

Точечные оценки неизвестных параметров распределения исследуемой случайной величины хороши в качестве первоначальных результатов обработки статистических данных. Их недостаток в том, что неизвестно, с какой точностью и надежностью они дают значение оцениваемого параметра. Особенно существенен вопрос о точности оценки при малых (менее 20) объемах выборки, так как при этом между истинным значением параметра и его оценкой может быть большое расхождение. Это обусловлено тем, что дисперсия состоятельной оценки обратно пропорциональна объему выборки.

Существует другой подход к оцениванию, при котором указывается интервал, накрывающий оцениваемый параметр с заданной наперед вероятностью. Такой подход называется интервальным оцениванием. Сразу отметим, что чем больше уверенность в том, что параметр лежит в интервале, тем шире будет интервал. Так что мечтать найти диапазон, в котором оцениваемый параметр лежит с вероятностью 1, бессмысленно – это вся область возможных значений параметра.

Определение. Оценка неизвестного параметра называется **интервальной**, если она определена двумя числами – концами интервалов.

Интервальная оценка позволяет судить о точности и надежности оценки параметра.

Задачу интервального оценивания можно сформулировать так: по данным выборки построить числовой интервал (θ_1, θ_2) , относительно которого с заранее выбранной вероятностью γ можно сказать, что внутри этого интервала находится точное (истинное) значение оцениваемого параметра.



Доверительные интервалы и доверительная вероятность

Определение. Интервал (θ_1, θ_2) , накрывающий с вероятностью γ истинное значение оцениваемого параметра θ , называется **доверительным интервалом**, а вероятность γ – **доверительной вероятностью** или надежностью оценки.

В общем случае концы интервала, как статистики выборки, являются случайными величинами. И так как случайной величиной является не оцениваемый параметр θ , а доверительный интервал, то правильно говорить не о вероятности попадания θ в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал накроет θ .

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещённой точечной оценки $\tilde{\theta}$, т.е. выбирается интервал вида $(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta)$ такой, что

$$P\{\theta \in (\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta)\} = P\{|\theta - \tilde{\theta}| < \delta\} = \gamma.$$

Число $\delta > 0$ характеризует точность оценки – чем оно меньше, тем меньше разность между истинным значением параметра и его оценкой, тем точнее оценка.

Надежность оценки (доверительная вероятность γ) выбирается заранее. Её выбор зависит от конкретно решаемой задачи. Значение γ принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. Тогда практически достоверно, что доверительный интервал накроет значение θ . Вероятность непокрытия интервалом $(\tilde{\theta} - \delta, \tilde{\theta} + \delta)$ значения параметра θ , равна $\alpha = 1 - \gamma$, и называется уровнем значимости.

Поясним смысл, который имеет заданная надежность. Надежность γ указывает на то, что если произведено достаточно большое число выборок, то из них $\gamma \cdot 100\%$ определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключен, и лишь в $(1 - \gamma) \cdot 100\%$ случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Построим доверительные интервалы для параметров нормального распределения, т.е. когда выборка производится из генеральной совокупности (случайной величины X), имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ^2 .

Доверительный интервал для математического ожидания при известной дисперсии

Пусть СВ X имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$, где a – неизвестный параметр, а $\sigma > 0$ известно. Требуется построить доверительный интервал для параметра a при заданной доверительной вероятности γ .

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – выборка, полученная в результате проведения n независимых наблюдений СВ X . Чтобы подчеркнуть случайный характер величин x_1, x_2, \dots, x_n перепишем их в виде X_1, X_2, \dots, X_n , т.е. под X_i будем понимать значение СВ X в i -том опыте. Случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы, закон распределения каждой из них совпадает с законом распределения СВ X , т.е. $X_i \sim N(a, \sigma^2)$. А это значит, что

$$M[X_1] = M[X_2] = \dots = M[X_n] = a, \quad D[X_1] = D[X_2] = \dots = D[X_n] = \sigma^2.$$

Выборочное среднее $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, являющееся несмещённой точечной оценкой параметра a , в силу устойчивости нормального распределения по суммированию также будет распределено по нормальному закону.

