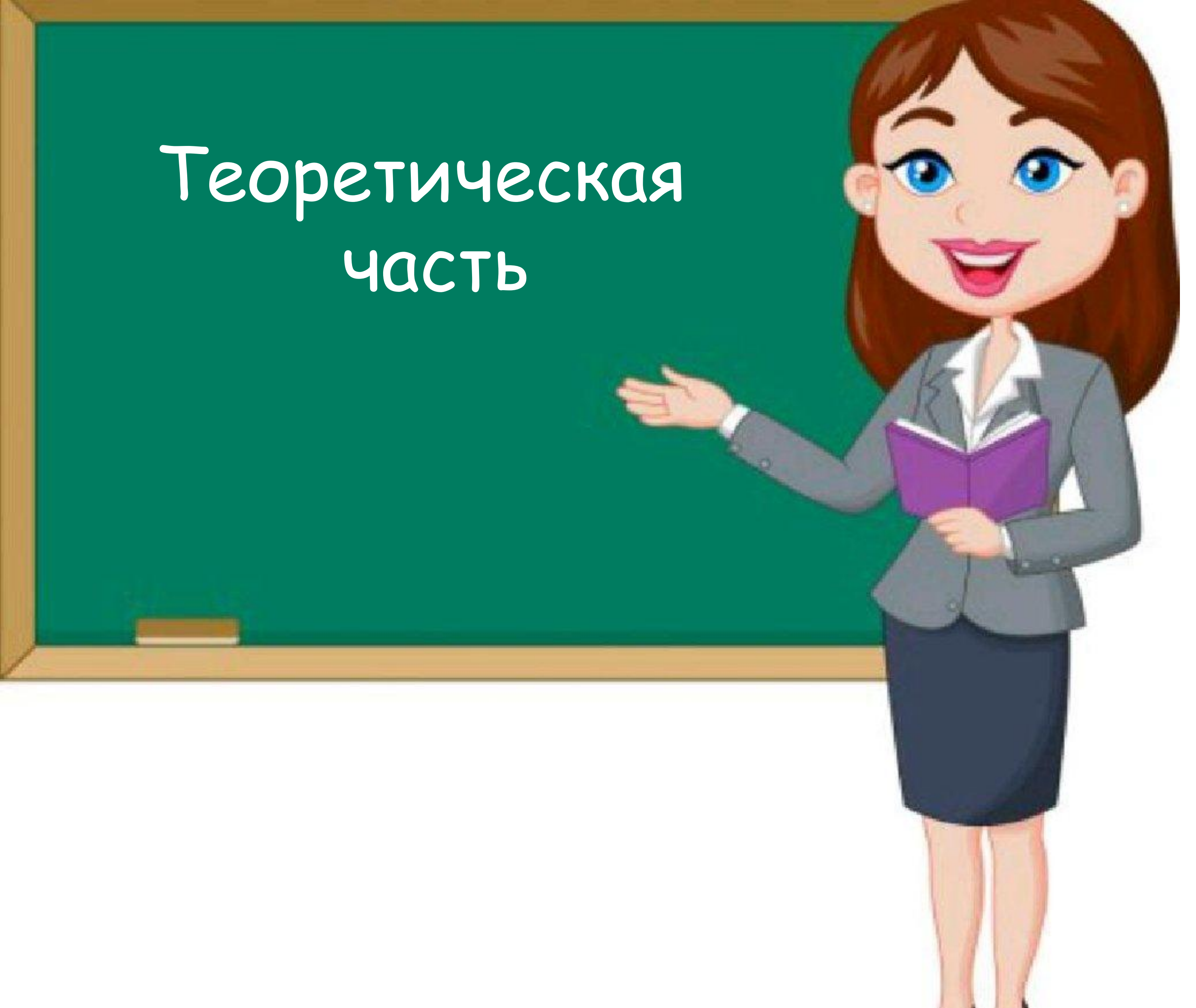
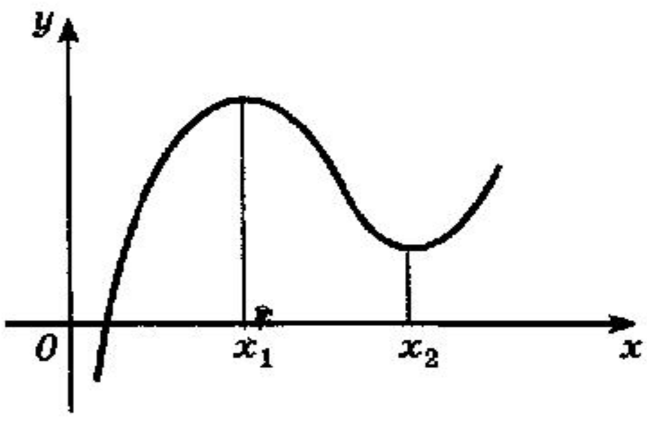
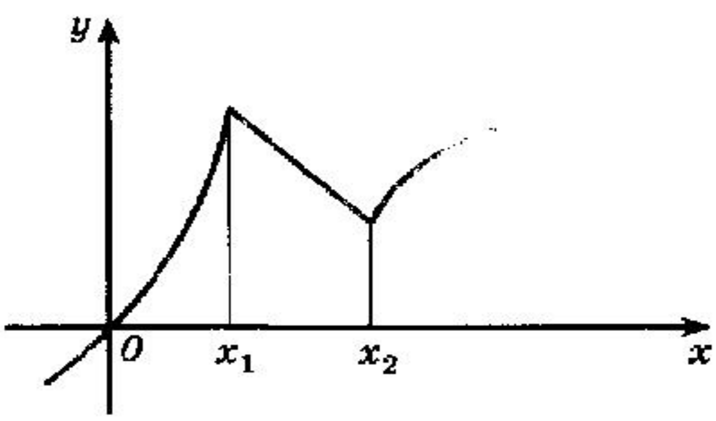
Экстремум функции. Признак постоянства функции. Исследование на экстремум


