Комплексные числа

Какие числовые множества вам знакомы?

N → **Z** → **Q** → **R**

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Числовая система	Допустимые алгебраические операции	Частично допустимые алгебраические операции
Натуральные числа, N	Сложение, умножение	Вычитание, деление, извлечение корней
Целые числа, Z	Сложение, вычитание, умножение	Деление, извлечение корней
Рациональные числа, Q	Сложение, вычитание, умножение, деление	Извлечение корней из неотрицательных чисел
Действительные числа, R	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней из неотрицательных чисел	Извлечение корней из произвольных чисел
Комплексные числа, C	Все операции	

Минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа:

C_1) Существует комплексное число, квадрат которого равен **-1** .

C_2) Множество комплексных чисел содержит все действительные числа.

C_3) Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий (сочетательному, переместительному, распределительному).

Выполнение этих минимальных условий позволяет определить все множество C комплексных чисел.

Мнимые числа

$i^2 = -1$, i – мнимая единица

i, 2i, -0,3i — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием С3.

$$3i + 13i = (3+13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a+b)i; \qquad ai - bi = (a-b)i;$$

$$a(bi) = (ab)i; \qquad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где *a* и *b* — действительные числа.

Определение 1. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$i^2 = -1$, i – мнимая единица

Определение 2. Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c,\ b = d.$$

Арифметические операции над комплексными числами

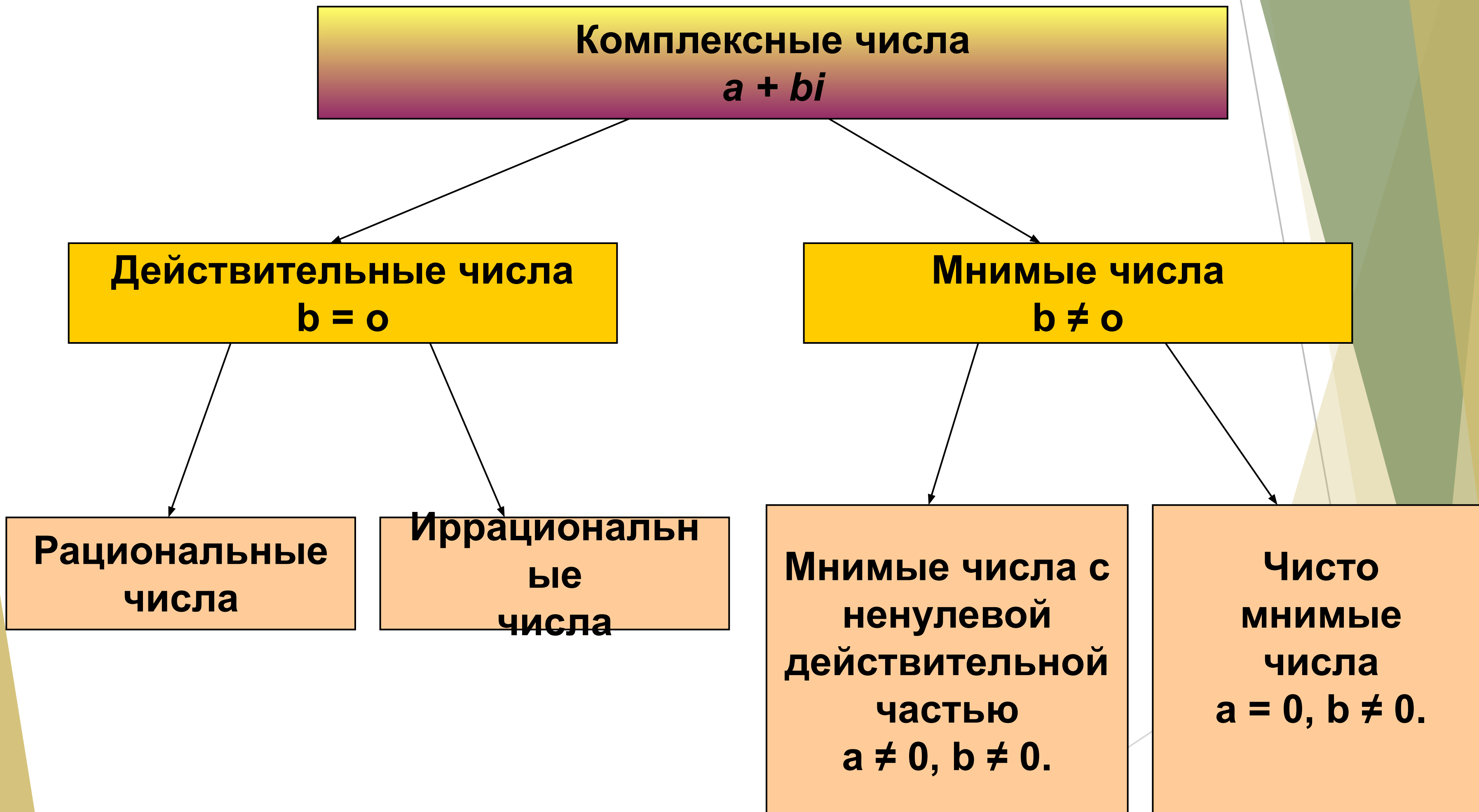
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

