ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Следовательно, $f(x)+\varphi(x)=A+B+(\alpha(x)+\beta(x))$. Здесь $\alpha(x)+\beta(x)$ б.м.ф. как сумма б.м.ф По теореме о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x))=A+B$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 2. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$.

По теореме $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$.

имеем: $0 = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A - B$.

Отсюда $A - B = 0$, т. е. $A = B$.

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Доказательство аналогично предыдущему, проведем его без особых пояснений.

Так как $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = B$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, $\varphi(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф.

Следовательно, $f(x)\cdot\varphi(x) = (A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x))$, т. е.

$f(x)\cdot\varphi(x) = AB + (A\cdot\beta(x) + B\cdot\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x))$. Выражение в скобках есть б.м.ф.

Следствие Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)$.

$$\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) = \lim_{x\to x_0} c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x) = c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Теорема 4. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = \lim_{x\to x_0}\underbrace{(f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x))}_{n\text{ сомножителей}} = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0} f(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7) = \lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 7 =$

$$= 3\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 1} x + 7 = 3\cdot 1 - 2 + 7 = 8.$$

Теорема 5. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}\quad\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right).$$

Доказательство аналогично предыдущему. Из равенств

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\quad\text{и}\quad\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=B\neq 0$$

следуют соотношения $f(x)=A+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=B+\beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}\right)=\frac{A}{B}+\frac{B\cdot\alpha(x)-A\cdot\beta(x)}{B^2+B\cdot\beta(x)}.$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x\to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x-2\neq 0$ ($x\to 2$, но $x\neq 2$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{1}{2}.$$

Функция $2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=2$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)=4$.

Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y = \sin x$ при $x \to \infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема (о пределе промежуточной функции).
Если функ ция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = A,$$

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad \text{то} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Из равенств $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A, \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A,$

вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки x_0,

в одной из которых выполняется нера венство $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, т. е. $-\varepsilon<\varphi(x)-A<\varepsilon$,

а в другой $|g(x)-A|<\varepsilon$, т. е. $-\varepsilon<g(x)-A<\varepsilon$.

Пусть δ — меньшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда в δ-окрестности точки x_0 выполняются оба неравенства $-\varepsilon<\varphi(x)-A<\varepsilon$, и $-\varepsilon<g(x)-A<\varepsilon$.

Из неравенств $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, находим, что $\varphi(x)-A\leqslant f(x)-A\leqslant g(x)-A$.

С учетом неравенств $-\varepsilon<\varphi(x)-A<\varepsilon$, и $-\varepsilon<g(x)-A<\varepsilon$. из неравенства

$\varphi(x)-A\leqslant f(x)-A\leqslant g(x)-A$.

Мы доказали, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$,

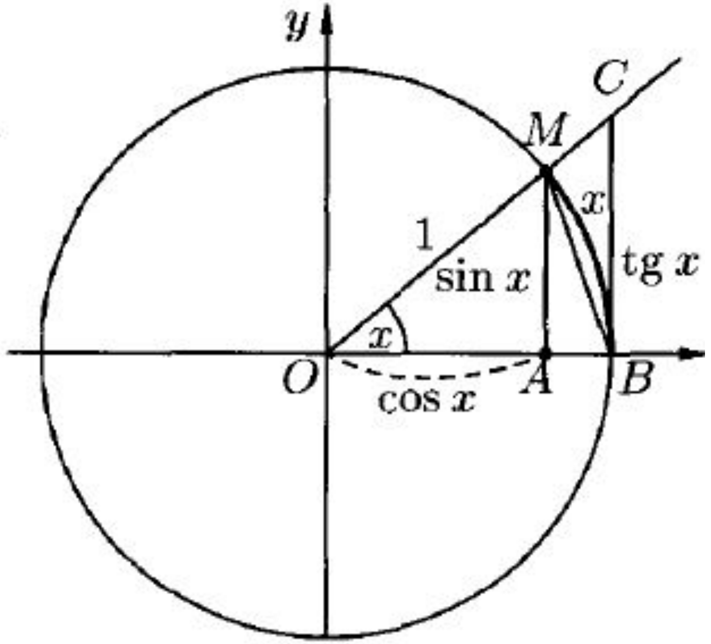
то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Теорема (о пределе монотонной функции).
Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел $\lim\limits_{\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ или ее правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$

Доказательство этой теоремы не приводим.

