + i_L(0)L}{2R + Lp} = \frac{E + i_L(0)Lp}{p(2R + Lp)} = \frac{M(p)}{pN(p)},$$

где: $M(p) = E + i_L(0)Lp = 50 + 2p$, $N(p) = (2R + Lp) = 20 + 0,4p$.

Находим корень знаменателя и его производную

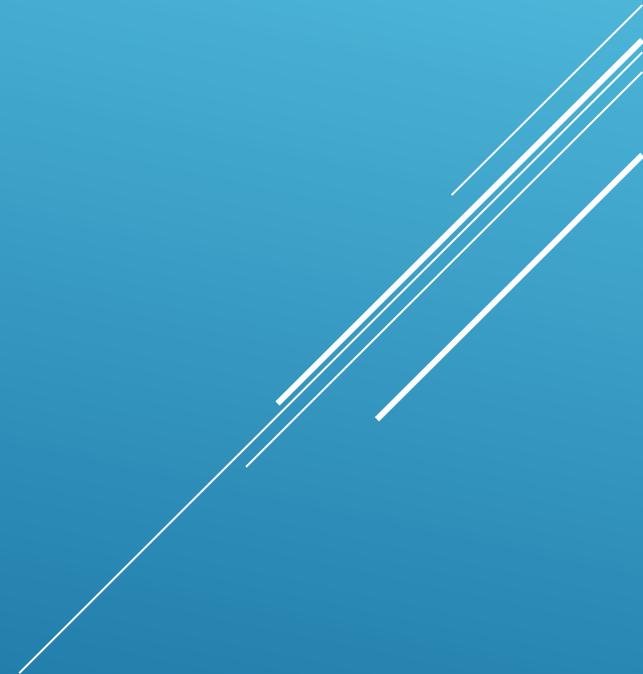
$$N(p) = 20 + 0,4p = 0 \rightarrow p = -2R/L = -20/0,4 = -50\text{с}^{-1},$$

$$N'(p) = L = 0,4.$$

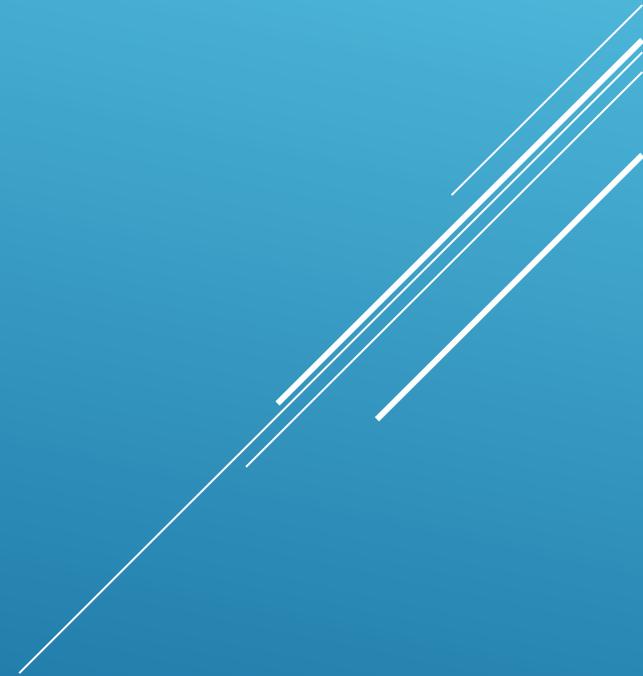
3. Для определения оригинала $i(t)$ используем теорему разложения

$$\begin{aligned} I(p) = \frac{M(p)}{p \cdot N(p)} &\rightarrow i(t) = \frac{M(0)}{N(0)} + \frac{M(p)}{p \cdot N'(p)} e^{p \cdot t} = \frac{50}{20} + \frac{50 - 100}{-50 \cdot 0,4} e^{-50 \cdot t} = \\ &= 2,5 + 2,5e^{-50 \cdot t} \text{ А}. \end{aligned}$$

Переходные процессы (практика)



Переходные процессы (практика)



Переходные процессы (практика)



Переходные процессы

Интеграл Дюамеля

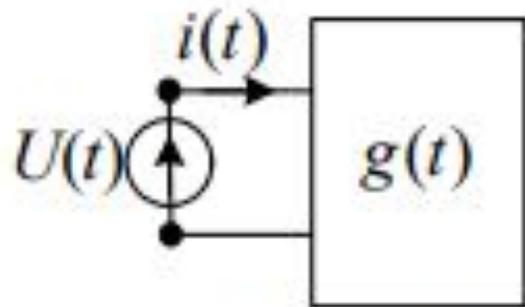


Рис. 4.63

Прежде всего, уместно ввести понятие переходная функция. Переходная функция это отклик системы на единичное воздействие. При известной переходной функции $g(t)$ для заданной схемы можно найти ток в цепи

$$i(t) = g(t)U_0$$

Здесь U_0 постоянное внешнее воздействие. Для того чтобы

Определить ток при произвольном внешнем воздействии $U(t)$, разобьем функцию $U(t)$ на прямоугольники как показано на рисунке 4.64.

Полный ток в момент t получаем, используя метод наложения. Просуммируем все частичные токи от отдельных скачков и прибавим их к току $u(0)g(t)$:

$$i(t) = u(0)g(t) + \sum u'(\tau)g(t - \tau)\Delta\tau$$

Переходные процессы

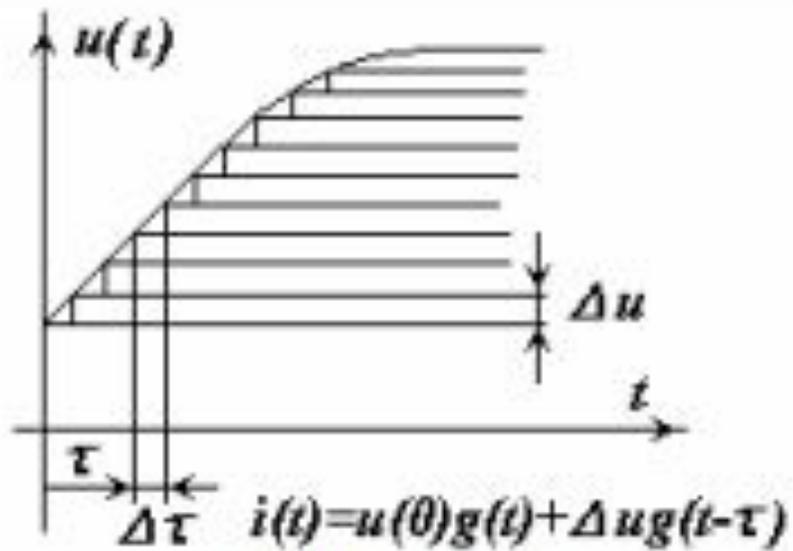


Рис. 4.64

Число членов суммы равно числу ступенек напряжения. Очевидно, что ступенчатая кривая тем лучше заменяет плавную кривую, чем больше число ступенек. С этой целью заменим конечный интервал времени $\Delta \tau$ на бесконечно малый $d\tau$ и перейдем от суммы к интегралу:

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

ИЛИ

$$i(t) = u(t)g(0) + \int_0^t u(\tau)g'(t-\tau)d\tau$$

Переходные процессы

Переходная характеристика (или переходная функция)

Дельта функция Дирака $\delta(x - x_0)$ и $\theta(x - x_0)$ -ступенчатая функция Хевисайда

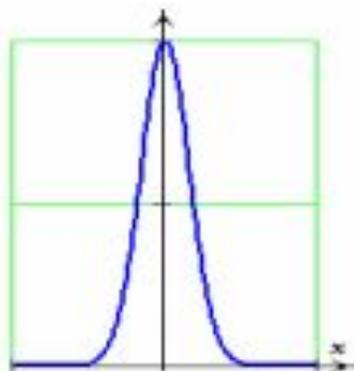


Рис. 4.65

Свойство дельта функции Дирака:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_0, \\ 0 & \text{при } t \neq t_0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Свойство функция Хевисайда:

$$\theta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0; \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad \rightarrow \theta'(t) = \delta(t),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = \theta(x - x_0).$$