Классификация комплексных чисел



Сопряженные комплексные числа

Определение: Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, **сопряженное данному.**

Если данное комплексное число обозначается буквой z, то сопряженное число обозначается $\bar{z}$:

$$z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$$

Из всех комплексных чисел действительные числа (и только они) равны своим сопряженным числам. $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$

Числа *a + bi* и *a - bi* *называются взаимно сопряженными комплексными числами.*

Свойства сопряженных чисел

1. **Сумма и произведение двух сопряженных чисел есть число действительное.**

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$$

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

2. **Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам.**

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3. **Число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности сопряженных данным числам.**

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4. **Число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению сопряженных данным числам.**

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Свойства сопряженных чисел

5. Число, сопряженное *n*-ой степени комплексного числа z, равно *n*-ой степени числа, сопряженного к числу z, т.е.

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n, \quad n \in N$$

6. Число, сопряженное частному двух комплексных чисел, из которых делитель отличен от нуля, равно частному сопряженных чисел, т.е.

$$\overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}}$$

Степени мнимой единицы

По определению первой степенью числа *i* является само число *i*, а второй степенью – число -1:

$$i^1 = i, \; i^2 = -1$$

.

Более высокие степени числа *i* находятся следующим образом:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -\cdot i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ и т.д.}$$

Очевидно, что при любом натуральном *n*

$$i^{4n} = 1; \qquad i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i.$$

Извлечение квадратных корней из комплексных чисел в алгебраической форме.

- ***Определение***. Число *w* называют квадратным корнем из комплексного числа z, если его квадрат равен z: $w^2 = z$
- ***Теорема***. Пусть *z=a+bi* – отличное от нуля комплексное число. Тогда существуют два взаимно противоположных комплексных числа, квадраты которых равны z. Если b≠0, то эти два числа выражаются формулой:

$$w = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot signb\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], где$$

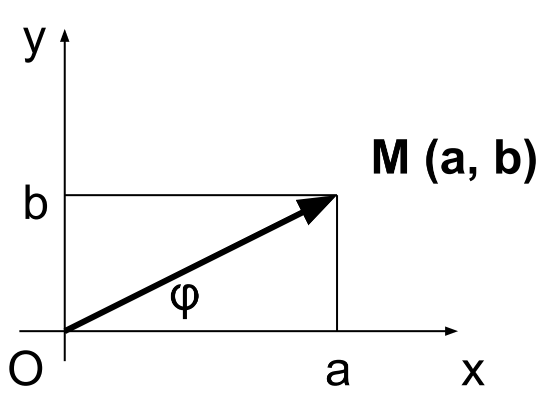
$$signb = \begin{cases} 1, если\, b > 0 \\ -1, если\, b < 0 \\ 0, если\, b = 0 \end{cases}$$

$$При\;\; b=0,\, a > 0\; имеем: w = \pm\sqrt{a}, при\; b=0, a < 0\; имеем: w = \pm i\sqrt{|a|}.$$

Геометрическое изображение комплексных чисел.