Параметры нормального распределения выборочного среднего – математическое ожидание и дисперсия, таковы:

$$M[\bar{X}] = a, \quad D[\bar{X}] = \sigma^2/n.$$

Действительно:

$$M[\bar{X}] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X] = \frac{na}{n} = a;$$

$$D[\bar{X}] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma,$$

где γ – заданная надежность. Пользуясь известной формулой для вероятности попадания нормально распределенной СВ в интервал, симметричный относительно её математического ожидания

$$P\{|X - a| < \delta\} = 2\Phi_0(\delta/\sigma),$$

и, заменив в ней X на \bar{X} и σ на σ/\sqrt{n} , получим:

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi_0(\delta\sqrt{n}/\sigma) = 2\Phi_0(t) = \gamma, \quad \text{где } t = \delta\sqrt{n}/\sigma.$$

Из равенства $t = \delta\sqrt{n}/\sigma$ следует, что $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$, поэтому

$$P\left(|\bar{X} - a| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma,$$

или

$$P\left(\bar{X} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi_0(t) = \gamma.$$

В соответствии с определением доверительного интервала получаем, что доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной СВ X при известной дисперсии есть

$$\left(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

где t определяется из уравнения $\Phi_0(t) = \gamma/2$, т.е. как значение аргумента функции Лапласа, при котором она равна $\gamma/2$.

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right)$ покрывает неизвестный параметр a ; точность оценки равна $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$.

Из формулы $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$, определяющей точность оценки, можно сделать следующие выводы:

- 1) при возрастании объема выборки n число δ убывает и, следовательно, **точность оценки увеличивается;**
- 2) увеличение надежности оценки $\gamma = 2\Phi_0(t)$ приводит к увеличению значения t (функция Лапласа возрастающая функция), и, следовательно, к возрастанию δ , т.е. к снижению точности. Другими словами, **увеличение надежности оценки влечет за собой уменьшение ее точности.**

Если требуется оценить математическое ожидание с наперед заданной точностью δ и надежностью γ , то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по следующей из выражения $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$ формуле:

$$n = t^2 \sigma^2 / \delta^2 .$$

Алгоритм построения доверительного интервала для математического ожидания при известной дисперсии σ^2 по выборке объема n :

1. Вычисляется выборочное среднее \bar{x} .
2. По заданной надежности γ определяется значение t , как значение аргумента функции Лапласа, при котором она равна $\gamma/2$.
3. Вычисляется точность оценки $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$.
4. Записывается доверительный интервал в виде $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$.

Пример. Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью $\gamma=0,99$ неизвестного математического ожидания a нормальной случайной величины X , если среднее квадратическое отклонение СВ X σ равно 4,4, выборочное среднее \bar{x} , определенное по выборке объема $n=36$, равно 10,2.

Решение. В нашем случае $\Phi_0(t) = \frac{0,99}{2} = 0,495$. По таблице для функции Лапласа находим $t = 2,58$. Следовательно, $\delta = t\sigma/\sqrt{n} = \frac{2,58 \cdot 4,4}{\sqrt{36}} \approx 1,89$. В соответствии с выражением для доверительного интервала

$$(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta),$$

получаем: $(10,2 - 1,89; 10,2 + 1,89) = (8,31; 12,09)$.

Таким образом, значения неизвестного математического ожидания a случайной величины X , согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют с вероятностью 0,99 неравенству $(8,31 < a < 12,03)$.

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть СВ X имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$, где a и $\sigma > 0$ неизвестны. Требуется построить доверительный интервал для параметра a при заданной доверительной вероятности γ .

Можно показать, что доверительный интервал для математического ожидания a в этом случае имеет вид:

$$\left(\bar{x} - t_\gamma S / \sqrt{n}, \bar{x} + t_\gamma S / \sqrt{n} \right),$$

где n – объем выборки, S – исправленное среднее квадратическое отклонение, t_γ – квантиль уровня $(1 - \gamma)$ распределения Стьюдента при числе степеней свободы $n - 1$.

При неограниченном возрастании объема выборки распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому практически при $n > 30$ можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения при неизвестных a и σ^2

Пусть СВ X имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$, где a и $\sigma > 0$ неизвестны. Требуется построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ при заданной доверительной вероятности γ .

Можно показать, что доверительный интервал для неизвестного σ имеет вид:

$$\left(\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_2}, \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_1} \right),$$

где n – объем выборки, S – исправленное среднее квадратическое отклонение. Квантили

$$\chi_1^2 = \chi_{\frac{1+\gamma}{2}; n-1}^2, \quad \chi_2^2 = \chi_{\frac{1-\gamma}{2}; n-1}^2$$

определяются по таблице критических точек распределения $\chi_{\alpha, k}^2$ («хи-квадрат») при числе степеней свободы $k = n - 1$ и значениях уровня значимости $\alpha = (1 + \gamma)/2$ и $\alpha = (1 - \gamma)/2$.

Таблица значений $\chi_{\alpha, k}^2$ составлена при числе степеней свободы k от 1 до 30. При расчете доверительного интервала при $k > 30$ надо полагать

$$\chi_1^2 = 0,5(\sqrt{2k-1} - t), \quad \chi_2^2 = 0,5(\sqrt{2k-1} + t),$$

где t определяется как корень уравнения $\Phi_0(t) = \gamma$.