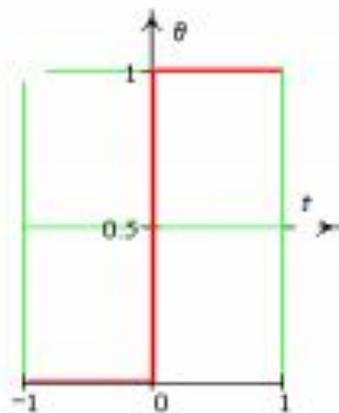
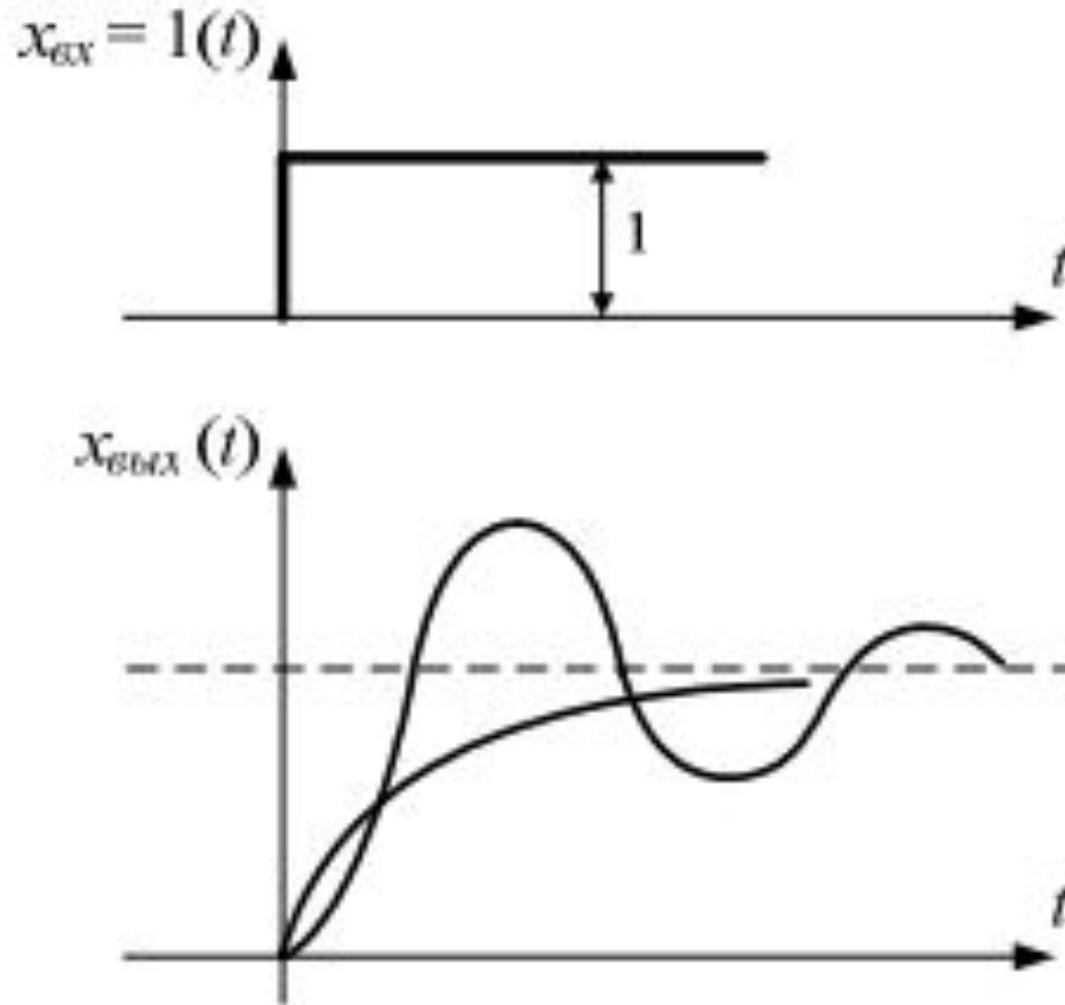


Рис. 4.66

Преобразование Лапласа этих функций

$$L[\delta(t)] = 1, \quad L[\theta(t)] = \frac{1}{p}.$$

Переходные процессы



Переходная функция $h(t)$ – это закон изменения во времени выходной величины при изменении входной величины в виде единичной ступенчатой функции (*отклик (реакция звена) системы на единичное воздействие*). Единичная ступенчатая функция описывается следующим образом

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Рис. 4.67

Переходные процессы

Решение дифференциального уравнения с единичной $\theta(t)$ правой частью, есть переходная функция

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \theta(t) \rightarrow \text{решением уравнения является } h(t),$$

тогда при произвольном воздействии $f(t)$ имеем:

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t) \rightarrow \text{решением уравнения является функция:}$$

$$x(t) = h(t)f(0) + \int_0^t h'(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

При нулевых начальных условиях:

$$x(t) = \int_0^t h'(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Переходные процессы

Решение дифференциального уравнения с импульсной $\delta(t)$ правой частью, есть функция Грина функция или весовая функция:

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \delta(t) \rightarrow \text{решением уравнения является } w(t),$$

тогда при произвольном воздействии $f(t)$ имеем:

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t) \rightarrow \text{решением уравнения является}$$

$$x(t) = h(t)f(0) + \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

При нулевых начальных условиях:

$$x(t) = \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Переходные процессы

Импульсная переходная функции (весовая функция-функция Грина)

Связь между передаточной функцией и переходной функцией можно найти, используя следующие соотношения:

$$\delta(t) = \theta'(t) \rightarrow w(t) = h'(t);$$
$$\theta(t) = \int_0^t \delta(t) dt \rightarrow h(t) = \int_0^t w(t) dt,$$

где

функция Грина $w(t)$ -это отклик-реакция системы на $\delta(t)$ воздействие
переходная функция $h(t)$ -это отклик-реакция системы на $\theta(t)$ воздействие
Напомню, что преобразование Лапласа:

$$L[f(t)] = F(p) \quad L\left[\int_0^t f(t) dt\right] \rightarrow \frac{F(p)}{p}, \quad L[f'(t)] \rightarrow pF(p).$$

Следовательно, изображение переходной функции

$$h(p) = \frac{1}{p} \cdot W(p). \quad (11)$$

Переходные процессы (практика)

Пример 1:

Дано дифференциальное уравнение

$$5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 3x = y(t) + 2 \frac{dy(t)}{dt}, \quad x(0) = y(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \frac{dy(0)}{dt} = 0.$$

Определим передаточную функцию дифференциального уравнения.

1. Запишем уравнение в операторной форме:

$$5p^2 X + 4pX + 3X = Y + 2pY \rightarrow (5p^2 + 4p + 3)X = (1 + 2p)Y.$$

2. Находим передаточную функцию: $W(p) = \frac{(1 + 2p)}{(5p^2 + 4p + 3)}.$

Пример 2:

Дано дифференциальное уравнение

$$0,1 \frac{d^2 x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 100x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0.$$

Переходные процессы

Метод пространство состояний

Переменные состояния представляют собой систему наименьшего числа независимых величин необходимых для полного определения поведения динамической системы. Переменные состояния это токи индуктивностей и напряжения емкостей, именно они определяют состояние системы. В математической форме уравнения состояний для сложной цепи имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{F}(t) . \quad (10)$$

$\mathbf{x}(t)$ – вектор состояния (размерность n);

\mathbf{A} – матрица состояния (размерность $n \times n$);

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}(t)$ – вектор столбец (размерность n);

$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ – расширенная матрица.

Переходные процессы

Сначала рассмотрим составления уравнения состояния на простейших цепях

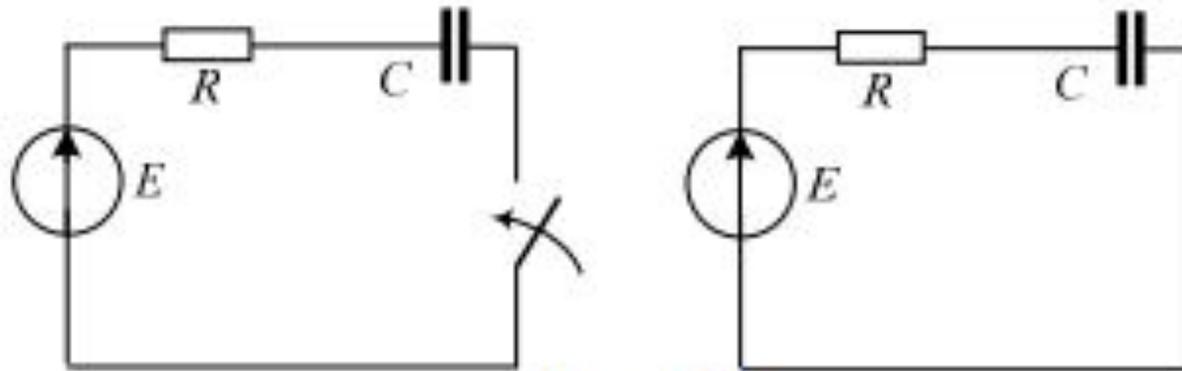


Рис. 4.68

цепях первого порядка. Определим напряжение на конденсаторе после коммутации. Вектором состояния является напряжение на ем-

кости. Запишем второй закон Кирхгофа.

$$U_C + RC \frac{dU_C}{dt} = e(t).$$

Перепишем это уравнение относительно производной $\frac{dU_C}{dt}$

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{RC} + \frac{e(t)}{RC} \rightarrow \frac{dU_C}{dt} = A \cdot U_C + B(t) = D(U_C, t)$$

такой вид уравнения называется нормальным. Таким образом, дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной называется нормальным.