Комплексному числу z на координатной плоскости соответствует точка M(a, b).
Часто вместо точек на плоскости берут их радиусы-векторы $\overrightarrow{OM}$

Определение: **Модулем** комплексного числа $z = a + bi$ называют неотрицательное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, равное расстоянию от точки M до начала координат $\sqrt{a^2 + b^2}$



$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

φ – *аргумент комплексного числа*

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$

Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где φ – аргумент комплексного числа,

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad и \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

Теорема 1. Если $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ и $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то:

а) $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

б) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Теорема 2 (формула Муавра).

Пусть z — любое отличное от нуля комплексное число, n — любое целое число. Тогда

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Выполнить действия

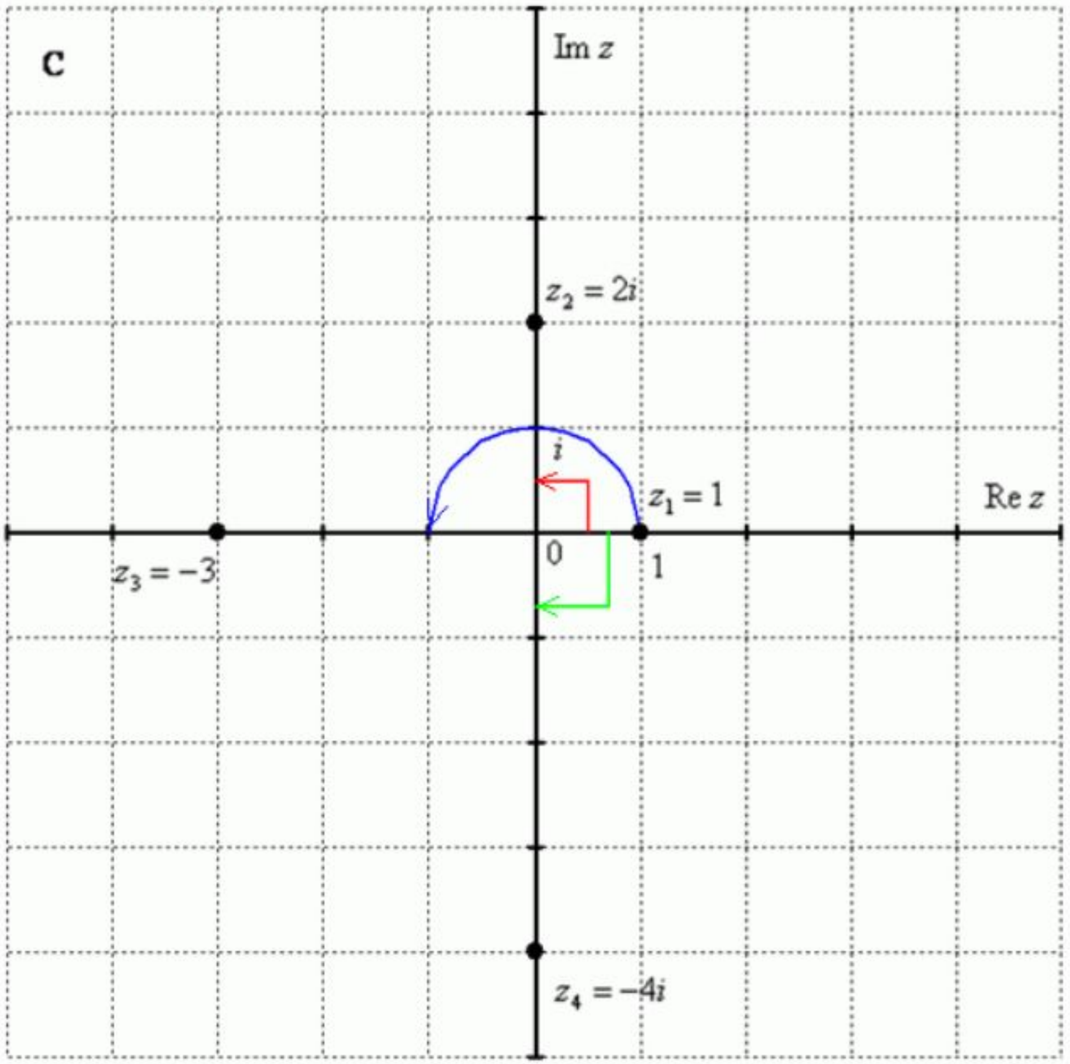
1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$.