Теоретическая
часть

Определение.

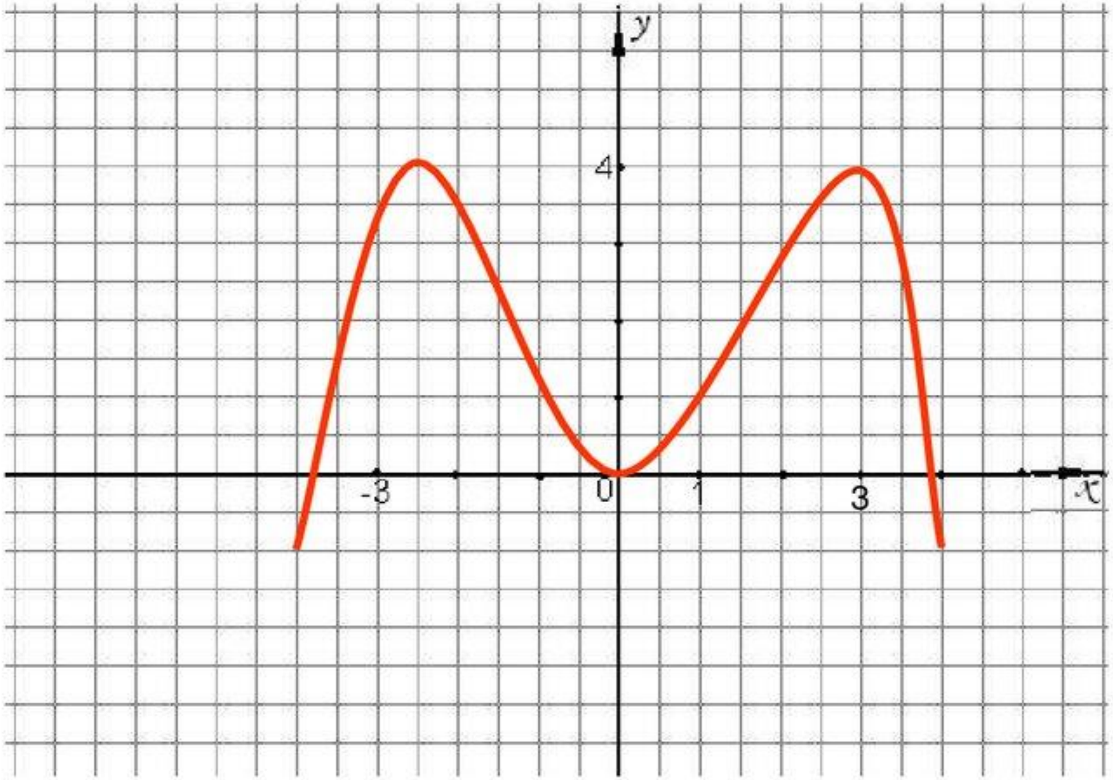
Внутренние точки области определения функции (D(f)), в которых производная равна нулю или не существует называются <u>критическими точками</u> этой функции (точки экстремума функции).