Следствие. Ограниченная монотонная последовательность x_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел.

Первый замечательный предел



При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,}$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство

Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга MB численно равна центральному углу x, $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, имеем $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$,

получим $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

Так как $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточ·ной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x\to0\\(x>0)}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to0\\(x<0)}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

вытекает равенство $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1,}$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 3x}{2x}$.

Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}} = \lim_{t\to0} \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Принципы применения первого замечательного предела

Напомним, что первый замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Очевидно, что предел не зависит от обозначения переменной, т.е. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}$. Обозначим $2x = t$, тогда при $x \to 0$ будет $t \to 0$,

и получим первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

Или в пределе $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{(x-3)}$ обозначим $x - 3 = t$, если $x \to 3$, $t \to 0$, и снова

получим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Вообще, $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0} \dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$, т.е.

1) если аргумент синуса и знаменатель представляют собой одну и ту же функцию и

2) она стремится к нулю,

то имеет место конструкция первого замечательного предела и этот предел равен единице.

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 2x}{x}$;

Решение. Подставляя предельное значение x, имеем:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{\sin\pi}{\pi/2} = \frac{0\cdot 2}{\pi} = 0.$$

Здесь нет неопределенности, поэтому сразу получен ответ.

Пример Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$;

Решение. представим дробь в виде $\dfrac{\sin 2x}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot \sin 2x$. функция $\sin 2x$ при $x \to \infty$ предела вообще не имеет, но является ограниченной $(-1 \le \sin 2x \le 1)$, а множитель $1/x$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой функцией.

Воспользуемся Свойством бесконечно малых функций: произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция, предел которой равен нулю. Получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin 2x = 0.$$

Пример Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

Решение. после подстановки нуля вместо x получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Проделаем следующие операции:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2.$$

ПРИМЕР . Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$;

Решение. аргумент синуса и знаменатель дроби совпадают, они равны $x-1$, но при $x \to 2$ имеем $x-1 \to 1$, а не к нулю, т.е. второе условие конструкции первого замечательного предела не выполнено. Поэтому первого замечательного предела здесь нет, более того, здесь нет и неопределенности.

Подставляя $x = 2$, получим ответ:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{\sin(2-1)}{2-1} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1.$$

ПРИМЕР . Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$;

Решение. оба условия, входящие в конструкцию первого замечательного предела выполнены:

1) аргумент синуса и знаменатель дроби совпадают: $x-1$ и

2) при $x \to 1$ разность $x-1 \to 0$, следовательно, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$.

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$;

Решение. Используя тригонометрическую формулу $1-\cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$ и конструкцию первого замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(5x/2)}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x/2)}{x}\right)^2;$$

«достраиваем» выражение в скобке до первого замечательного предела, умножая знаменатель и числитель на 5/2, получим

$$2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5}{2}\sin\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\right)^2 = \frac{25}{2}\cdot 1^2 = \frac{25}{2}.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x-\alpha)+\sin\alpha}{x^2+\alpha x}$;

Решение. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$ (проверьте!). Применяем тригонометрическую формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, в знаменателе выносим x за скобки:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-\alpha)+\sin\alpha}{x^2+\alpha x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{x-\alpha+\alpha}{2}\cos\dfrac{x-\alpha-\alpha}{2}}{x(x+\alpha)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\nearrow 0}{\sin\dfrac{x}{2}}\;\overbrace{\cos\dfrac{x-2\alpha}{2}}^{\nearrow\cos(-\alpha)}}{\underset{0\swarrow}{x}\;\underset{\searrow\alpha}{(x+\alpha)}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{учитывая, что при } x\to 0\\ \cos\dfrac{x-2\alpha}{2}\to\cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ x+\alpha\to\alpha,\text{ получим}\end{array}\right\|=\frac{2\cos\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x}=\frac{2\cos\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)\cdot 2}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha}{2\alpha}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}=\frac{\cos\alpha}{\alpha},$$ т.к. второй множитель представляет собой первый замечательный предел.