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$.

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$.

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -4i$.

Выполним чертёж:



1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме:

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Ясно, как день, обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

---

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Очевидно, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом.

Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом.

Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_3 = 3(\cos\pi + i \sin\pi)$.

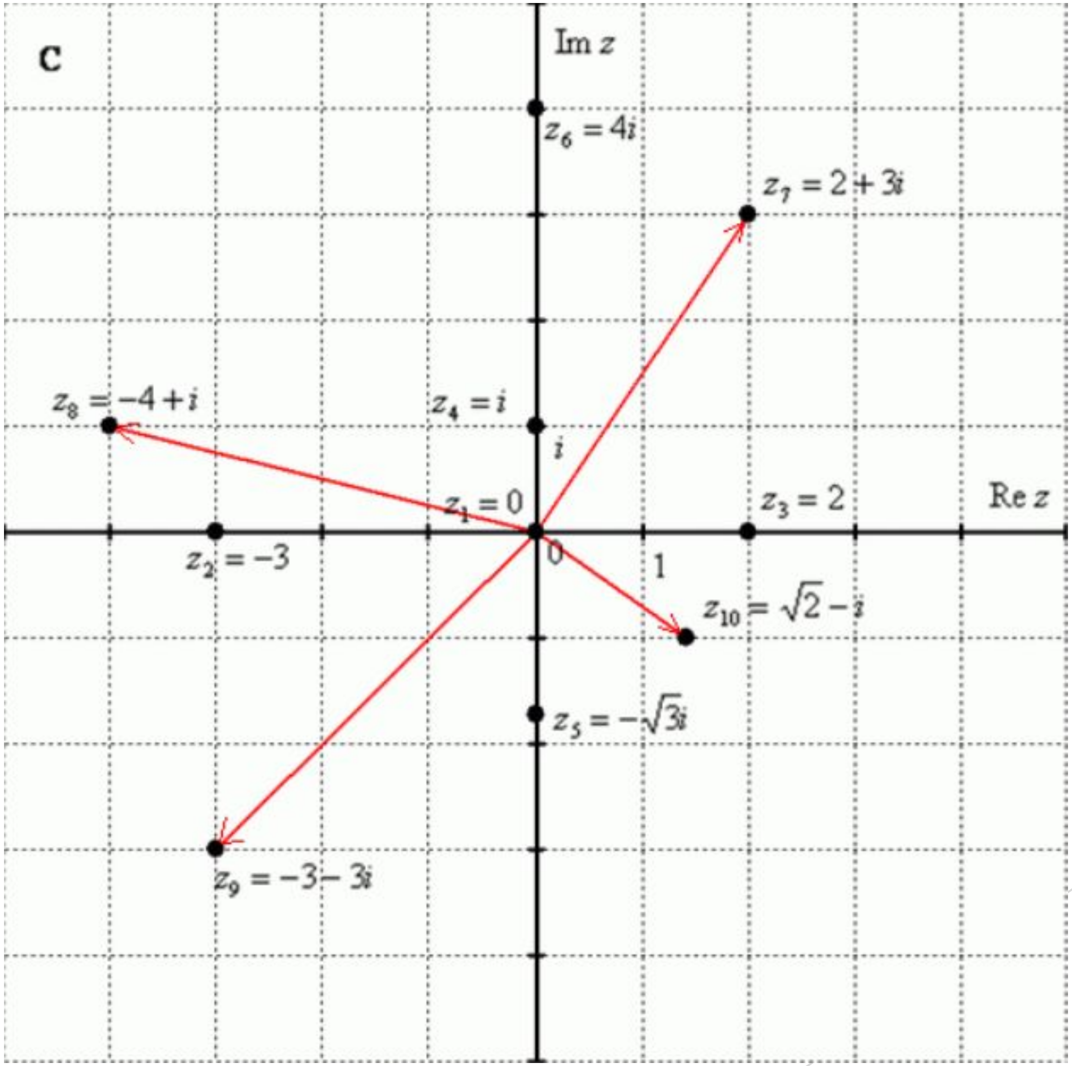
Проверка: $z_3 = 3(\cos\pi + i \sin\pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$