Переходные процессы

Рассмотрим еще один пример. Определим ток через индуктивность. В данном случае вектором состояния является ток через индуктивность. Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа.

$$i_L R + L \frac{di_L}{dt} = e(t).$$

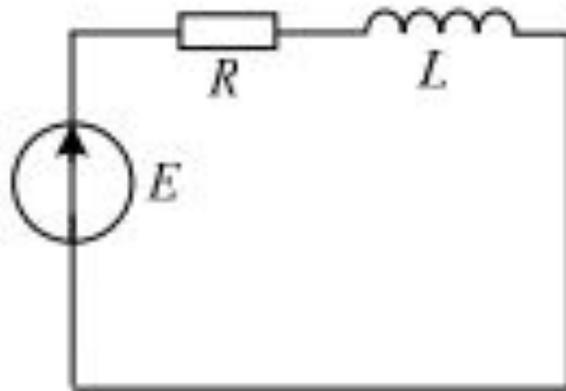


Рис. 4.69

Разрешаем это уравнение относительно производной и получаем уравнение в нормальной форме

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L + \frac{e(t)}{L} \rightarrow \frac{di_L}{dt} = A \cdot i_L + B(t) = D(i_L, t).$$

Переходные процессы

Рассмотрим пример для цепи второго порядка. Вектором состояния являются переменные $\mathbf{x}^T(t) = \{i_L(t), U_C(t)\}$. Записываем уравнения по второму закону Кирхгофа, в результате получаем систему дифференциальных уравнений:

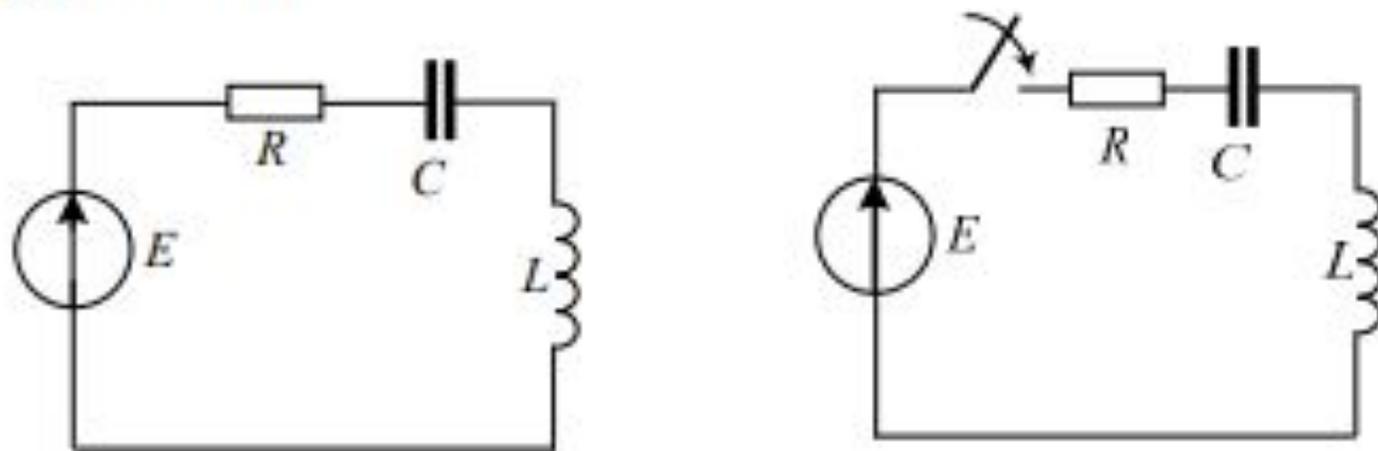


Рис. 4.70

$$u_L + u_C + i \cdot R = E \rightarrow L \frac{di_L}{dt} + R \cdot i_L + u_C = E,$$

$$i_C = i_L \rightarrow C \frac{du}{dt} = i_L.$$

Переходные процессы

Разрешим эту систему относительно производных, то есть запишем в нормальном виде

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i_L - \frac{1}{L} u_C + \frac{E}{L}, \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i_L. \end{cases}$$

Выпишем матрицу состояния:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} i_L \\ u_C \end{pmatrix}.$$

Что бы проверить правильность составления матрицы состояния, нам нужно проверить ее собственные числа

Переходные процессы

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} \cdot \lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} - \lambda & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{R}{L} + \lambda\right)\lambda + \frac{1}{LC} = 0;$$

$$\lambda^2 + \lambda \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0.$$

Если все сделано правильно, то это уравнение совпадает с уравнением входного сопротивления схемы

$$\frac{1}{Cp} + Lp + R = 0 \rightarrow p^2 CL + pCR + 1 = 0 \rightarrow p^2 + p \frac{R}{C} + \frac{1}{CL} = 0.$$

Проверим столбцевую матрицу

$$-\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} - \lambda & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 - \lambda \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E \\ L \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & C \\ -L - RC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}.$$

Результат должен дать принужденные составляющие напряжения на конденсаторе и ток через индуктивность

Переходные процессы

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} u_{C1}(t) \\ u_{C2}(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2 C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BF} = \begin{pmatrix} \frac{E}{R_2 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После подстановки числовых значений получаем:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -500 & 0 & -5 \cdot 10^4 \\ 0 & -166,667 & 1,667 \cdot 10^4 \\ 100 & -100 & -2 \cdot 10^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BF} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Переходные процессы

После определения матриц \mathbf{A} и \mathbf{BF} необходимо проверить правильность составления уравнения состояний. Это можно сделать, определив корни характеристического уравнения через сопротивление схемы:

$$Z(p) = \frac{R_2 \frac{1}{C_1 p}}{R_2 + \frac{1}{C_1 p}} + Lp + R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{C_2 p}}{R_2 + \frac{1}{C_2 p}} = 0.$$

Корни характеристического уравнения p_1, p_2, p_3 должны полностью совпасть с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы состояния \mathbf{A} , $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{1}) = 0$. Затем следует проверить принуждённые составляющие решений. В схеме после коммутации их легко найти, в нашем случае они определяются соотношениями:

Переходные процессы

$$\mathbf{x}_{np}(t) = \begin{pmatrix} u_{C1np} \\ u_{C2np} \\ i_{Lnp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot (R_2 + R_1)}{2R_2 + R_1} \\ \frac{E \cdot R_2}{2R_2 + R_1} \\ \frac{E}{2R_2 + R_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54,545 \\ 45,455 \\ 0,455 \end{pmatrix}$$

С помощью матричных соотношений их легко проверить:

$$\mathbf{x}_{np}(t) = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 54,545 \\ 45,455 \\ 0,455 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы убедились, что система уравнений состояния составлена правильно.

Переходные процессы (практика)

Пример 1. Определить ток $i_L(t)$ индуктивности и напряжения $u_{C1}(t)$, $u_{C2}(t)$ на ёмкостных элементах после включения ЭДС, если $E = 100$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 60$ мкФ, $L = 0,01$ Гн.

Решение. Для составления уравнения состояний эффективно использовать решающие функции программно-интегрирующей среды MathCAD, такие как **Given** и **Find**. Запишем уравнения, связывающие токи $i_{C1}(t)$, $i_{C2}(t)$ и напряжение $u_L(t)$ с напряжениями на ёмкостях и током индуктивности. Для этого используются первый и второй законы Кирхгофа. В нашем примере матрицы $\mathbf{x}(t)$, \mathbf{A} и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{F}(x)$ будут равны

$$\begin{cases} C_1 \frac{du_{C1}(t)}{dt} = -\frac{u_{C1}(t)}{R_2} - i_L(t) + \frac{E}{R_2} & (1 - \text{узел}); \\ C_2 \frac{du_{C2}(t)}{dt} = -\frac{u_{C2}(t)}{R_2} + i_L(t) & (2 - \text{узел}); \\ L \frac{di_L(t)}{dt} = u_{C1}(t) + u_{C2}(t) - i_L(t)R_1 & (\text{сред. контур}). \end{cases}$$

Линии с распределенными параметрами

Электрическими линиями с распределенными параметрами называются такие линии, в которых для одного и того же момента времени ток и напряжение непрерывно изменяются при переходе от одной точки (сечения) линии к другой соседней точке.

Эффект непрерывного изменения тока и напряжения вдоль линии имеет место вследствие того, что линии обладают распределенными продольными и поперечными сопротивлениями.