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\cos^2 x-\cos^2 a}$;

Решение. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$ В числителе стоит выражение, содержащее иррациональности; в соответствии с приемом, изложенным выше, домножаем его (и знаменатель) на сопряженное выражение $\sqrt{x}+\sqrt{a}$. Знаменатель раскладываем на множители по формуле разности квадратов.

$$\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\cos x-\cos a)(\cos x+\cos a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})};$$

в числителе получилась формула разности квадратов, в знаменателе при $x\to a$ $\cos x+\cos a\to 2\cos a$, $\sqrt{x}+\sqrt{a}\to 2\sqrt{a}$; к выражению $\cos x-\cos a$ применим формулу разности косинусов:

$$\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\cos x-\cos a)(\cos x+\cos a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\cos a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\lim_{x\to a}\frac{x-a}{-2\sin\dfrac{x-a}{2}\sin\dfrac{x+a}{2}}$$

Числитель полученного выражения разделим и умножим на 2, а также учтем, что при $x \to a$ имеем $A = \dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} \to 1$, поэтому $\dfrac{\dfrac{x-a}{2}}{\sin\dfrac{x-a}{2}} = \dfrac{1}{A} \to 1$, кроме того, $\sin\dfrac{x+a}{2} \to \sin a$ при $x \to a$. Итак,

$$\frac{1}{2\cos a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\lim_{x\to a}\frac{x-a}{-2\sin\dfrac{x-a}{2}\sin\dfrac{x+a}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{a}\,2\cos a\sin a}\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{x-a}{2}\cdot 2}{\sin\dfrac{x-a}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{4\sqrt{a}\,2\sin 2a} = -\frac{1}{2\sqrt{a}\sin 2a}.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{6x-\pi}$;

Решение. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. При $x\to\dfrac{\pi}{6}$ будет $x-\dfrac{\pi}{6}\to 0$, поэтому в знаменателе выносим 6 за скобки, в числителе выносим 2 за скобки и представляем $\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{6x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin x}{x-\frac{\pi}{6}}=\left\|\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\|=$$

$-$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}}{x-\frac{\pi}{6}};$$

$\cos\frac{\pi/6+x}{2} \to \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \to \frac{\pi}{6}$, в знаменателе выносим знак «–» за скобки, делим и умножаем на 2, «выстраивая» первый замечательный предел:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\frac{\pi/6-x}{2}}{-\frac{\pi/6-x}{2}\cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\frac{\pi/6-x}{2}}{\frac{\pi/6-x}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{\cos 4x}-1}{x^2-(\pi+1)x+\pi}$.

Решение. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\sqrt{\cos 4x}+1$; квадратный трехчлен раскладываем на множители, найдя предварительно его корни: $x^2-(\pi+1)x+\pi=0$, по теореме Виета $x_1+x_2=\pi+1$, $x_1\cdot x_2=\pi \;\Rightarrow\; x_1=\pi$, $x_2=1$ или по обычной формуле корней квадратного уравнения $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

$$D=b^2-4ac=(\pi+1)^2-4\pi=\pi^2-2\pi+1=(\pi-1)^2;$$

$$x_1=\frac{\pi+1+\pi-1}{2}=\pi;\quad x_2=\frac{\pi+1-\pi+1}{2}=1.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{\cos 4x}-1}{x^2-(\pi+1)x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\sqrt{\cos 4x}-1)(\sqrt{\cos 4x}+1)}{(\sqrt{\cos 4x}+1)(x-1)(x-\pi)}$;

в числителе формула разности квадратов, в знаменателе $\sqrt{\cos 4x}+1\to 2$, $x-1\to\pi-1$ при $x\to\pi$;

получаем: $\dfrac{1}{2(\pi-1)}\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 4x-1}{x-\pi}$;

в числителе выносим знак «–» за скобки и применяем формулу $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\frac{1}{2(\pi-1)}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 4x-1}{x-\pi}=-\frac{1}{2(\pi-1)}\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 2x}{x-\pi}=\left\|\begin{array}{l}\text{замена } x-\pi=t,\\ \text{тогда } t\to 0 \text{ при } x\to\pi\end{array}\right\|=-\frac{1}{\pi-1}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 2(\pi+t)}{t}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{по формуле приведения}\\ \sin 2(\pi+t)=\sin(2\pi+2t)=\sin 2t\end{array}\right\|=-\frac{1}{\pi-1}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 2t}{t}=-\frac{1}{\pi-1}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t}{2t}\cdot\lim_{t\to 0}\sin 2t=$$

$$=\left\|\frac{\sin 2t}{2t}\to 1 \text{ при } t\to 0\right\|=-\frac{1}{\pi-1}\cdot 2\cdot 1\cdot 0=0.$$

ПРИМЕР. Показать, что: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;

Решение. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Представляем функцию в виде

$\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\dfrac{\sin x/\cos x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$. Получим: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$.