$z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$

$z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$



Действия над комплексными числами

Найти произведение и частное комплексных чисел:

$$z_1 = 2+3i, \quad z_2 = 1-4i$$

$$\boxed{= -1}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(1-4i) = 2+3i-8i-12i^2 =$$

$$= 2+3i-8i+12 = 14-5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-4i} = \frac{(2+3i)\cdot(1+4i)}{(1-4i)\cdot(1+4i)} = \frac{2+3i+8i+12i^2}{1^2+4^2} =$$

$$\frac{2+3i+8i-12}{17} = \frac{-10+11i}{17} = -\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$$

Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел

- $(3+17i)+(9+11i)=$
- $(2+6i)+(8+6i)=$
- $(69+18i)-(44+6i)=$
- $(324+16i)-(189+9i)=$

$(6+8i) : (4+2i)=$

$(16+3i) : (2+4i)=$

$(5+7i)*(10+5i)=$

$(4+5i)*(4+6i)=$

Примеры:

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме и изобразить точками на комплексной плоскости:

1.435. $-i$

1.438. $\frac{1-i}{1+i}$.

1.441. $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

1.435. $-i$

Решение.

Пусть $z = x + iy = -i$, то есть $x = 0,\ y = -1$. Тогда

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0, \qquad \sin\varphi = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

1.438. $\frac{1-i}{1+i}$.

Решение.

Запишем число $z = \frac{1-i}{1+i}$ в алгебраической форме:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Тригонометрическая форма числа $-i$ найдена в предыдущемпримере (1.435):

$z = -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

1.441. $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Решение.

Пусть $z=x+iy=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\pi 7$, то есть $x=1+\cos\frac{\pi}{7},\ y=\sin\pi 7$. Тогда

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{14}}=2\cos\frac{\pi}{14}.$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{|z|}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\cos\frac{\pi}{14}.$$

$$\sin\varphi=\frac{y}{|z|}=\frac{sin\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\sin\frac{\pi}{14}.$$

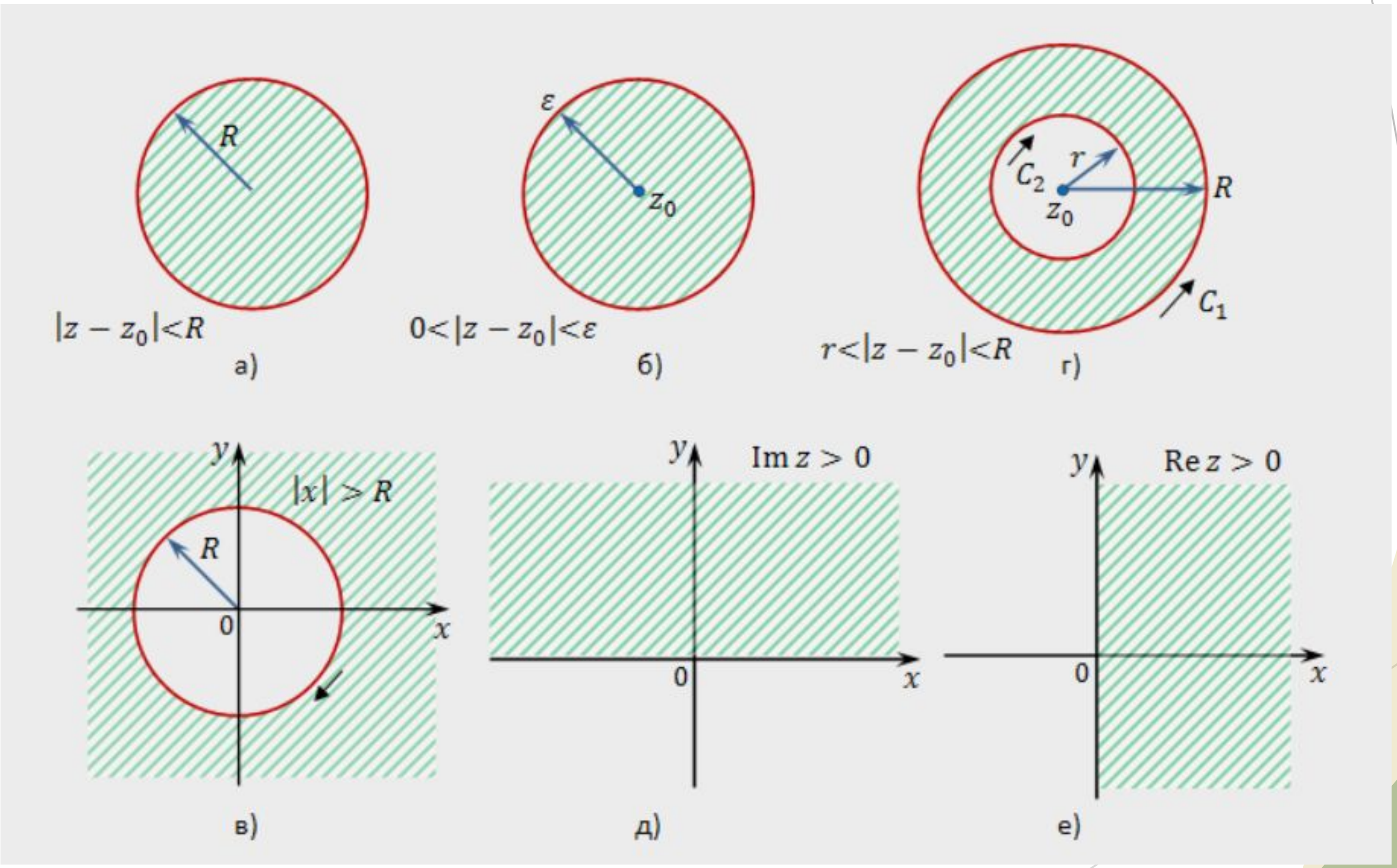
Таким образом, $\varphi=\frac{\pi}{14}$.