Точки экстремума

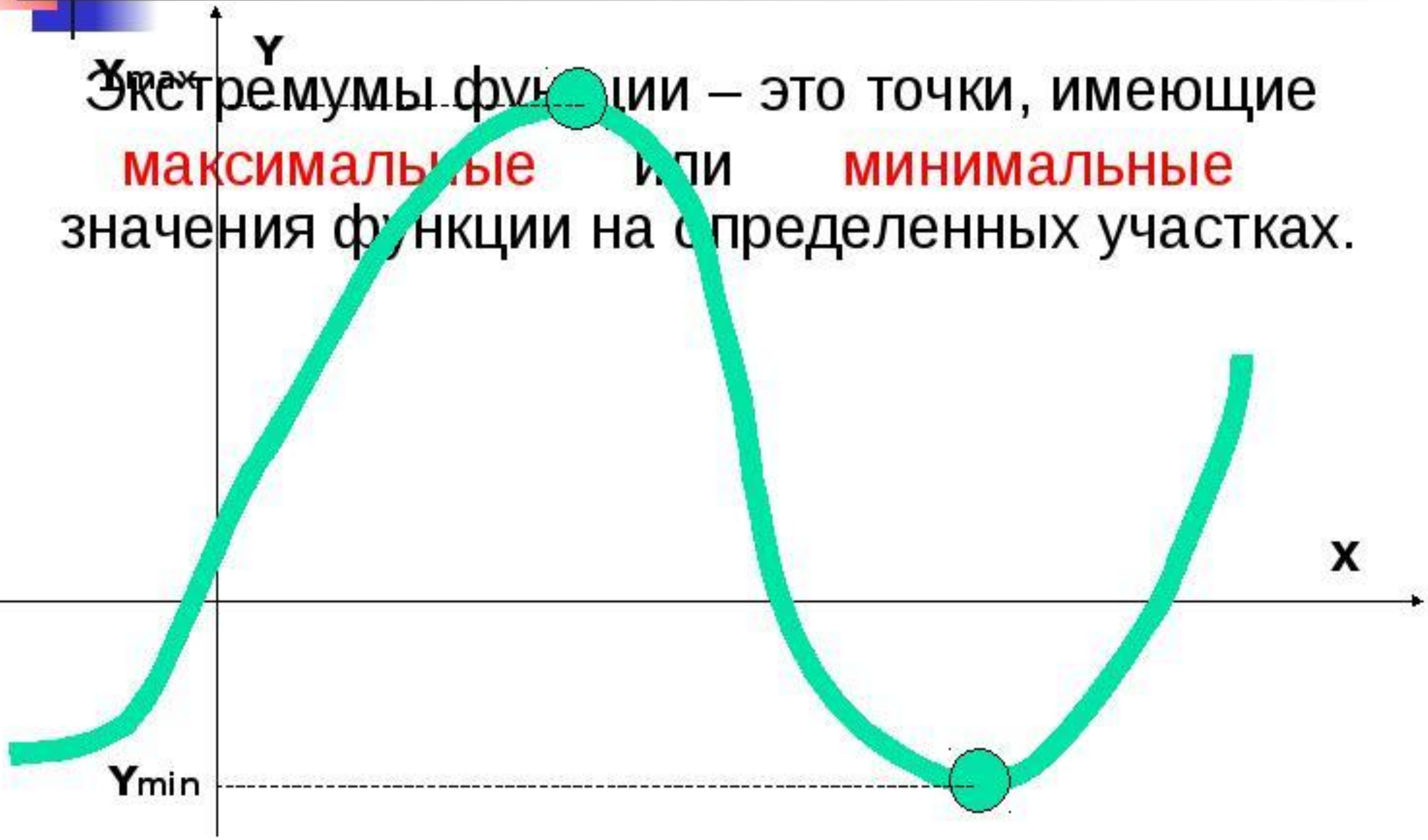
Точки области определения функции, в которых возрастание функции сменяется убыванием или, наоборот, убывание сменяется возрастанием, называются **точками экстремумов.**