ПРИМЕР. Показать, что: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$.

Решение. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Обозначаем $\arcsin x=t$, отсюда $x=\sin t$

$(-\pi/2\le t\le \pi/2)$, причем, если $x\to 0$, то $t=\arcsin x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Замечание. В дальнейшем будем считать, что нам известны пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$

Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Докажем, что к числу e стремится и функция $x_n = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ $(x \in \mathbb{R})$:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

1. Пусть $x \to +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leqslant x < n+1$, где $n = [x]$ — это целая часть x. Отсюда следует $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leqslant 1+\frac{1}{n}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Поэтому, согласно

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пре делов

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. Пусть $x \to -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{1} = e \cdot 1 = e.$$

Из равенств $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

вытекает равенство $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.}$

Если в равенстве $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.}$ положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \to 0$ при $x \to \infty$), оно

запишется в виде $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.}$

Равенства

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \quad \text{и} \quad \boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.}$$

называются ***вторым замечатель ным пределом.***
Они широко используются при вычислении пре делов.
В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e. Функция $y = e^x$ называется ***экспоненци альной***, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

Принципы применения второго замечательного предела

1) Оба равенства по сути выражают одну математическую модель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\boxed{(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \to e \quad \text{при} \quad \alpha(x)\to 0}.$$

В формуле в основании степени стоит единица плюс бесконечно малая функция, а показатель степени является величиной в точности обратной к этой бесконечно малой функции (т.е. бесконечно большой функцией).

Действительно, в равенстве функция $1/x \to 0$ при $x \to \infty$, т.е. является некоторой бесконечно малой функцией при $x \to \infty$, а x, стоящий в показателе степени есть функция, обратная для $1/x$, и при $x \to \infty$ она является бесконечно большой функцией. В равенстве функция x, стоящая в скобке, стремится к нулю при $x \to 0$, а показатель $1/x$ – тоже функция, обратная для x, и $1/x \to \infty$ при $x \to 0$, т.е. является бесконечно большой функцией.

2) $a^{+\infty}=\infty,$ если $a>1;$ $a^{+\infty}=0,$ если $0<a<1.$

$a^{-\infty}=0,$ если $a>1;$ $a^{-\infty}=\infty,$ если $0<a<1.$

Если же $a\to 1$, то выражение a^{∞} представляет собой неопределенность, которую будем записывать в виде 1^{∞}, а раскрывать при помощи второго замечательного предела.

ПРИМЕР. Вычислить: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{2x+3}$;

Решение. При подстановке бесконечности вместо x получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2x+3}=\left(1-\frac{5}{\infty}\right)^{\infty}=(1-0)^{\infty}=1^{\infty}$$ – неопределенность.

Будем формировать модель $\boxed{(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\to e \quad \text{при} \quad \alpha(x)\to 0}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{2x+3}=\left\|\begin{array}{l}\text{в скобке должно быть } 1+\alpha(x),\\ \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to\infty\end{array}\right\|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{2x+3};$$

здесь $\alpha(x)=\dfrac{-5}{x}\to 0$ при $x\to\infty$. Для получения соотношения $\boxed{(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\to e \quad \text{при} \quad \alpha(x)\to 0}$.

в показателе степени надо иметь выражение, обратное для $-5/x$, т.е. $x/(-5)$. Домножим и разделим на него показатель степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}\cdot\frac{-5}{x}\cdot(2x+3)} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}}\right]^{\frac{-5(2x+3)}{x}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{здесь использовано} \\ \text{правило } a^{nm} = (a^n)^m \end{array} \right\| = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(2x+3)}{x}} = e^{-10},$$

т.к. в квадратных скобках имеем моделн $\boxed{(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \to e \quad \text{при} \quad \alpha(x)\to 0}$.

