

24.11.21.

Тема:

Основные тригонометрические
тождества.

Преобразование тригонометрических
выражений.

*Учащиеся должны освоить теоретическую
часть, прислать ответы на вопросы и решение
задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/TI38g42WKc8>

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

В этом параграфе установим тождества, связывающие значения тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Координаты любой точки $P(x; y)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Поскольку $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, где α — угол поворота, в результате которого из точки $P_0(1; 0)$ была получена точка P , то

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Обратим внимание на то, что точка P на единичной окружности выбрана произвольно. Поэтому равенство (1) справедливо для любого α . Его называют **основным тригонометрическим тождеством**.

Используя основное тригонометрическое тождество, найдём зависимость между тангенсом и косинусом, а также между котангенсом и синусом.

Пусть $\cos \alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\cos^2 \alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \text{ Отсюда}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Это тождество верно для всех α , при которых $\cos \alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Пусть $\sin \alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\sin^2 \alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \text{ Отсюда}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Это тождество верно для всех α , при которых $\sin \alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

Связь между тангенсом и котангенсом можно установить с помощью равенств $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Это тождество верно для всех α , при которых $\sin \alpha \neq 0$ и $\cos \alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Заметим, что эти два ограничения для α можно объединить в одно: $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 1. Найдите $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$.

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos \alpha < 0$, следовательно, $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24}{7}. \quad \blacksquare$$

Практическая часть.

Ответить на вопросы

1. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
2. Какое тождество связывает тангенс и косинус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
3. Какое тождество связывает котангенс и синус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
4. Какое тождество связывает тангенс и котангенс одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?

458 Вычислить:

1) $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

459 По значению одной из тригонометрических функций ($\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$) найти значения остальных трёх:

1) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; 2) $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos \alpha = 0,8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 6) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) $\operatorname{tg} \alpha = -2,4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 8) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.