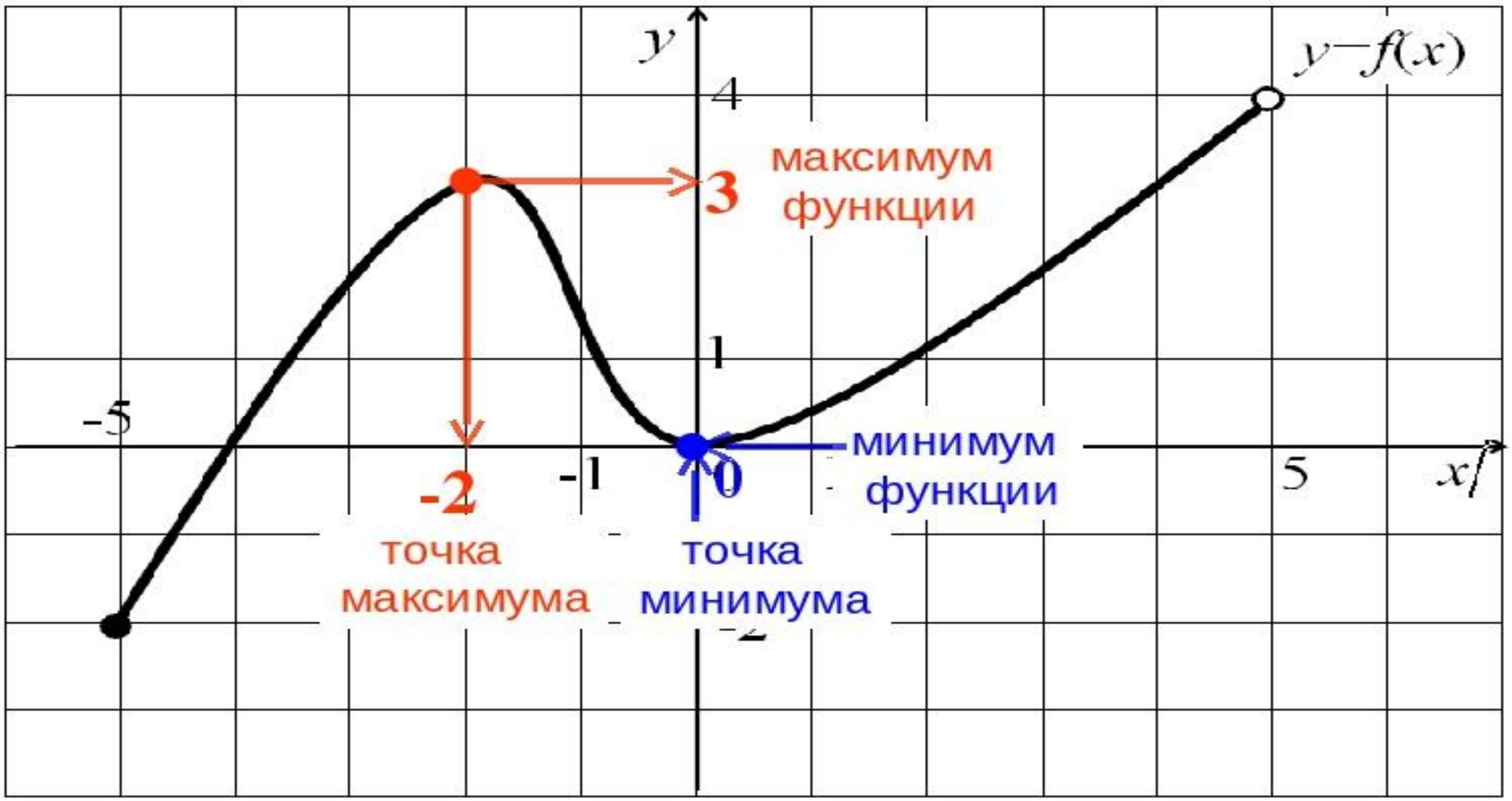
Это точки максимума и точки минимума.