а выражение $\dfrac{-5(2x+3)}{x} \to -10$ при $\quad x\to\infty$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{5x}}$;

Подставляя $x=0$, получим неопределенность вида 1^{∞}:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{5x}}=\left(1-\frac{0}{7}\right)^{\frac{1}{0}}=(1-0)^{\infty}=1^{\infty}$, следовательно, опять можно формировать модель $\boxed{(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\to e \quad \text{при} \quad \alpha(x)\to 0}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{7}\right)^{\frac{7}{-x}\cdot\frac{-x}{7}\cdot\frac{1}{5x}}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{7}\right)^{\frac{7}{-x}}\right]^{\overline{35}}=e^{-\frac{1}{35}}.$$

Пример Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{5x}$.

Подставляя $x=0$, убеждаемся в том, что в данном случае нет неопределенности, и сразу приходим к ответу:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{5x}=(1-0)^0=1^0=1.$$

Пример Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x}$

Решение. а) Неопределенность вида 1^{∞}: при $x\to\infty$ $1+5x\to\infty$ и $\frac{3x+2}{3x+4}\to\frac{3}{3}=1$ (т.к. числитель и знаменатель имеют одинаковые высшие степени (x^1), предел дроби равен отношению коэффициентов при x).

Формируем модель ; сначала выделяем в скобке единицу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4-4+2}{3x+4}\right)^{1+5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+4}+\frac{-2}{3x+4}\right)^{1+5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+4}\right)^{1+5x};$$

Пример . Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2.$$

Пример $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+3}\right)^x$

Здесь имеем неопределенность вида (1^∞). Применим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3+4}{2x+3}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{4}\cdot\frac{4x}{2x+3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x}{2x+3}}=e^2$$

Пример $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n+1}$.

Здесь имеем неопределенность вида (1^∞). Применим второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2(3n+1)}{n}}=e^6$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ *при* $x \to \infty$

Как было показано в предыдущем пункте, вычисление любого предела от элементарной функции при $x \to a$ следует начинать с подстановки в функцию вместо x значения a.

В некоторых случаях при этом получается выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$, называемое неопределенностью по той причине, что результат его нельзя вычислить, надо находить предел, который может быть равен ∞, нулю, любому другому числу или не существовать, т.е. не определен заранее.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ и точку x_0. «Процессом» будем называть изменение значения функции $f(x)$ при приближении ее аргумента к x_0. Пусть в окрестности некоторой точки какая-либо функция является бесконечно большой. Тогда ее бесконечное возрастание можно трактовать как происходящий при $x \to x_0$ «процесс», в котором функция неограниченно увеличивается. Та же функция при стремлении аргумента к другой точке может быть бесконечно малой, т.е. ее бесконечное убывание может трактоваться как «процесс», при котором функция уменьшается, приближаясь к значению нуль.

Тогда в неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ имеется два «процесса»: неограниченно увеличивается и числитель, и знаменатель. Очевидно, результат зависит от взаимосоотношения этих процессов. Об этом будет сказано ниже. А пока для выяснения неопределенности можно предложить следующее: вынести за скобки в числителе и знаменателе высшую степень x каждого из них, а затем воспользоваться свойствами пределов функций, аналогично тому, как это делалось при вычислении пределов последовательностей.

ПРИМЕР Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x+3}{2+x+5x^2}$;

Решение. Высшие степени x в числителе и знаменателе – соответственно x^3 и x^2. Выносим их за скобки, затем сокращаем дробь на x^2 и пользуемся правилами вычисления пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x+3}{2+x+5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+5\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+5\right)}\cdot\lim_{x\to\infty}x=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{т.к. при } x\to\infty \text{ дроби } \dfrac{2}{x^2},\dfrac{3}{x^3},\\ \dfrac{2}{x^2},\dfrac{1}{x} \text{ стремятся к нулю, то}\end{array}\right\|=\frac{4+0+0}{0+0+5}\cdot\lim_{x\to\infty}x=\frac{4}{5}\cdot\infty=\infty.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2+3x+5x^3}$;

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2+3x+5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}+5\right)}=\frac{1+0}{0+0+5}=\frac{1}{5}.$$

ПРИМЕР Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x+3}{x^3+5x^4}$.