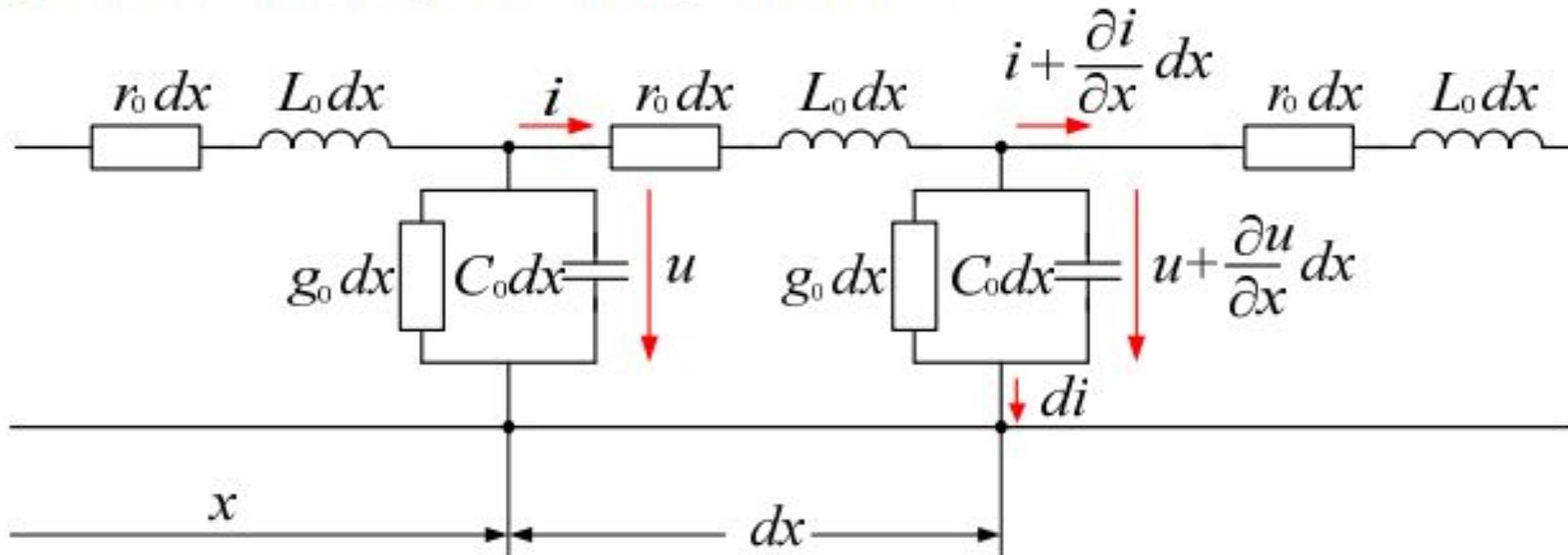


Рис. 5.1

Линии с распределенными параметрами

Разобьем линию на участки длиной dx (см. рис. 5.2), x – расстояние, отсчитываемое от начала линии. На длине dx активное сопротивление равно $r_0 dx$, индуктивность $-L_0 dx$, проводимость утечки $-g_0 dx$ и емкость $-C_0 dx$.

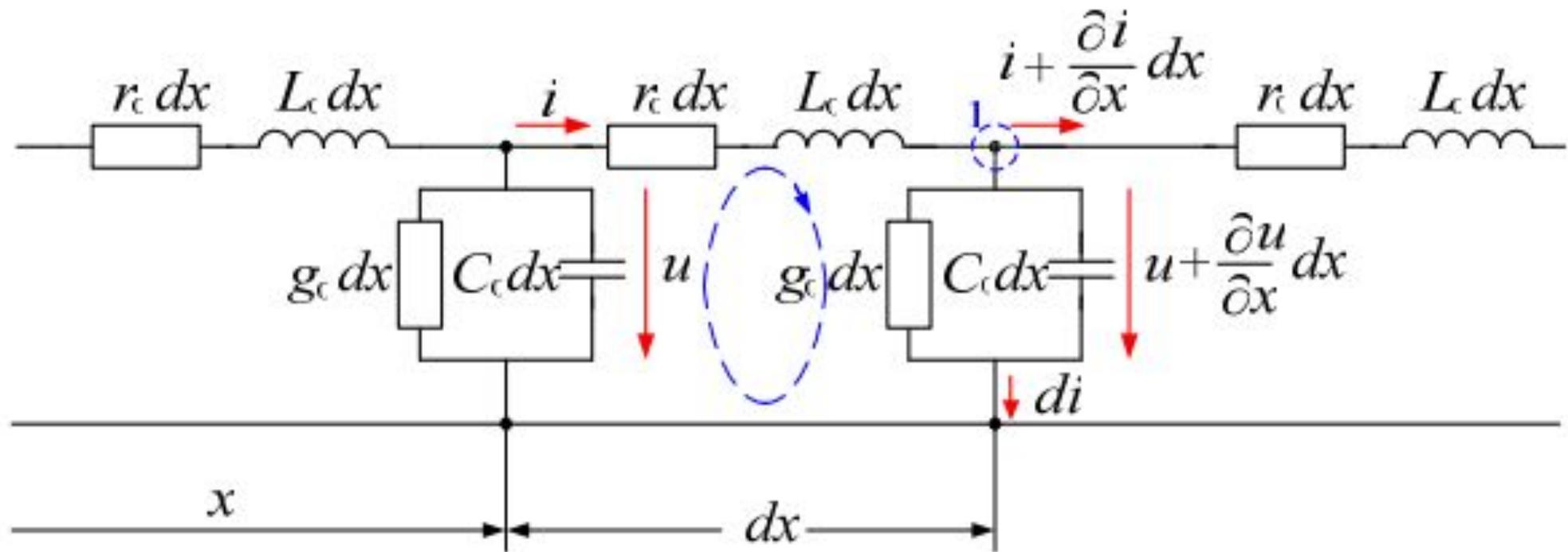


Рис. 5.2

Линии с распределенными параметрами

Обойдем, выделенный участок линии по контуру и запишем для него второй закон Кирхгофа - *сумма падений напряжения для замкнутого контура равняется нулю*:

$$-u + r_0 dx \cdot i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

Сократив на u и поделив на dx получаем выражение:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = r_0 \cdot i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Запишем первый закон Кирхгофа для выделенного узла -1:

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \quad (1)$$

Ток di равен сумме токов, проходящих через проводимость $g_0 dx$ и емкость $C_0 dx$:

$$di = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) g_0 dx + \frac{\partial}{\partial t} C_0 dx \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right).$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим

$$di = u \cdot g_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

Линии с распределенными параметрами

Подставляя (2) в (1) и поделив на dx , после упрощения получаем

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 \cdot u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных, которые в математической физике называются *телеграфными уравнениями*:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = r_0 \cdot i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = g_0 \cdot u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (2a)$$

Чтобы решить эти уравнения, воспользуемся символическим методом

Введем изображения токов и напряжений

$$i(x,t) \rightarrow \underline{I(x)}e^{j\omega t}, \quad u(x,t) \rightarrow \underline{U(x)}e^{j\omega t}. \quad (3)$$

Здесь – $\underline{I(x)}$ и $\underline{U(x)}$ комплексные величины тока и напряжения соответственно.

Линии с распределенными параметрами

Чтобы решить эти уравнения, воспользуемся символическим методом

Введем изображения токов и напряжений

$$i(x,t) \rightarrow \underline{I(x)}e^{j\omega t}, \quad u(x,t) \rightarrow \underline{U(x)}e^{j\omega t}. \quad (3)$$

Здесь – $\underline{I(x)}$ и $\underline{U(x)}$ комплексные величины тока и напряжения соответственно.

Очевидно, что в этом случае мы можем получить следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\rightarrow e^{j\omega t} \frac{dU(x)}{dx}; \\ L_0 \frac{\partial i}{\partial t} &\rightarrow L_0 \underline{I(x)} \frac{d}{dx} e^{j\omega t} = j\omega L_0 \underline{I(x)} e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} &\rightarrow e^{j\omega t} \frac{dI(x)}{dx}; \\ C_0 \frac{\partial u}{\partial t} &\rightarrow j\omega C_0 \underline{U(x)} e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Линии с распределенными параметрами

Подставив все выше полученные выражения в телеграфные уравнения, и сократив на множитель $e^{j\omega t}$, получим

$$\begin{cases} -\frac{dU(x)}{dx} = (r_0 + j\omega L_0) \underline{I}(x); \\ -\frac{dI(x)}{dx} = (g_0 + j\omega C_0) \underline{U}(x). \end{cases} \quad (26)$$

Введя обозначения $Z_0 = r_0 + j\omega L_0$, $Y_0 = g_0 + j\omega C_0$, и опуская зависимость напряжения и тока от пространственной координаты эти уравнения можно переписать

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = Z_0 \underline{I}; \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = Y_0 \underline{U}. \end{cases} \quad (2B)$$

Линии с распределенными параметрами

Продифференцируем первое уравнение по x и подставим в него второе получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \underline{U} \rightarrow \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0, \quad \gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}. \quad (2г)$$

Будем искать решение в виде $\underline{U} = \underline{A}e^{px}$. Подставляя искомое решение в (2г) получим характеристическое уравнение относительно p

$$p^2 - \gamma^2 = 0 \rightarrow p_{1,2} = \pm \gamma.$$

Теперь решение можно записать в виде

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{p_1 x} + \underline{A}_2 e^{p_2 x} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}.$$

Здесь $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ комплексные константы которые определяются с помощью граничных условий, комплексное число $\gamma = \sqrt{Z_0 Y_0}$ принято называть **постоянной распространения**. Запишем его в алгебраической форме

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

где α – **коэффициент затухания** (характеризующий затухание падающей волны на единицу длины линии); β – **коэффициент фазы** (пространственная частота); он характеризует изменение фазы падающей волны на единицу длины линии.