Экстремумы функции

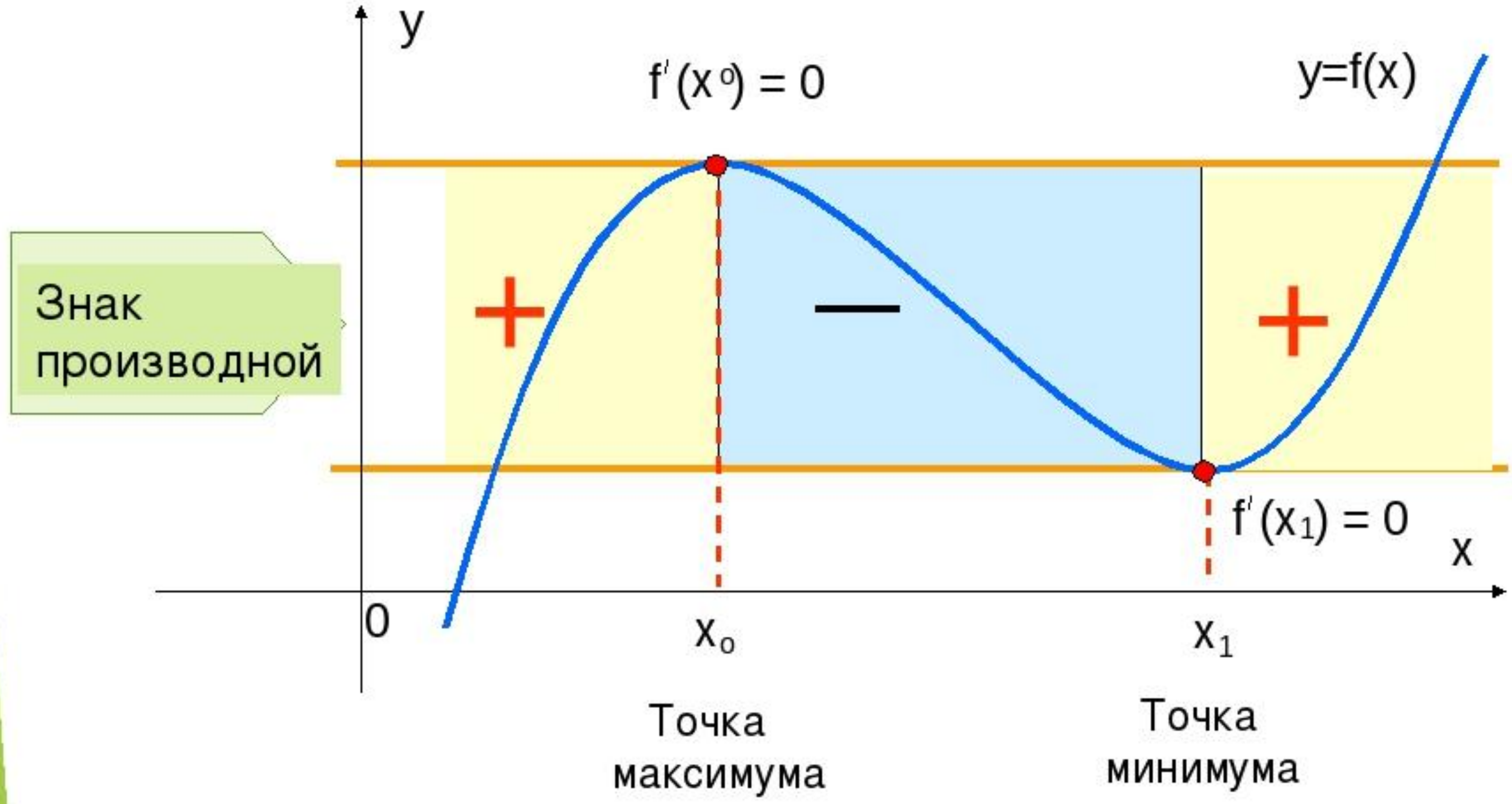
Экстремумы функции – это точки, имеющие **максимальные** или **минимальные** значения функции на определенных участках.



Экстремумы функции – «вершины» и «ямы» на графике функции (их характеристики по оси ОХ и оси Оу)



