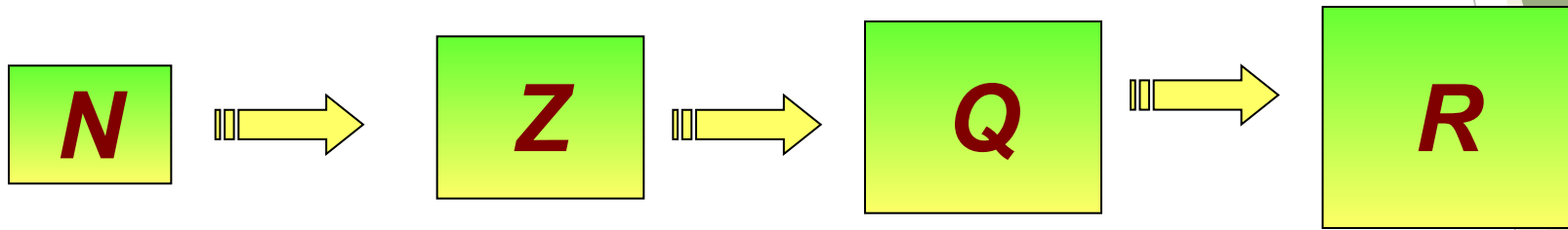


Комплексные числа



Какие числовые множества вам знакомы?



$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, \mathbb{N}	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, \mathbb{Z}	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, \mathbb{Q}	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, \mathbb{R}	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, \mathbb{C}	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

C_1) Существует комплексное число, квадрат которого равен **-1** .

C_2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

C_3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество C комплексных чисел.

Мнимые числа

$$i^2 = -1, i - \text{мнимая единица}$$

$i, 2i, -0,3i$ — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием СЗ.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$\begin{aligned} ai + bi &= (a + b)i; & ai - bi &= (a - b)i; \\ a(bi) &= (ab)i; & (ai)(bi) &= abi^2 = -a \end{aligned}$$

где a и b — действительные числа.

Определение 1. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$i^2 = -1, i - \text{мнимая единица}$$

Определение 2. Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Арифметические операции над комплексными числами

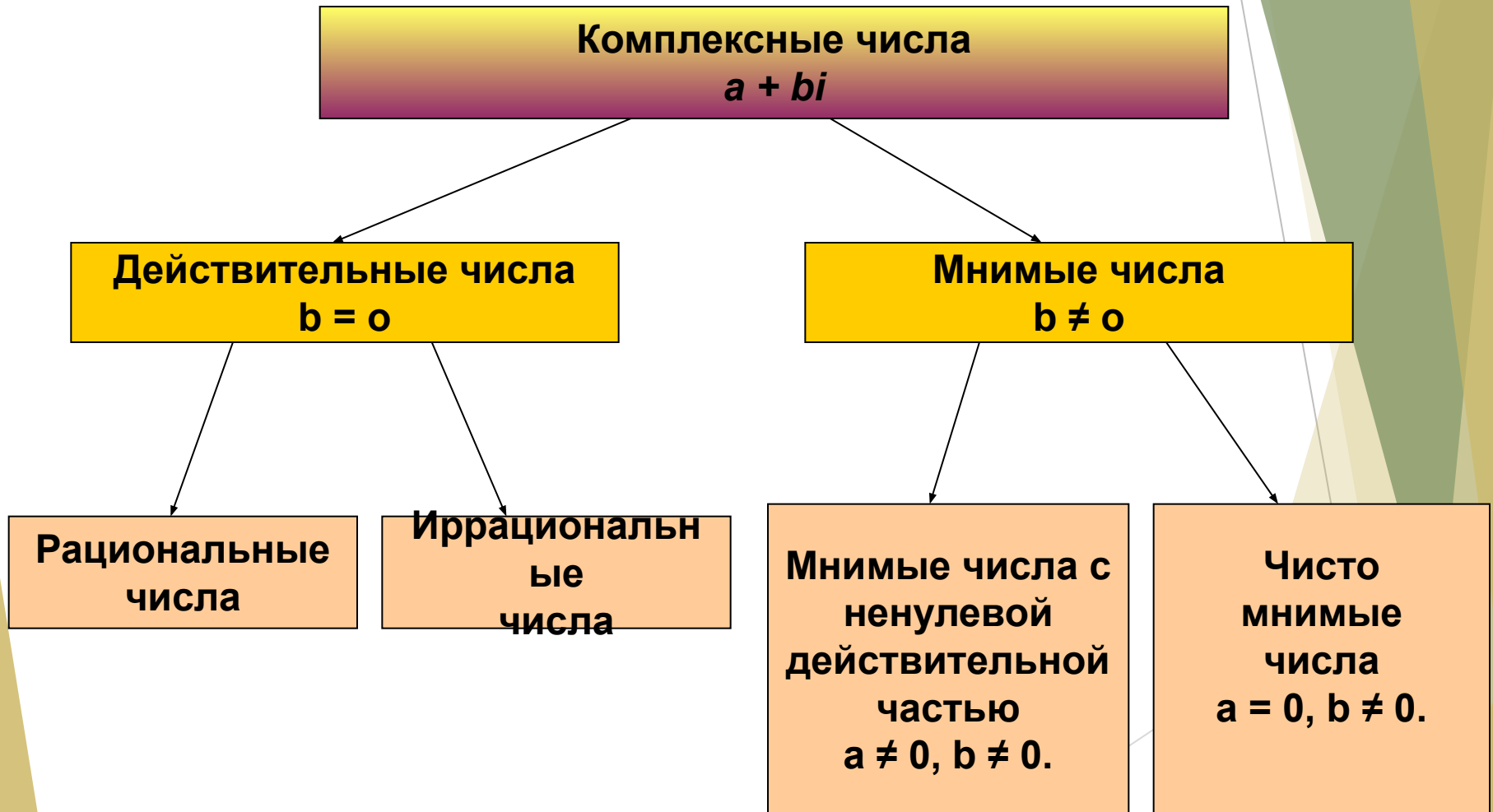
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