Решение. этом примере высшие степени числителя и знаменателя соответственно x^2 и x^4 (выносим их за скобки):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+3}{x^3+5x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(\dfrac{1}{x}+5\right)}=\frac{4-0+0}{0+5}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{4}{5}\cdot 0=0.$$

Замечание. Сравним высшие степени x числителей и знаменателей в дробях примера и обратим внимание на зависимость полученных ответов от этих степеней:

а) высшая степень числителя x^3, знаменателя – x^2, т.е. в числителе степень выше, при этом предел дроби равен ∞;

б) высшие степени x в числителе и знаменателе одинаковы (x^3), при этом предел дроби равен 4/5, т.е. отношению коэффициентов при высших степенях x числителя и знаменателя;

в) высшая степень числителя x^3, знаменателя – x^4, т.е. в знаменателе степень выше, при этом предел равен 0.

–

Выводы. Сравнивая высшие степени x числителя и знаменателя в неопределенностях вида $\frac{\infty}{\infty}$, получаем:

1. **∞, если степень выше в числителе;**
2. **0, если степень выше в знаменателе;**
3. **отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя, если они равны.**

В простейших случаях будем пользоваться этими выводами.

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{4x^2+1}}$;

Решение. Делим числитель и знаменатель на x, подводя x под корни второй, третьей и четвертой степени:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^3}}}{\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^4}}+\sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+1/x^2}+\sqrt[3]{1/x}}{\sqrt[4]{1/x^3}+\sqrt{4+1/x^2}}=\frac{\sqrt{3}+0}{0+\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Конечно, можно было воспользоваться Выводами , а именно: высшая степень и числителя, и знаменателя – $\sqrt{x^2}$, т.е. x^1, поэтому в ответе будет стоять отношение коэффициентов перед ними: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} 5^{\frac{4-x}{5+3x}}$;

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} 5^{\frac{4-x}{5+3x}} = 5^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x}{5+3x}} = 5^{-\frac{1}{3}}$, т.к. высшие степени числителя и знаменателя совпадают, отношение коэффициентов при них равно $-\frac{1}{3}$. Здесь не дается обоснование перехода от предела показательной функции к пределу ее показателя. Правомерность подобного перехода для этой и других непрерывных функций будет рассмотрена

Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[4]{5x^4+1}}{2+4x}$ (два предела)

Решение. В подкоренном выражении выносим x^4 за скобки и извлекаем корень, в знаменателе выносим за скобку x:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{5x^4+1}}{2+4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt[4]{5+\dfrac{1}{x^4}}}{x\left(\dfrac{2}{x}+4\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[4]{5+\dfrac{1}{x^4}}}{\dfrac{2}{x}+4}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{4}=\left\|\begin{array}{l}\nearrow\underline{\text{при } x\to+\infty}\\ \searrow\underline{\text{при } x\to-\infty}\end{array}\right\|\begin{array}{l}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}1=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{4},\\ =\dfrac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{x}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{4}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)=-\dfrac{\sqrt[4]{5}}{4}.\end{array}$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ при $x \to a$

В выражении вида $\frac{0}{0}$ стоящий в числителе 0 означает, что числитель уменьшается, при этом дробь тоже уменьшается, стоящий же в знаменателе 0 указывает, что знаменатель уменьшается, при этом дробь увеличивается.

Напомним, что вычисление любого предела начинается с подстановки в функцию вместо независимой переменной того значения, к которому она стремится. Если получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия в некоторых случаях используются известные из курса элементарной математики теорема Безу и следствия из нее, а именно:

1. Если число a является корнем многочлена относительно x, то этот многочлен делится без остатка на разность $x - a$.

2. Если число a является корнем многочлена относительно x, то этот многочлен может быть представлен в виде произведения двух множителей: разности $x - a$ и некоторого многочлена.

Из этих утверждений следует, что многочлены, стоящие в числителе и знаменателе рассматриваемой дроби, имеют общий множитель, на который дробь можно сократить. После этого неопределенность может исчезнуть, в противном случае надо повторить процедуру. В частных случаях для разложения на множители можно использовать другие методы (формулы сокращенного умножения, вынесение общего множителя за скобки и т.п.).