Отсюда находим показательную форму комплексного числа $z=x+iy=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\pi 7$:

$$z=2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right).$$

Ответ: $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$.

Области на комплексной плоскости



1. Круг радиуса R с центром в точке z_0 задается неравенством $|z-z_0|<R$. Это — открытое, связное множество, т.е. область. Область — ограниченная, носвязная; ее границей является окружность $|z-z_0|=R$ (рис. 1.12,а). В частности, круг $|z-z_0|<\varepsilon$ есть окрестность точки z_0: $O_\varepsilon(z_0)$. Заметим, что равенство $|z-z_0|\leqslant R$ определяет замкнутую область, т.е. область вместе с границей.

2. Проколотая окрестность точки z_0: $O_\varepsilon(z_0)\setminus z_0$ — круг с выброшенным центром задается неравенством $0<|z-z_0|<\varepsilon$. Это двусвязная, ограниченная бласть, граница которой состоит из двух компонент — окружности $|z-z_0|=\varepsilon$ и точки z_0 (рис. 1.12,б).

3. Окрестность бесконечно удаленной точки определяется как множество точек плоскости C, образами которых на сфере Римана являются точки, принадлежащие рестности точки N (см. рис. 1.12,а). Эта окрестность получается отсечением от сферы некоторой области плоскостью, перпендикулярной лучу ON. Границей этой рестности на сфере является окружность — пересечение сферы и плоскости. На плоскости C этой окружности соответствует также окружность, центр которой, евидно, находится в точке O; ее уравнение $|z|=R$. Сферической окрестности точки N будет соответствовать часть плоскости, границей которой является ружность $|z|=R$ и которая содержит бесконечно удаленную точку (образ точки N), эта область — внешность круга $|z|>R$ (рис. 1.12,в).

4. Кольцо с центром в точке z_0, радиус внешней окружности которого R и внутренней r, задается неравенством $r<|z-z_0|<R$ (рис. 1.12,г). Это — раниченная, двусвязная область, граница которой состоит из двух окружностей C_1: $|z-z_0|=R$ и C_2: $|z-z_0|=r$.

5. Верхняя полуплоскость плоскости C — множество точек, для которых $y>0$, т.е. в комплексной форме $\operatorname{Im} z>0$ (рис. 1.12,д); соответственно $\operatorname{Im} z<0$ — жняя полуплоскость. Неравенство $\operatorname{Re} z>0$ определяет правую полуплоскость (рис. 1.12,е), $\operatorname{Re} z<0$ — левую полуплоскость. Это односвязные, неограниченные бласти.