Линии с распределенными параметрами

Найдём ток из уравнений

$$-\frac{dU}{dx} = Z_0 \underline{I} \rightarrow \underline{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{dU}{dx} = \frac{A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}}{Z_0 / \gamma}.$$

Величину, стоящую в знаменателе Z_0 / γ называют **волновым сопротивлением** и обозначают Z_ϵ :

$$Z_\epsilon = \frac{Z_0}{\gamma} = \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0 Y_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = z_\epsilon e^{j\phi_\epsilon}.$$

Следовательно, ток можно записать

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}}{Z_\epsilon} = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma x}}{Z_\epsilon} - \frac{\underline{A}_2 e^{\gamma x}}{Z_\epsilon}.$$

Теперь можно перейти от комплексных величин к мгновенным значениям, то есть осуществить обратный переход от комплексных функций к мгновенным значениям тока и напряжения:

$$\underline{I}(x) e^{j\omega t} \rightarrow i(x, t), \quad \underline{U}(x) e^{j\omega t} \rightarrow u(x, t).$$

Линии с распределенными параметрами

В результате получим

$$u(x,t) = A_{m1} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + A_{m2} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2),$$

$$i(x,t) = \frac{A_{m1} e^{-\alpha x}}{z_0} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi_0) - \frac{A_{m2} e^{\alpha x}}{z_0} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi_0).$$

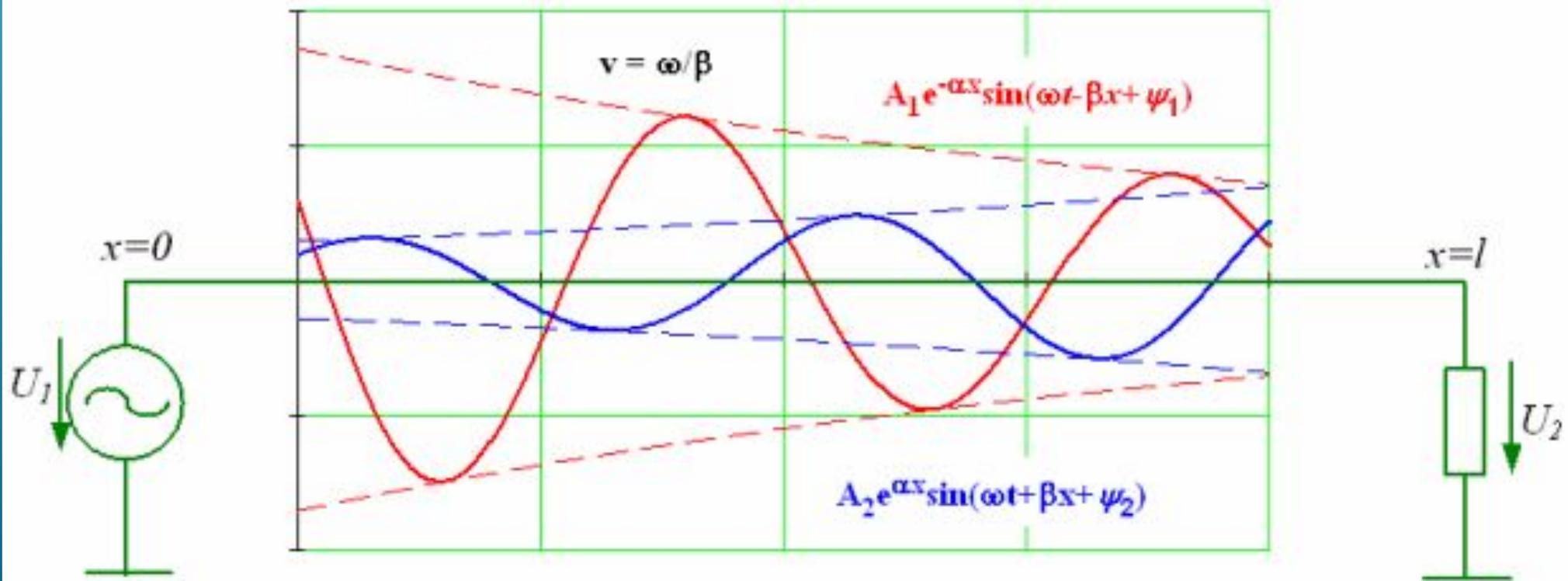


Рис. 5.3

Линии с распределенными параметрами

Бегущая волна характеризуется *волновыми параметрами* – *длиной волны* λ и *фазовой скоростью* v . Скорость распространения $-v$ и длину $-\lambda$ волны можно определить, используя выражения:

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = const \rightarrow \frac{d(\omega t - \beta x + \psi_1)}{dt} = \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta},$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Выпишем комплексное представление волн напряжения и тока вдоль линии, и определим константы интегрирования входящие в эти выражения, используя граничные условия в начале линии:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}; \\ \underline{I} = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma x}}{\underline{Z}_e} - \frac{\underline{A}_2 e^{\gamma x}}{\underline{Z}_e}. \end{cases} \quad (4)$$

Линии с распределенными параметрами

Пусть в начале линии при $x = 0$ напряжении \underline{U}_1 и \underline{I}_1 , тогда можно получить:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \underline{I}_1 Z_{\text{с}} = \underline{A}_1 - \underline{A}_2. \end{cases}$$

Просуммируем первое, и второе уравнения в системе (4), в результате получим выражение для константы A_1 :

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 Z_{\text{с}}}{2} = A_1 e^{j\Psi_0}.$$

Вычитая второе уравнение из первого в системе (4), получим выражение для константы A_2 :

$$\underline{A}_2 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 Z_{\text{с}}}{2} = A_2 e^{j\Psi_0}.$$

Линии с распределенными параметрами

Поставим найденные константы в выражения для напряжения:

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_s}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_s}{2} e^{\gamma x} = \underline{U}_1 \left(\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) - \underline{I}_1 \underline{Z}_s \left(\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right).$$

Напомним, что в скобках находятся гиперболические функции синус и косинус:

$$ch(\gamma x) = \left(\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right), \quad sh(\gamma x) = \left(\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right).$$

Линии с распределенными параметрами

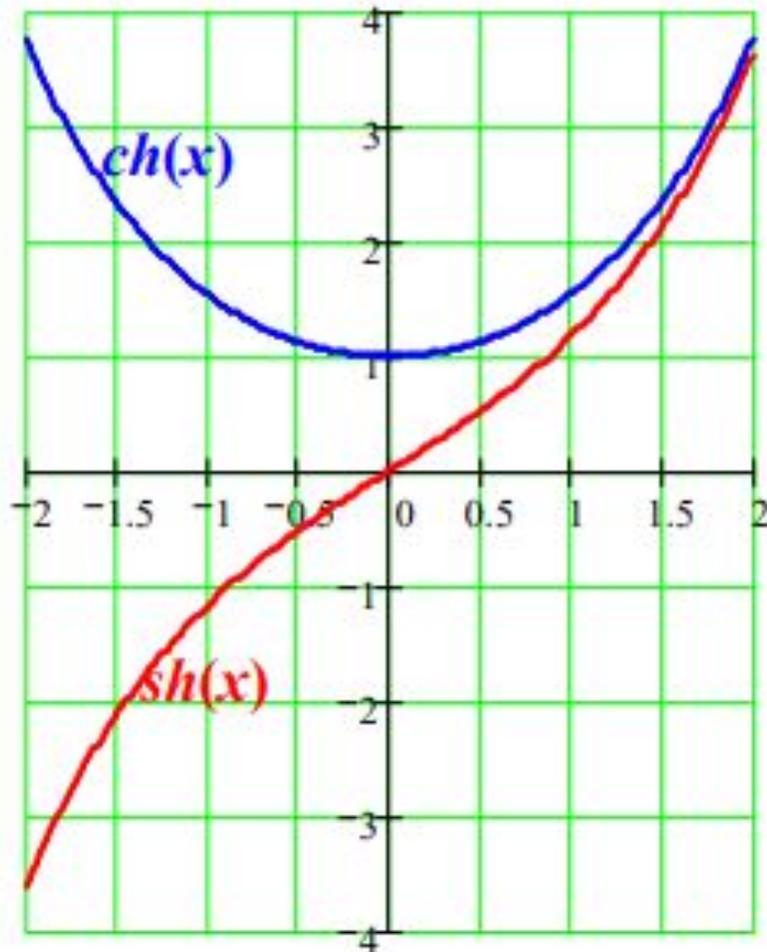


Рис. 5.4

Приведём графический вид функций $ch(x)$, $sh(x)$.