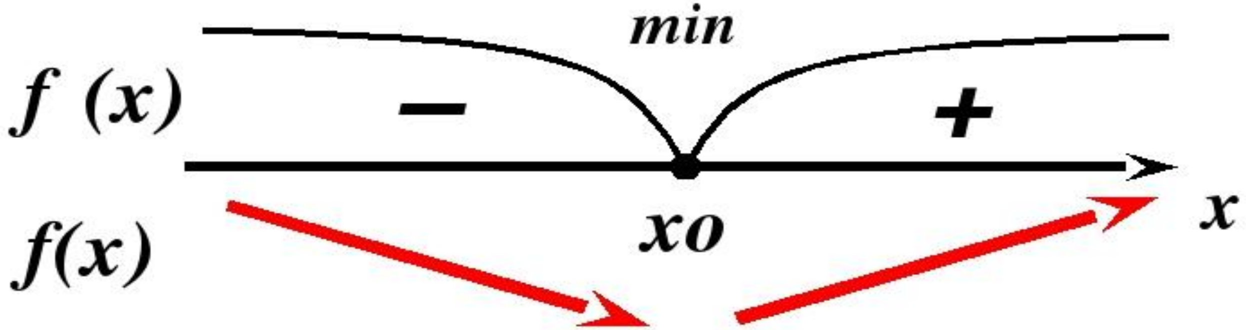
Точки максимума и минимума



Минимум функции

Точка хо называется точкой минимума функции f(x), если существует такая окрестность точки хо, что для всех х ≠ хо из этой окрестности выполняется неравенство f(x)> f(xо).

Если в точке хо производная функции f(x) меняет знак с «–» на «+», то хо – точка минимума функции f(x).

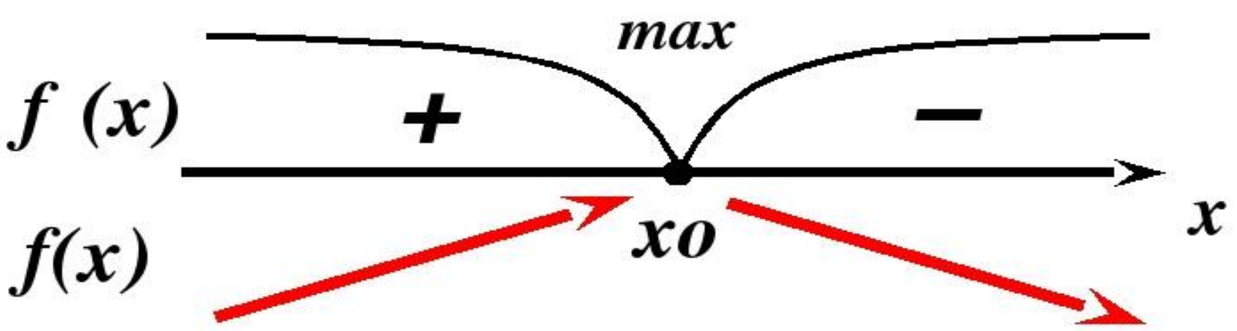


f(xо) – минимум функции

Максимум функции

Точка хо называется точкой максимума функции f(x), если существует такая окрестность точки хо, что для всех х ≠ хо из этой окрестности выполняется неравенство f(x)< f(xo).

Если в точке хо производная функции f(x) меняет знак с «+» на «–», то хо – точка максимума функции f(x).



f(xo) – максимум функции

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы:

1. Найти производную $f'(x)$
2. Найти стационарные точки ($f'(x) = 0$)
3. Отметить эти точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.

4. Сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

Найдём точки экстремума функции $y = x^2 - 2x - 1$

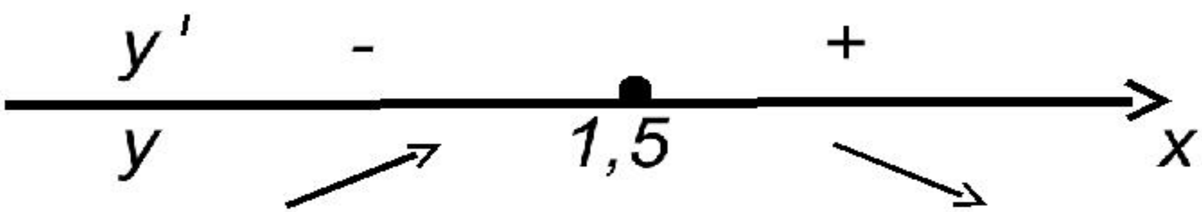
Решение

1) $y' = 2x - 2$

2) $2x - 2 = 0$

$2x = 2$

$x = 1,5$ – стационарная точка



Ответ: функция имеет максимум в точке $x = 1,5$

<u>Пример №2.</u> Найти экстремумы функции $y=-2x^3-3x^2+12x-4$

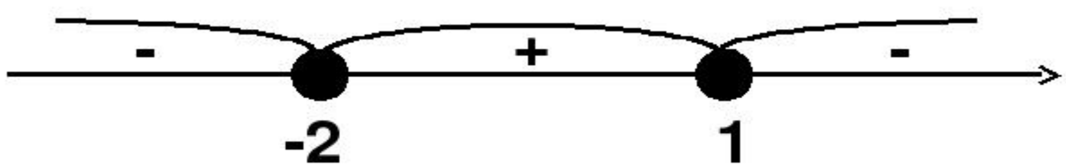
1. **<u>Область определения</u>**: R. Функция непрерывна.
2. **<u>Вычисляем производную :</u>** $y'=-6x^2-6x+12$.
3. **<u>Находим критические точки:</u>** $y'=0$.

$$-x^2-x+2=0$$

$$Д=1-4*(-1)*2=1+8=9$$

$$x_1=1;\ x_2=-2$$

4. **<u>Делим область определения на интервалы:</u>**

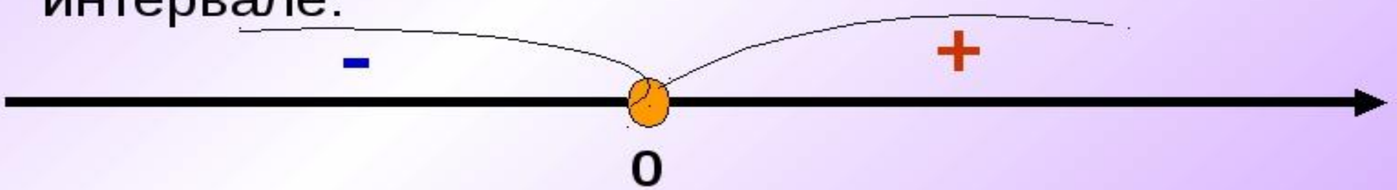


5. ***x=-2 – точка минимума***. *Найдём минимум функции* $\boldsymbol{y_{min}=-24}$. ***x=1 – точка максимума***. *Найдём максимум функции:* $\boldsymbol{y_{max}=3}$.

Исследовать на экстремум функцию $y=x^2+2$.

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.
3. Приравниваем её к нулю: $2x=0$, откуда $x=0$ – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



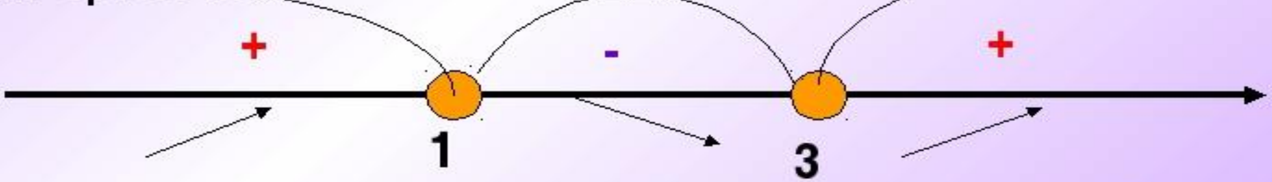
5. x =0 – точка минимума.

Найдём минимум функции $y_{min}=2$.

Исследовать на экстремум функцию $y=1/3x^3-2x^2+3x+1$.

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(1/3x^3-2x^2+3x+1)'=x^2-4x+3$.
3. Приравниваем её к нулю: $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$ – критические точки.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5. $x=1$ – точка максимума. Найдём максимум функции $y_{max}=7/3$.

$x=3$ – точка минимума. Найдём минимум функции: $y_{min}=1$.

Признак возрастания и убывания функции

Достаточный признак убывания функции

Если $f'(x)<0$ *в каждой точке интервала* $(a;b)$,

то функция f *убывает на интервале* $(a;b)$

Достаточный признак возрастания функции

Если $f'(x)>0$ *в каждой точкех интервала* $(a;b)$,

то функция f *возрастает на интервале* $(a;b)$

Как определить промежутки убывания и возрастания функции

Пример 1

Найдите промежутки возрастания и убывания функции

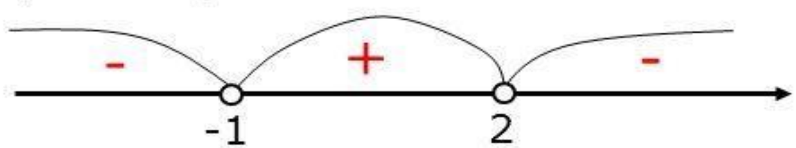
$f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3.$

