

Точечные оценки неизвестных параметров распределения исследуемой случайной величины хороши в качестве первоначальных результатов обработки статистических данных. Их недостаток в том, что неизвестно, с какой точностью и надежностью они дают значение оцениваемого параметра. Особенно существенен вопрос о точности оценки при малых (менее 20) объемах выборки, так как при этом между истинным значением параметра и его оценкой может быть большое расхождение. Это обусловлено тем, что дисперсия состоятельной оценки обратно пропорциональна объему выборки.

Существует другой подход к оцениванию, при котором указывается интервал, накрывающий оцениваемый параметр с заданной наперед вероятностью. Такой подход называется интервальным оцениванием. Сразу отметим, что чем больше уверенность в том, что параметр лежит в интервале, тем шире будет интервал. Так что мечтать найти диапазон, в котором оцениваемый параметр лежит с вероятностью 1, бессмысленно – это вся область возможных значений параметра.

**Определение.** Оценка неизвестного параметра называется **интервальной**, если она определена двумя числами – концами интервалов.

Интервальная оценка позволяет судить о точности и надежности оценки параметра.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал  $(\theta_1, \theta_2)$ , относительно которого с заранее выбранной вероятностью  $\gamma$  можно сказать, что внутри этого интервала находится точное (истинное) значение оцениваемого параметра.



## Доверительные интервалы и доверительная вероятность

Определение. Интервал  $(\theta_1, \theta_2)$ , накрывающий с вероятностью  $\gamma$  истинное значение оцениваемого параметра  $\theta$ , называется **доверительным интервалом**, а вероятность  $\gamma$  – **доверительной вероятностью** или надежностью оценки.

В общем случае концы интервала, как статистики выборки, являются случайными величинами. И так как случайной величиной является не оцениваемый параметр  $\theta$ , а доверительный интервал, то правильно говорить не о вероятности попадания  $\theta$  в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал накроет  $\theta$ .

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещённой точечной оценки  $\tilde{\theta}$ , т.е. выбирается интервал вида  $(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta)$  такой, что

$$P\{\theta \in (\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta)\} = P\{|\theta - \tilde{\theta}| < \delta\} = \gamma.$$

Число  $\delta > 0$  характеризует точность оценки – чем оно меньше, тем меньше разность между истинным значением параметра и его оценкой, тем точнее оценка.

Надежность оценки (доверительная вероятность  $\gamma$ ) выбирается заранее. Её выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Значение  $\gamma$  принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда практически достоверно, что доверительный интервал накроет значение  $\theta$ . Вероятность непокрытия интервалом  $(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta)$  значения параметра  $\theta$ , равна  $\alpha = 1 - \gamma$ , и называется уровнем значимости.

Поясним смысл, который имеет заданная надежность. Надежность  $\gamma$  указывает на то, что если произведено достаточно большое число выборок, то из них  $\gamma \cdot 100\%$  определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключен, и лишь в  $(1 - \gamma) \cdot 100\%$  случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения, т.е. когда выборка производится из генеральной совокупности (случайной величины  $X$ ), имеющей нормальное распределение с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$ .

### **Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии**

Пусть СВ  $X$  имеет нормальное распределение  $N(a, \sigma^2)$ , где  $a$  – неизвестный параметр, а  $\sigma > 0$  известно. Требуется построить доверительный интервал для параметра  $a$  при заданной доверительной вероятности  $\gamma$ .

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – выборка, полученная в результате проведения  $n$  независимых наблюдений СВ  $X$ . Чтобы подчеркнуть случайный характер величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  перепишем их в виде  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , т.е. под  $X_i$  будем понимать значение СВ  $X$  в  $i$ -том опыте. Случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  независимы, закон распределения каждой из них совпадает с законом распределения СВ  $X$ , т.е.  $X_i \sim N(a, \sigma^2)$ . А это значит, что

$$M[X_1] = M[X_2] = \dots = M[X_n] = a, \quad D[X_1] = D[X_2] = \dots = D[X_n] = \sigma^2.$$

Выборочное среднее  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , являющееся несмещённой точечной оценкой параметра  $a$ , в силу устойчивости нормального распределения по суммированию также будет распределено по нормальному закону.

Параметры нормального распределения выборочного среднего – математическое ожидание и дисперсия, таковы:

$$M[\bar{X}] = a, \quad D[\bar{X}] = \sigma^2/n.$$

Действительно:

$$M[\bar{X}] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X] = \frac{na}{n} = a;$$

$$D[\bar{X}] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma,$$

где  $\gamma$  – заданная надежность. Пользуясь известной формулой для вероятности попадания нормально распределенной СВ в интервал, симметричный относительно её математического ожидания

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi_0(\delta/\sigma),$$

и, заменив в ней  $X$  на  $\bar{X}$  и  $\sigma$  на  $\sigma/\sqrt{n}$ , получим:

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi_0(\delta\sqrt{n}/\sigma) = 2\Phi_0(t) = \gamma, \quad \text{где } t = \delta\sqrt{n}/\sigma.$$

Из равенства  $t = \delta\sqrt{n}/\sigma$  следует, что  $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ , поэтому

$$P\left(|\bar{X} - a| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma,$$

или

$$P\left(\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной СВ  $X$  при известной дисперсии есть

$$\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

где  $t$  определяется из уравнения  $\Phi_0(t) = \gamma/2$ , т.е. как значение аргумента функции Лапласа, при котором она равна  $\gamma/2$ .