Теперь выражения для напряжения и тока можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 ch(\gamma x) - \underline{I}_1 \underline{Z}_g sh(\gamma x); \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_1 ch(\gamma x) - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_g} sh(\gamma x). \end{cases} \quad (5)$$

Используя это выражение можно получить связь между величинами в начале и в конце линии. Поставим $x = \ell$ в выражения (5), здесь ℓ длина линии:

Линии с распределенными параметрами

$$\begin{cases} \underline{U}(l) = \underline{U}_2 = \underline{U}_1 \operatorname{ch}(\gamma l) - \underline{I}_1 \underline{Z}_e \operatorname{sh}(\gamma l); \\ \underline{I}(l) = \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \operatorname{ch}(\gamma l) - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_e} \operatorname{sh}(\gamma l). \end{cases} \quad (6)$$

Решим уравнения (6) относительно \underline{U}_2 и \underline{I}_2 , получим систему уравнений позволяющую определять ток и напряжения в начале линии при известных значения в конце линии.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) + \underline{I}_2 \underline{Z}_e \operatorname{sh}(\gamma l); \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_e} \operatorname{sh}(\gamma l) + \underline{I}_2 \operatorname{ch}(\gamma l). \end{cases} \quad (7)$$

Если ввести обозначения $A = D = \operatorname{ch}(\ell\gamma)$, $B = \underline{Z}_e \operatorname{sh}(\ell\gamma)$, $C = \operatorname{sh}(\ell\gamma)/\underline{Z}_e$ то мы получаем уравнение четырехполюсника

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A\underline{U}_2 + B\underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = C\underline{U}_2 + D\underline{I}_2. \end{cases} \quad (8)$$

Для всякого пассивного четырехполюсника выполняется:

$$AD - BC = \operatorname{ch}^2(\gamma l) - \operatorname{sh}^2(\gamma l) = 1. \quad (9)$$

Линии с распределенными параметрами

Обозначим расстояние от текущей точки на линии до конца линии y , а длину всей линии ℓ :

$$y = \ell - x. \quad (10)$$

Пусть известны напряжения и ток в конце линии \underline{U}_2 и \underline{I}_2 . Будем использовать эти значения как граничные условия при $y=0$. На основании системы уравнений (4) получаем:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{A}_1 e^{-\gamma(\ell-y)} + \underline{A}_2 e^{\gamma(\ell-y)} \\ \underline{I}(y) = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma(\ell-y)}}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{A}_2 e^{\gamma(\ell-y)}}{\underline{Z}_g} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}(0) = U_2 = \underline{A}_1 e^{-\gamma\ell} + \underline{A}_2 e^{\gamma\ell} \\ \underline{I}(0) = I_2 = \frac{\underline{A}_1 e^{-\gamma\ell}}{\underline{Z}_g} - \frac{\underline{A}_2 e^{\gamma\ell}}{\underline{Z}_g} \end{cases}. \quad (11)$$

Решая систему относительно констант \underline{A}_1 и \underline{A}_2 :

$$\begin{cases} U_2 = \underline{A}_1 e^{-\gamma\ell} + \underline{A}_2 e^{\gamma\ell}; \\ I_2 \underline{Z}_g = \underline{A}_1 e^{-\gamma\ell} - \underline{A}_2 e^{\gamma\ell}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{A}_1 = \frac{U_2 + I_2 \underline{Z}_g}{2} e^{\gamma\ell} = A_1 e^{j\Psi_a}; \\ \underline{A}_2 = \frac{U_2 - I_2 \underline{Z}_g}{2} e^{-\gamma\ell} = A_2 e^{j\Psi_b}. \end{cases} \quad (12)$$

Подставив найденные значения постоянных \underline{A}_1 и \underline{A}_2 в систему (4) получаем:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma y) + I_2 \underline{Z}_g \operatorname{sh}(\gamma y); \\ \underline{I}(y) = \frac{U_2}{\underline{Z}_g} \operatorname{sh}(\gamma y) + I_2 \operatorname{ch}(\gamma y), \end{cases} \quad (13)$$

Линии с распределенными параметрами

Строго говоря, линии без потерь не существует. Однако можно создать линию с очень малыми потерями (с очень малыми r_0 и g_0 по сравнению с ωL_0 и ωC_0 соответственно). В ряде случаев, в особенности при высоких частотах, когда $\omega L_0 \gg r_0$ и $\omega C_0 \gg g_0$, можно пренебречь наличием потерь в линии и принять $r_0 = 0$ и $g_0 = 0$. В этом случае коэффициент затухания $\alpha = 0$, и коэффициент распространения становится чисто мнимой величиной $\gamma = j\beta$, $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$, а волновое сопротивление является чисто активным:

$$\underline{Z}_e = z_e. \quad (14)$$

Для определения напряжения и тока в любой точке линии обратимся к системе уравнений (13)

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma y) + \underline{I}_2 \underline{Z}_e \operatorname{sh}(\gamma y); \\ \underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_e} \operatorname{sh}(\gamma y) + \underline{I}_2 \operatorname{ch}(\gamma y). \end{cases}, \quad (15)$$

Линии с распределенными параметрами

и учтем, что $ch(\gamma y) = ch(j\beta y) = \cos(\beta y)$, $sh(\gamma y) = sh(j\beta y) = j \sin(\beta y)$, и перепишем уравнения (15):

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos(\beta y) + j \underline{I}_2 \underline{Z}_e \sin(\beta y); \\ \underline{I}(y) = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_e} \sin(\beta y) + \underline{I}_2 \cos(\beta y). \end{cases} \quad (16)$$

Используя те же выражения для системы (5) можно записать уравнения линий без потерь через ток и напряжения в начале линии:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_1 \cos(\beta y) - j \underline{I}_1 \underline{Z}_e \sin(\beta y); \\ \underline{I}(y) = -j \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_e} \sin(\beta y) + \underline{I}_1 \cos(\beta y). \end{cases} \quad (17)$$

Линии с распределенными параметрами

Коэффициент отражения

Отношение напряжения отраженной волны в конце линии к напряжению падающей волны в конце линии называют *коэффициентом отражения* по напряжению и обозначают K_u . В соответствии с формулой (12) можно получить:

$$K_u = \frac{\underline{A}_2 e^{\gamma l}}{\underline{A}_1 e^{-\gamma l}} = \frac{\frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{2}}{\frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_B}{2}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_B \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_B \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B}.$$

Из этого выражения видно, что при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$ согласованной нагрузке мы получаем $K_u = 0$, и следовательно нет отражённой волны, а при $\underline{Z}_H \rightarrow \infty$ холостом ходе мы получаем $K_u = 1$ то есть волна полностью отражается.

Линии с распределенными параметрами

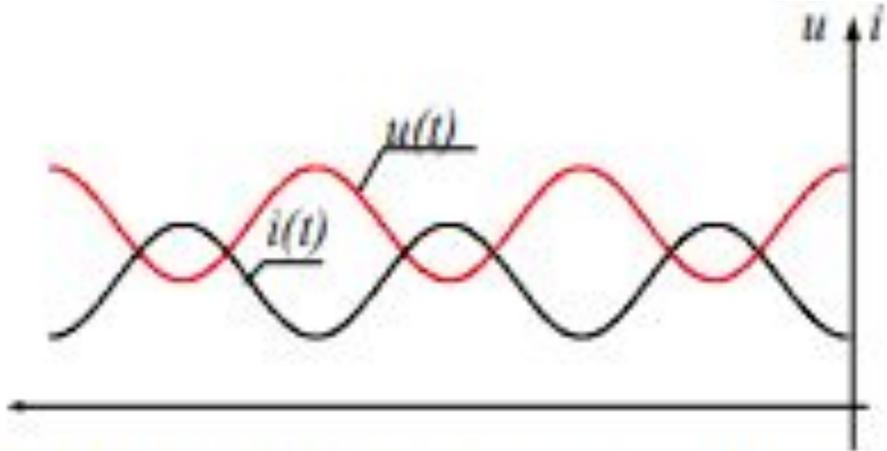


Рис. 5.6. Нагрузка линии больше волнового сопротивления $Z_H = 3Z_C$, $K_v = 0,5$