Классификация комплексных чисел



Сопряженные комплексные числа

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному**.

Если данное комплексное число обозначается буквой z , то сопряженное число обозначается \bar{z} :

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам. $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются взаимно сопряженными комплексными числами.

Свойства сопряженных чисел

1. Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

2. Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

3. Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

4. Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Свойства сопряженных чисел

5. Число, сопряженное n -ой степени комплексного числа z , равно n -ой степени числа, сопряженного к числу z , т.е.

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a + bi}{c + di} \right)} = \frac{\overline{(a + bi)}}{\overline{(c + di)}}$$

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа i является само число i , а второй степенью – число -1 :

$$i^1 = i, i^2 = -1$$

Более высокие степени числа i находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном n

$$i^{4n} = 1;$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+3} = -i.$$

Извлечение квадратных корней из комплексных чисел в алгебраической форме.

- ▶ **Определение.** Число w называют квадратным корнем из комплексного числа z , если его квадрат равен z : $w^2 = z$
- ▶ **Теорема.** Пусть $z = a + bi$ - отличное от нуля комплексное число. Тогда существуют два взаимно противоположных комплексных числа, квадраты которых равны z . Если $b \neq 0$, то эти два числа выражаются формулой:

$$w = \pm \left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot \text{sign} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right], \text{ где}$$

$$\text{sign} b = \begin{cases} 1, & \text{если } b \neq 0 \\ -1, & \text{если } b \neq 0 \\ 0, & \text{если } b = 0 \end{cases}$$

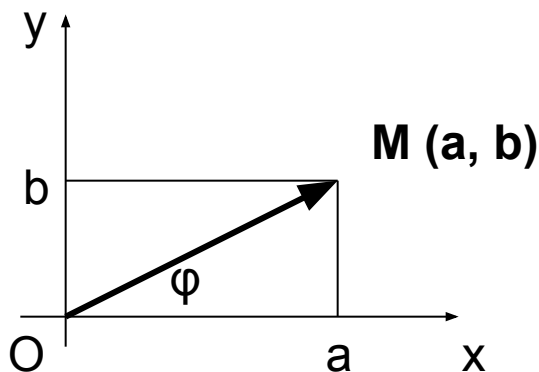
При $b = 0, a \neq 0$ имеем: $w = \pm\sqrt{a}$, при $b = 0, a \neq 0$ имеем: $w = \pm i\sqrt{|a|}$.

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка $M(a, b)$.

Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы \overrightarrow{OM}

Определение: Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют неотрицательное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, равное расстоянию от точки M до начала координат $\sqrt{a^2 + b^2}$



$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

φ – аргумент комплексного числа

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Теорема 1.

Если $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и
 $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то:

а) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое целое число.

Тогда

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

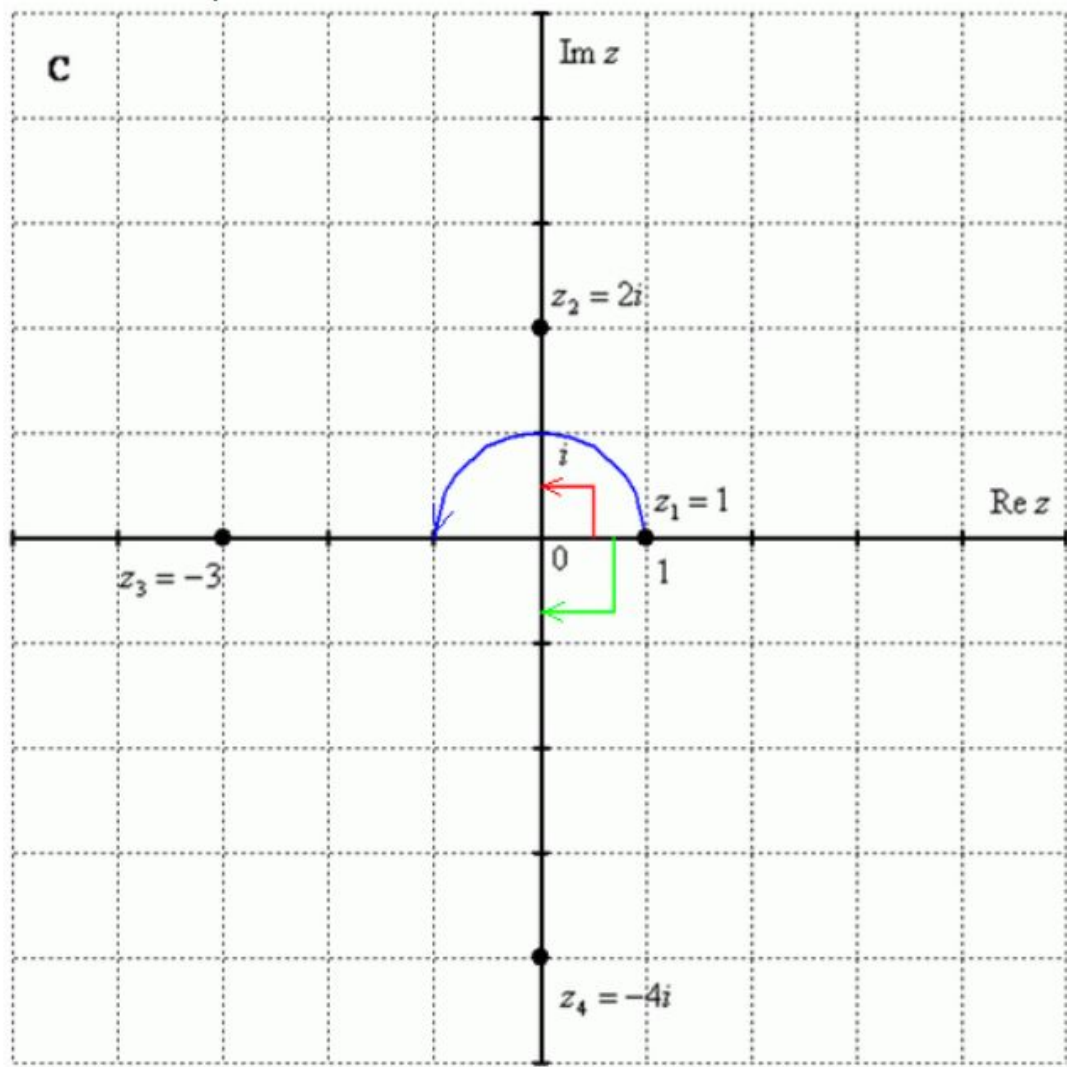
Выполнить действия

- 1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$.
- 2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$.
- 3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$,

$z_4 = -4i$.

Выполним чертёж:



1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0$.

Ясно, как день, обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Очевидно, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом.

Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом.

Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$.

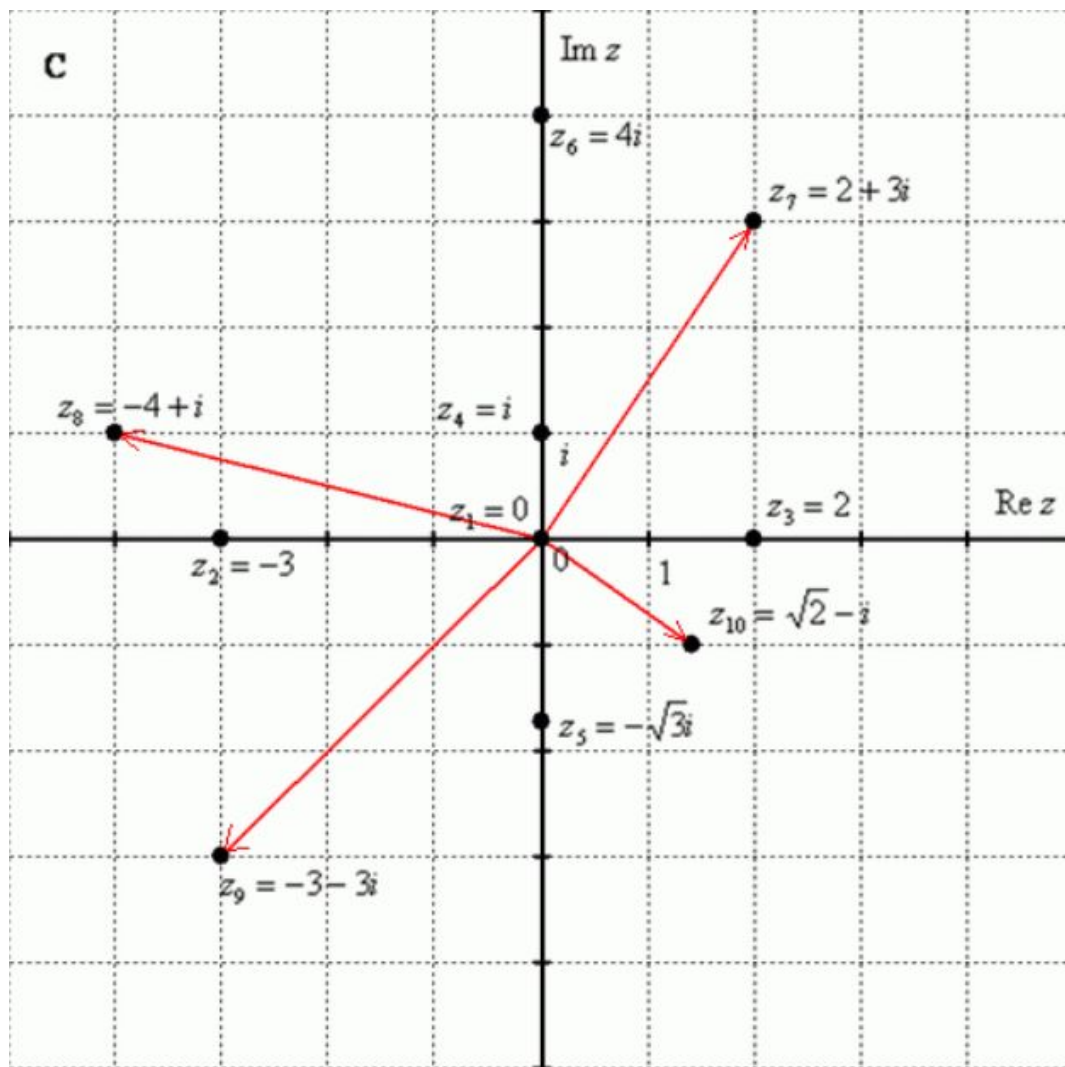
Проверка: $z_3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$$z_1 = 0, z_2 = -3, z_3 = 2$$

$$z_4 = i, z_5 = -\sqrt{3}i, z_6 = 4i$$

$$z_7 = 2 + 3i, z_8 = -4 + i, z_9 = -3 - 3i, z_{10} = \sqrt{2} - i$$



Действия над комплексными числами

Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 1 - 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (1 - 4i) = 2 + 3i - 8i - 12i^2 =$$

$$= 2 + 3i - 8i + 12 = 14 - 5i$$

= -1

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - 4i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (1 + 4i)}{(1 - 4i) \cdot (1 + 4i)} = \frac{2 + 3i + 8i + 12i^2}{1^2 + 4^2} =$$

$$\frac{2 + 3i + 8i - 12}{17} = \frac{-10 + 11i}{17} = -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}i$$