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью  $\gamma$  можно утверждать, что доверительный интервал  $\left(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right)$  покрывает неизвестный параметр  $a$ ; точность оценки равна  $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ .

Из формулы  $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ , определяющей точность оценки, можно сделать следующие выводы:

- 1) при возрастании объема выборки  $n$  число  $\delta$  убывает и, следовательно, **точность оценки увеличивается;**
- 2) увеличение надежности оценки  $\gamma = 2\Phi_0(t)$  приводит к увеличению значения  $t$  (функция Лапласа возрастающая функция), и, следовательно, к возрастанию  $\delta$ , т.е. к снижению точности. Другими словами, **увеличение надежности оценки влечет за собой уменьшение ее точности.**

Если требуется оценить математическое ожидание с наперед заданной точностью  $\delta$  и надежностью  $\gamma$ , то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по следующей из выражения  $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$  формуле:

$$n = t^2 \sigma^2 / \delta^2 .$$

Алгоритм построения доверительного интервала для математического ожидания при известной дисперсии  $\sigma^2$  по выборке объема  $n$ :

1. Вычисляется выборочное среднее  $\bar{x}$ .
2. По заданной надежности  $\gamma$  определяется значение  $t$ , как значение аргумента функции Лапласа, при котором она равна  $\gamma/2$ .
3. Вычисляется точность оценки  $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ .
4. Записывается доверительный интервал в виде  $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$ .

**Пример.** Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью  $\gamma=0,99$  неизвестного математического ожидания  $a$  нормальной случайной величины  $X$ , если среднее квадратическое отклонение СВ  $X$   $\sigma$  равно 4,4, выборочное среднее  $\bar{x}$ , определенное по выборке объема  $n=36$ , равно 10,2.

**Решение.** В нашем случае  $\Phi_0(t) = \frac{0,99}{2} = 0,495$ . По таблице для функции Лапласа находим  $t = 2,58$ . Следовательно,  $\delta = t\sigma/\sqrt{n} = \frac{2,58 \cdot 4,4}{\sqrt{36}} \approx 1,89$ . В соответствии с выражением для доверительного интервала

$$(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta),$$

получаем:  $(10,2 - 1,89; 10,2 + 1,89) = (8,31; 12,09)$ .

Таким образом, значения неизвестного математического ожидания  $a$  случайной величины  $X$ , согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют с вероятностью 0,99 неравенству  $(8,31 < a < 12,03)$ .



**Доверительный интервал для математического ожидания  
при неизвестной дисперсии**

Пусть СВ  $X$  имеет нормальное распределение  $N(a, \sigma^2)$ , где  $a$  и  $\sigma > 0$  неизвестны. Требуется построить доверительный интервал для параметра  $a$  при заданной доверительной вероятности  $\gamma$ .

Можно показать, что доверительный интервал для математического ожидания  $a$  в этом случае имеет вид:

$$\left( \bar{x} - t_\gamma S / \sqrt{n}, \bar{x} + t_\gamma S / \sqrt{n} \right),$$

где  $n$  – объем выборки,  $S$  – исправленное среднее квадратическое отклонение,  $t_\gamma$  – квантиль уровня  $(1 - \gamma)$  распределения Стьюдента при числе степеней свободы  $n - 1$ .

При неограниченном возрастании объема выборки распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому практически при  $n > 30$  можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

## Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения при неизвестных $a$ и $\sigma^2$

Пусть СВ  $X$  имеет нормальное распределение  $N(a, \sigma^2)$ , где  $a$  и  $\sigma > 0$  неизвестны. Требуется построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения  $\sigma$  при заданной доверительной вероятности  $\gamma$ .

Можно показать, что доверительный интервал для неизвестного  $\sigma$  имеет вид:

$$\left( \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_2}, \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_1} \right),$$

где  $n$  – объем выборки,  $S$  – исправленное среднее квадратическое отклонение. Квантили

$$\chi_1^2 = \chi_{\frac{1+\gamma}{2}; n-1}^2, \quad \chi_2^2 = \chi_{\frac{1-\gamma}{2}; n-1}^2$$

определяются по таблице критических точек распределения  $\chi_{\alpha, k}^2$  («хи-квадрат») при числе степеней свободы  $k = n - 1$  и значениях уровня значимости  $\alpha = (1 + \gamma)/2$  и  $\alpha = (1 - \gamma)/2$ .

Таблица значений  $\chi_{\alpha, k}^2$  составлена при числе степеней свободы  $k$  от 1 до 30. При расчете доверительного интервала при  $k > 30$  надо полагать

$$\chi_1^2 = 0,5(\sqrt{2k-1} - t), \quad \chi_2^2 = 0,5(\sqrt{2k-1} + t),$$

где  $t$  определяется как корень уравнения  $\Phi_0(t) = \gamma$ .