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x^2-2x+1}$;

Решение. $\dfrac{0}{0}$.

Числитель и знаменатель должны иметь общий множитель $(x-1)$. Действительно, вынося в числителе за скобки общий множитель x и используя формулу разности квадратов, а в знаменателе применяя формулу квадрата разности, получим этот множитель $(x-1)$, на который и сократим дробь:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)}{x-1}=\left[\frac{1\cdot 2}{0}\right]=\infty.$$

Несмотря на то, что запись дроби с нулем в знаменателе не является вполне корректной, мы будем позволять себе ее и в дальнейшем. Строго надо было бы использовать Замечание, согласно которому функция, обратная к бесконечно малой функции, стоящей в данном случае в знаменателе, является бесконечно большой: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

Заметим, что правило вычисления предела произведения двух функций использовано здесь правомерно в силу Замечания.

ПРИМЕР Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x^4 + 24}$;

Решение. Для разложения числителя на множители используем формулу: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни трехчлена, которые находятся

по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Трехчлен $2x^2 - x - 10$ имеет корни $x_1 = -2$,

$x_2 = 5/2$, и раскладывается на множители следующим образом:

$$2x^2 - x - 10 = 2(x + 2)(x - \frac{5}{2}) = (x + 2)(2x - 5).$$

Знаменатель, согласно теореме Безу, делится без остатка на разность $x - (-2) = x + 2$.

Напомним эту операцию, <u>не забыв делимое и делитель</u> расположить по убывающим степеням x:

1) первый член делимого $-x^4$ делим на первый член делителя x и результат $-x^3$ записываем в частном;

2) $-x^3$ умножаем на делитель и записываем под делимым;

3) вычитаем из делимого выражение, стоящее под ним, записывая результат по убывающим степеням x;

4) снова повторяем процедуру с выражением, получившимся в результате вычитания, пока не получим в остатке 0.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,-x^4+x^3+24 & x+2 \\
\underline{-x^4-2x^3} & -x^3+3x^2-6x+12 \\
-\,3x^3+24 & \\
\underline{3x^3+6x^2} & \\
-\,-6x^2+24 & \\
\underline{-6x^2-12x} & \\
-\,12x+24 & \\
\underline{12x+24} & \\
0 &
\end{array}
$$

Теперь, используя следствие из теоремы Безу, получим: $-x^4+x^3+24=(x+2)(-x^3+3x^2-6x+12)$. В результате имеем:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-x-10}{x^3-x^4+24}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x-5)}{(x+2)(-x^3+3x^2-6x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2x-5}{-x^3+3x^2-6x+2}=-\frac{9}{34}.$$

Вычисление пределов, содержащих иррациональности

Иногда при наличии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (или $\infty - \infty$, которая будет разбираться ниже) функция содержит в числителе или знаменателе иррациональные выражения типа $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ и т.п. Вспоминая формулы сокращенного умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$, будем домножать числитель и знаменатель дроби на сопряженные выражения, в результате чего функции, составляющие неопределенность, превратятся в рациональные.

ПРИМЕР Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$;

Решение. имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

а) Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и раскладывая квадратный трехчлен на множители (корни $x_1=1$, $x_2=4$), получим:

$$\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(x-4)\underbrace{(\sqrt{x}+2)}_{\searrow 4}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-1)(x-4)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-1)(x-4)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to4}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

Фигурной скобкой выделено выражение, имеющее конечный предел, в данном случае равный 4. Таким же обозначением будем пользоваться и в дальнейшем.