Найти сумму, разность, произведение и частное КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

▶ $(3+17i)+(9+11i)=$

▶ $(2+6i)+(8+6i)=$

▶ $(69+18i)-(44+6i)=$

▶ $(324+16i)-(189+9i)=$

$(6+8i) : (4+2i)=$

$(16+3i) : (2+4i)=$

$(5+7i)*(10+5i)=$

$(4+5i)*(4+6i)=$

Примеры:

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме и изобразить точками на комплексной плоскости:

1.435. $-i$

1.438. $\frac{1-i}{1+i}$.

1.441. $1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$.

1.435. $-i$

Решение.

Пусть $z = x + iy = -i$, то есть $x = 0$, $y = -1$. Тогда

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\cos \varphi = \frac{0}{1} = 0, \quad \sin \varphi = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$.

1.438. $\frac{1-i}{1+i}$.

Решение.

Запишем число $z = \frac{1-i}{1+i}$ в алгебраической форме:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Тригонометрическая форма числа $-i$ найдена в предыдущем примере (1.435):

$$z = -i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}.$$

Ответ: $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$.

$$1.441. 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$$

Решение.

Пусть $z = x + iy = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$, то есть $x = 1 + \cos \frac{\pi}{7}$, $y = \sin \frac{\pi}{7}$. Тогда

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(1 + \cos \frac{\pi}{7}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{7}} = \\ &= \sqrt{1 + 2 \cos \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{\pi}{7}} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{7}} = \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{14}} = 2 \cos \frac{\pi}{14}. \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \cos \frac{\pi}{14}.$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \sin \frac{\pi}{14}.$$

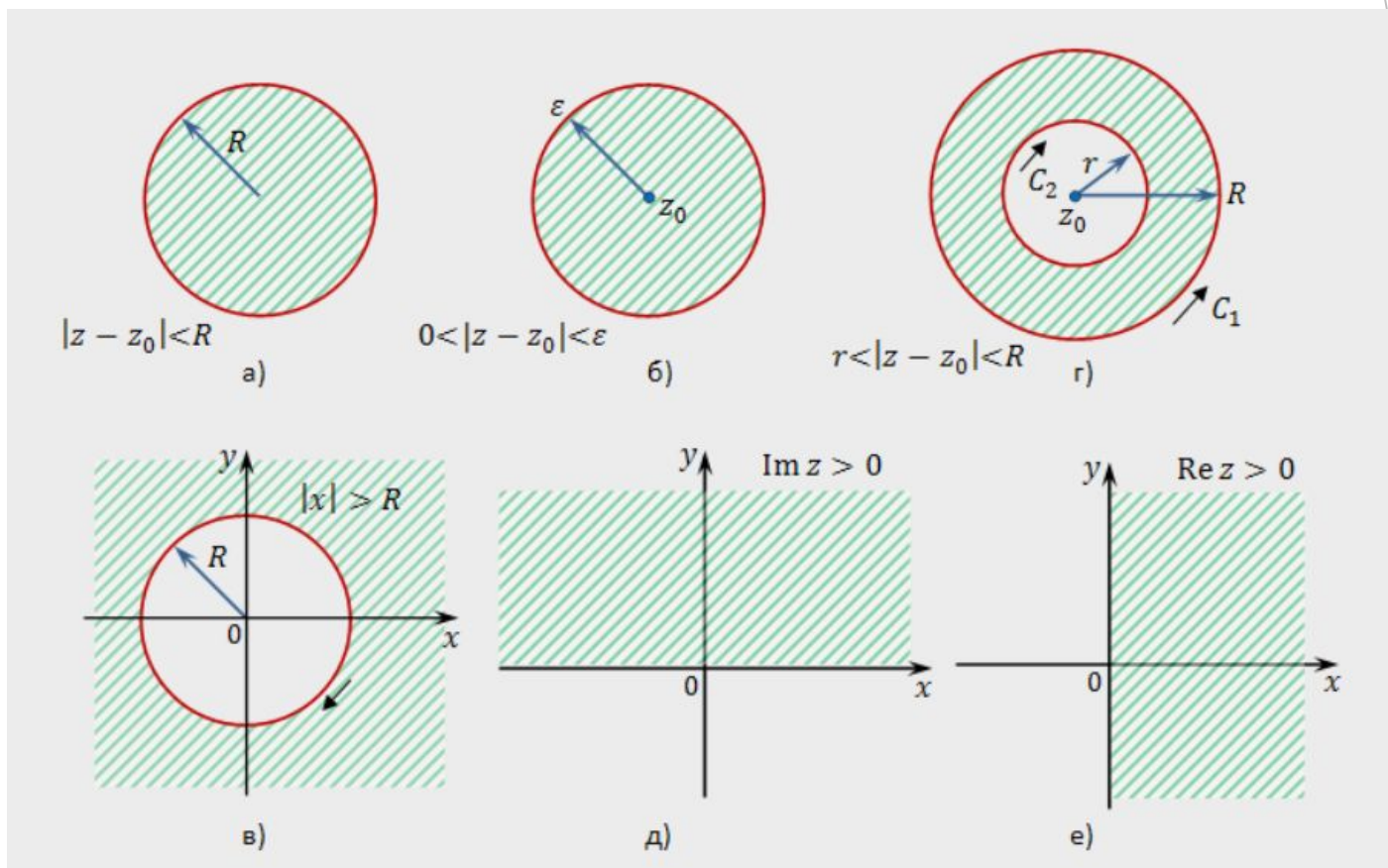
Таким образом, $\varphi = \frac{\pi}{14}$.