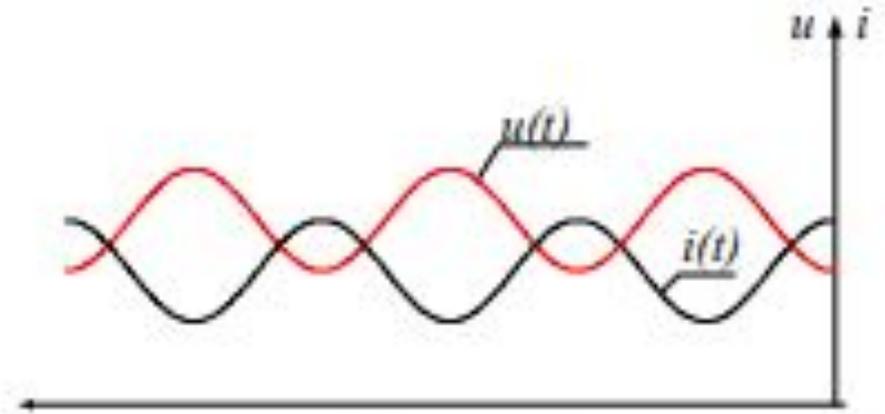


Рис. 5.7. Нагрузка линии меньше волнового сопротивления $Z_H = \frac{1}{3}Z_C$, $K_v = -0,5$

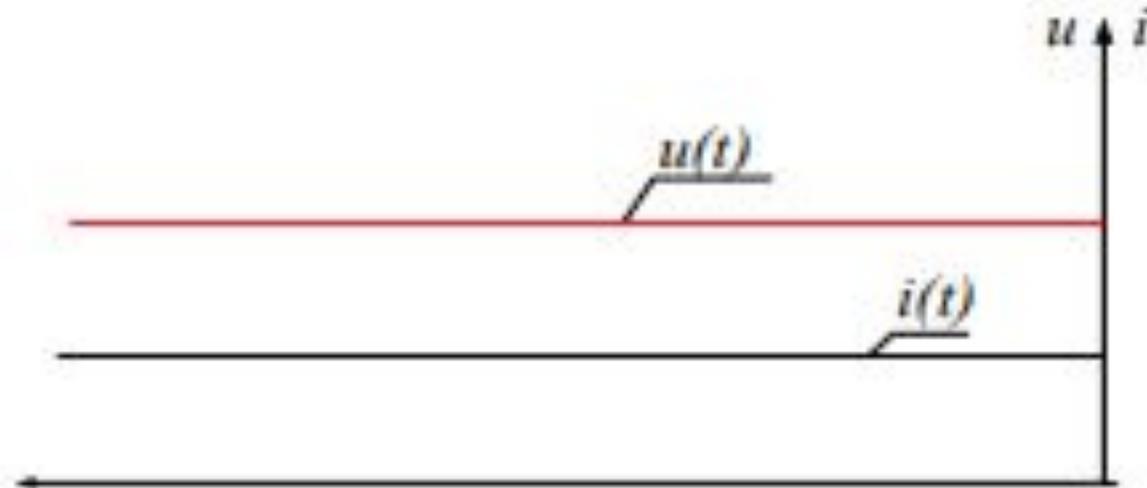


Рис. 5.8. Нагрузка линии равна волновому сопротивлению $Z_H = Z_C$, $K_v = 1$

Линии с распределенными параметрами

Стоячие волны

Если в конце линии без потерь не потребляется активная мощность (линия разомкнута, закорочена, замкнута на реактивную нагрузку), то в такой линии возникают стоячие волны.

При разомкнутом ($I_2 = 0, Z_2 = \infty$) конце линии без потерь напряжение и ток в любой ее точке определяется с помощью уравнений в тригонометрических функциях:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos(\beta y); \\ \underline{I}(y) = j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_e} \sin(\beta y). \end{cases} \quad (176)$$

Если $\underline{U}_2 = U_2$, то мгновенное значение напряжения и тока вычисляются по уравнениям

$$\begin{cases} u = U_{2m} \cos(\beta y) \sin(\omega t); \\ i = \frac{U_{2m}}{z_e} \sin(\beta y) \cos(\omega t). \end{cases} \quad (17B)$$

Линии с распределенными параметрами

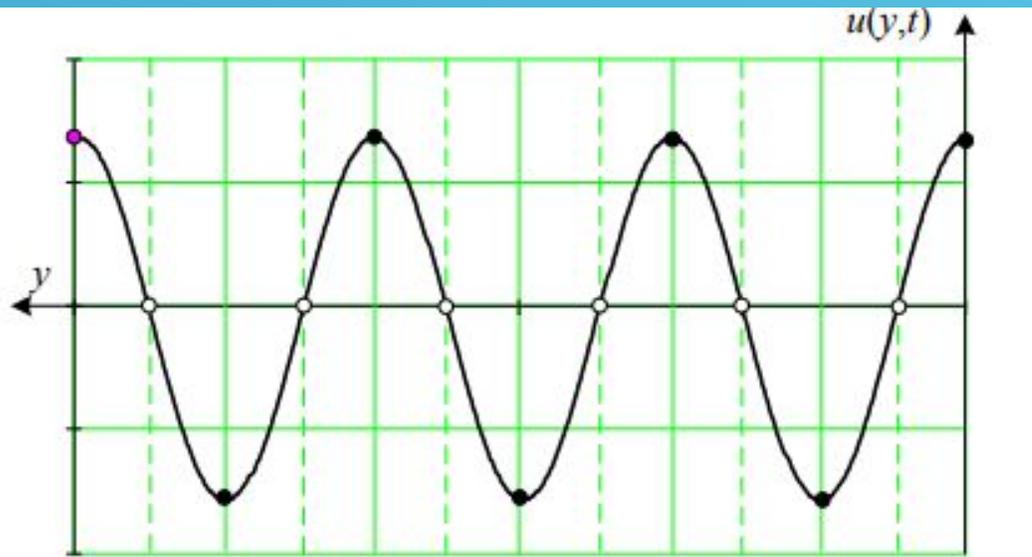


Рис. 5.8

В результате в конце линии в точках, находящихся от конца линии на расстоянии $y = \frac{\lambda}{2}k$ (k – целое число), напряжение имеет максимальные значения (пучности – жирные точки на рис. 5.8), а токи – нулевые значения (узлы). В точках, которые отстоят от конца линии на расстоянии $y = \frac{\lambda}{4}(2k + 1)$, существуют узлы (полые точки на рис. 5.8) напряжения и пучности тока. При этом узлы и пучности тока и напряжения не перемещаются по линии. Стоячую волну можно представить как результат наложения падающей и отраженной волн с одинаковыми амплитудами.

Входное сопротивление линии без потерь при холостом ходе

При холостом ходе ток в конце линии равен нулю $\underline{I}_2 = 0$. Поэтому можно записать (из 17)

$$\underline{Z}_{\text{вх x.x}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2 \cos(\beta y)}{j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_B} \sin(\beta y)} = -j \frac{\underline{Z}_B}{\text{tg}(\beta y)} = -j \frac{\sqrt{L_0/C_0}}{\text{tg}(\beta y)} = jx$$

Линии с распределенными параметрами

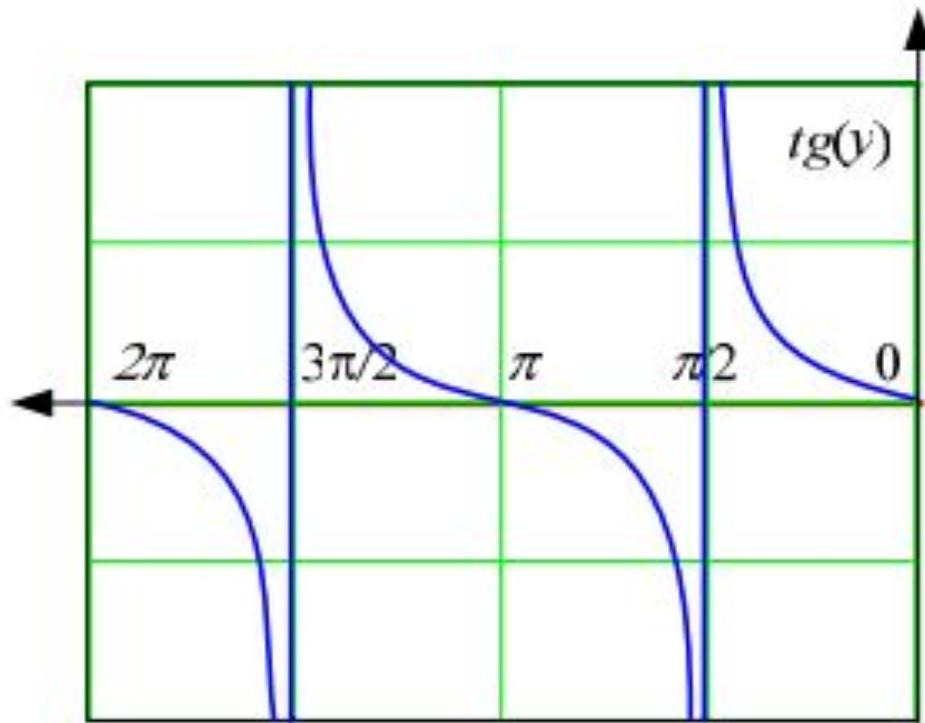


Рис. 5.9

На рисунке 5.9 приведена функция $-tg(y)$, которая в интервале от 0 до $\pi/2$ является положительной, следовательно, $Z_{вх х.х}$ имеет емкостной характер (множитель $-j$) и изменяется по модулю от ∞ до 0. Далее в интервале от $\pi/2$ до π функция $-tg(y)$ отрицательна. В этом случае $Z_{вх х.х}$ имеет индуктивный характер и изменяется от 0 до ∞ . И так далее, та-

ким образом, изменяя длину отрезка линии без потерь, можно имитировать емкостное или индуктивное сопротивление любой величины. Практически это свойство используется при высокой частоте в различных радиотехнических устройствах.