Решение

1. $f'(x) = 12 + 6x - 6x^2.$

2. $f'(x) = 0, \quad 12 + 6x - 6x^2 = 0, \quad 6(2 - x)(x + 1) = 0;$

   $x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

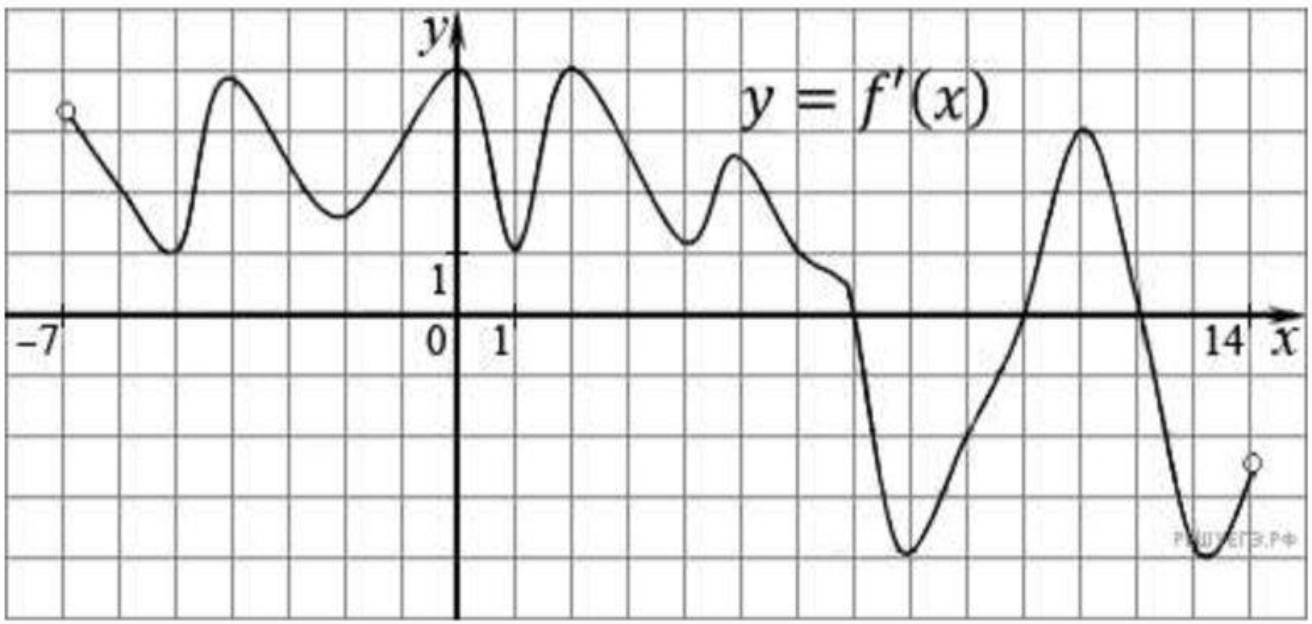
3. 

4. *Функция убывает на луче* $(-\infty; -1]$ *и на луче* $[2; +\infty)$.

   Функция возрастает на отрезке $[-1; 2]$.

Алгоритм

3. На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].



Исследовать на экстремум функцию $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$

Практическая часть

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

а) $y = 2x^2 - 7x + 1$;

в) $y = 4x^2 - 6x - 7$;

б) $y = 3 - 5x - x^2$;

г) $y = -3x^2 - 12x + 50$.

. а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$;

в) $y = x^3 - 7x^2 - 5x + 11$;

б) $y = x^3 - 27x + 26$;

г) $y = -2x^3 + 21x^2 + 19$.

. а) $y = -5x^5 + 3x^3$;

в) $y = x^4 - 50x^2$;

б) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13$;

г) $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$.

Тренажер: найти точки экстремума функции.

1) $y = x^2 - 4x$

2) $y = x^3 + 3x^2$

3) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

4) $y = (x+2)^2(3x-1)$

5) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

6) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

7) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

8) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

9) $y = x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

10) $y = \dfrac{2x}{x^2+9}$

11) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

12) $y = (x-1)\times\sqrt{x}$

13) $y = 2x^2 - \sqrt{x}$

14) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

15) $y = x^2 \times \sqrt{1-2x}$