Отсюда находим показательную форму комплексного числа $z = x + iy = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$:

$$z = 2 \cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14} \right).$$

Ответ: $2 \cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14} \right)$.

Области на комплексной плоскости



1. Круг радиуса R с центром в точке z_0 задается неравенством $|z - z_0| < R$. Это — открытое, связное множество, т.е. область. Область — ограниченная, несвязная; ее границей является окружность $|z - z_0| = R$ (рис. 1.12,а). В частности, круг $|z - z_0| < \varepsilon$ есть окрестность точки z_0 : $O_\varepsilon(z_0)$. Заметим, что равенство $|z - z_0| \leq R$ определяет замкнутую область, т.е. область вместе с границей.

2. Проколотая окрестность точки z_0 : $O_\varepsilon(z_0) \setminus z_0$ — круг с выброшенным центром задается неравенством $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Это двусвязная, ограниченная область, граница которой состоит из двух компонент — окружности $|z - z_0| = \varepsilon$ и точки z_0 (рис. 1.12,б).

3. Окрестность бесконечно удаленной точки определяется как множество точек плоскости C , образами которых на сфере Римана являются точки, принадлежащие окрестности точки N (см. рис. 1.12,а). Эта окрестность получается отсечением от сферы некоторой области плоскостью, перпендикулярной лучу ON . Границей этой окрестности на сфере является окружность — пересечение сферы и плоскости. На плоскости C этой окружности соответствует также окружность, центр которой, очевидно, находится в точке O ; ее уравнение $|z| = R$. Сферической окрестности точки N будет соответствовать часть плоскости, границей которой является окружность $|z| = R$ и которая содержит бесконечно удаленную точку (образ точки N), эта область — внешность круга $|z| > R$ (рис. 1.12,в).

4. Кольцо с центром в точке z_0 , радиус внешней окружности которого R и внутренней r , задается неравенством $r < |z - z_0| < R$ (рис. 1.12,г). Это — ограниченная, двусвязная область, граница которой состоит из двух окружностей $C_1: |z - z_0| = R$ и $C_2: |z - z_0| = r$.

5. Верхняя полуплоскость плоскости C — множество точек, для которых $y > 0$, т.е. в комплексной форме $\text{Im } z > 0$ (рис. 1.12,д); соответственно $\text{Im } z < 0$ — нижняя полуплоскость. Неравенство $\text{Re } z > 0$ определяет правую полуплоскость (рис. 1.12,е), $\text{Re } z < 0$ — левую полуплоскость. Это односвязные, неограниченные области.