Линии с распределенными параметрами

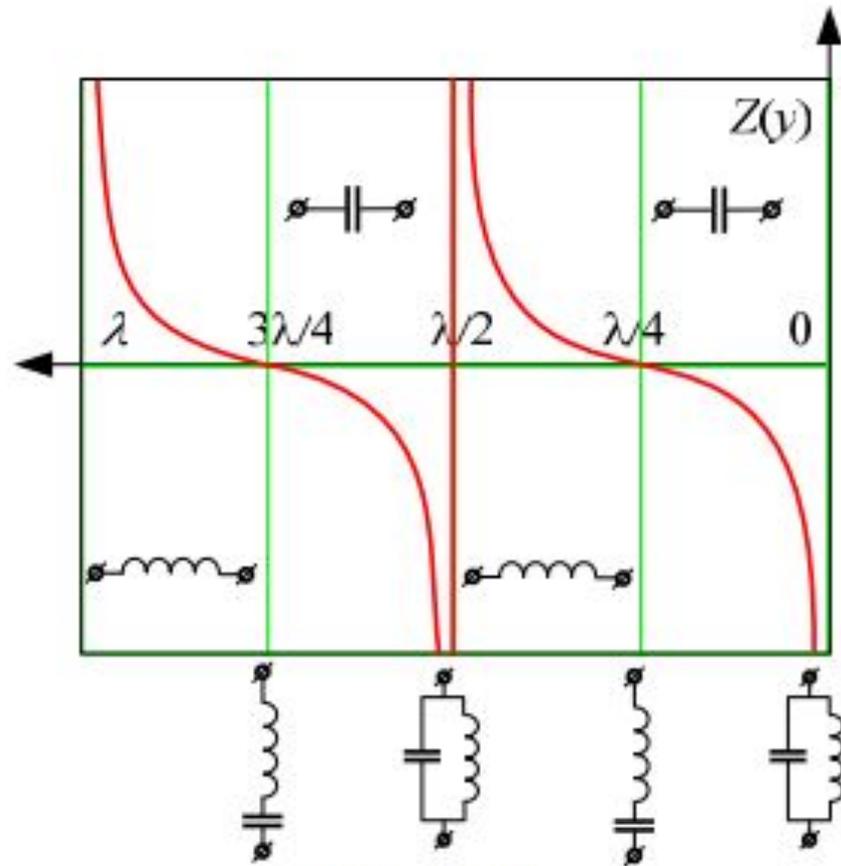


Рис. 5.10

В точках линии, в которых существует узлы тока и пучности напряжения, линия может быть представлена резонансным контуром с параллельным сопротивлением емкости и индуктивности, а в точках, в которых имеются узлы напряжения и пучности тока, ту же линию можно представить резонансным контуром с последовательным соединением емкости и индуктивности.

При коротком замыкании линии ($U_2 = 0, Z_2 = 0$) из уравнений (17) определяем:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{I}_2 z_{\text{в}} s \sin(\beta y); \\ \underline{I}(y) = \underline{I}_2 \cos(\beta y). \end{cases} \quad (17\Gamma)$$

Линии с распределенными параметрами

В этом случае уравнения для мгновенных значений

$$\begin{cases} u = I_{2m} z_B s \sin(\beta y) \cos(\omega t) \\ i = I_{2m} \cos(\beta y) \sin(\omega t) \end{cases} \quad (17д)$$

определяют стоячие волны. В конце линии и в точках, отстоящих от ее конца на расстоянии $y = \frac{\lambda}{2} k$, имеются узлы напряжения и пучности

тока, а в точках, которые находятся на расстоянии $y = \frac{\lambda}{4} (2k + 1)$, – пучности напряжения и узлы тока. Входное сопротивление линии без потерь, короткозамкнутой на конце,

$$\underline{Z}_{\text{вх к.з}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{I}_2 z_B \cos(\beta y)}{\underline{I}_2 \sin(\beta y)} = j z_B \operatorname{tg}(\beta y) = jx$$

Это сопротивление, так же как $\underline{Z}_{\text{вх х.х}}$, является чисто реактивным и в зависимости от длины участка y линии и частоты ω получается или индуктивным или емкостным (рис. 5.10).

Линии с распределенными параметрами

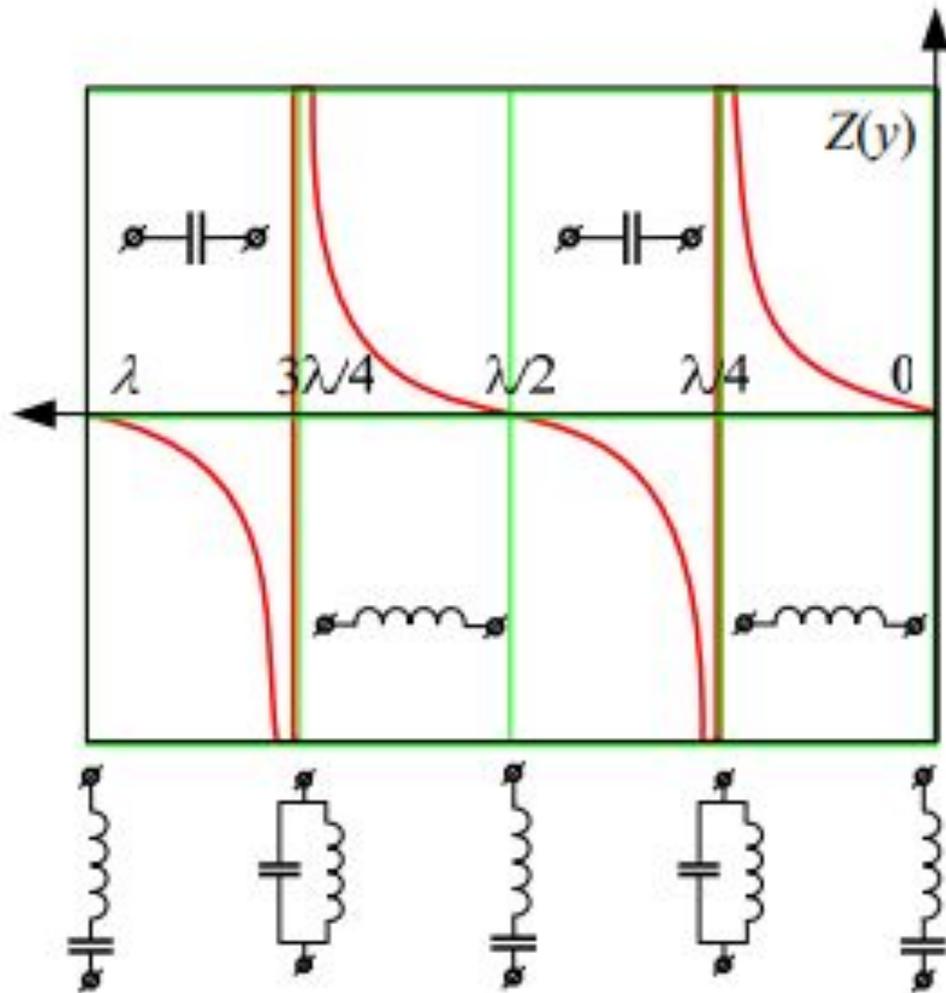


Рис. 5.11

На рисунке 5.11 показан график входного сопротивления вдоль короткозамкнутой линии, из которого следует, что при $0 \leq y \leq \lambda/4$; $\lambda/2 \leq y \leq 3\lambda/4$ и т.д. линия представляет собой индуктивное сопротивление; ток отстает по фазе от напряжения на четверть периода.

При $\lambda/4 \leq y \leq \lambda/2$; $3\lambda/4 \leq y \leq \lambda$ и т.д. линия представляет собой емкостное сопротивление; ток опережает по фазе напряжение линии на четверть периода.