ПРИМЕР Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

Решение. имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

б) Для числителя сопряженным будет выражение $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$, при умножении на которое получим формулу разности кубов; сопряженным для знаменателя будет выражение $\sqrt{x}+1$, при умножении на которое получим формулу разности квадратов. Итак, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и так же числитель и знаменатель – на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)\overbrace{(\sqrt{x}+1)}^{\nearrow 2}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}_{\searrow 3}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{(\sqrt{x})^2-1^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 1}1=\frac{2}{3}.$$

ПРИМЕР Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Решение. имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Выражение, сопряженное числителю, есть $\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}$, сопряженным для знаменателя будет выражение $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1$. Поступая так же, как в предыдущем примере, имеем:

$$\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+11})(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11})\overbrace{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}^{\nearrow 3}}{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)\underbrace{(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11})}_{\searrow 6}}=\frac{3}{6}\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+10})^2-(\sqrt{2x+11})^2}{(\sqrt[3]{x})^3+1^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x+10-2x-11}{x+1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{-x-1}{x+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}1=-\frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}}$;

Решение. Неопределенность вида 1^{∞}, «формируем» число *e:*

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+(-\sqrt[3]{\sin x})\right)^{\frac{1}{-\sqrt[3]{\sin x}}\cdot\frac{-\sqrt[3]{\sin x}}{1}\cdot\frac{2}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{т.к. } -\sqrt[3]{\sin x}\cdot\dfrac{2}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{-2\sqrt[3]{\sin x}\cos x}{\sin x} = \\ = \dfrac{-2\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \to \left(\dfrac{-2\cdot 1}{0}\right) \to -\infty \quad \text{при} \quad x\to 0 \end{array} \right\| = e^{-\infty} = 0, \qquad \text{т.к. } e > 1.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}$;

Решение. Неопределенности нет:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}} = (1-0)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} 0}} = 1^{\frac{3}{\infty}} = 1^0 = 1.$$

ПРИМЕР Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{3x}}$.

Решение. Неопределенность вида 1^{∞}, «строим» число e:

$$\lim_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0}(1+(1-\cos x))^{\frac{1}{3x}} = \left\| \begin{matrix} \text{проверка: при } x\to 0 \\ 1-\cos x\to 0 \end{matrix} \right\| = \lim_{x\to 0}(1+(1-\cos x))^{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{3x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x}} = \left\| \text{т.к. } 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \text{ то} \right\| =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}\cdot\sin\frac{x}{2}} = \left\| \frac{\sin(x/2)}{x/2}\to 1 \text{ при } x\to 0 \right\| = e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}} = e^{0} = 1.$$

Неопределенности вида $\infty - \infty$ *и* $0 \cdot \infty$

Когда возникают неопределенности вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$, обычно достаточно теми или иными способами преобразовать заданное выражение в дробь, после чего получаются уже разобранные выше неопределенности $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞} (или неопределенности вообще не будет). Проиллюстрируем это примерами.

ПРИМЕР . Вычислить предел: $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3}{x^2-1}-\frac{x^3+1}{x^2-x}\right);$$

Решение. Подставляя ∞ вместо x, получаем неопределенность вида $\infty-\infty$: при $x\to\infty$ $\dfrac{x^3+3}{x^2-1}\to\infty$ и $\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\to\infty$

Приводим дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3}{(x-1)(x+1)}-\frac{x^3+1}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x-x^4-x^3-x-1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+2x-1}{x^3-x}=-1,$$

ПРИМЕР . Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3+3}{x^2-1}-\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\right)$.

Решение Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$: при $x\to 1$ $\dfrac{x^3+3}{x^2-1}\to\left(\dfrac{4}{0}\right)\to\infty$

и $\dfrac{x^3+1}{x^2-x}\to\left(\dfrac{2}{0}\right)\to\infty$. Снова приводим к общему знаменателю, получаем:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^3+2x-1}{x^3-x}$. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

разложим числитель и знаменатель на множители.

Один из них известен это $(x-1)$. Другой множитель числителя

найдем при помощи «деления углом»:

$$\begin{array}{r|l} -x^3+2x-1 & x-1 \\ -\underline{-x^3+x^2} & -x^2-x+1 \\ -x^2+2x & \\ -\underline{-x^2+x} & \\ x-1 & \\ -\underline{x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Тогда $-x^3+2x-1=(x-1)(-x^2-x+1)$,

в знаменателе вынесем x за скобки и

применим формулу разности квадратов;

в результате получим:

$$\frac{-x^3+2x-1}{x^3-x}=\frac{(x-1)(-x^2-x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{-x^2-x+1}{x(x+1)}$$

и, следовательно, при $x \to 1$ имеем: $\dfrac{-x^2-x+1}{x(x+1)} \to \dfrac{-1-1+1}{1(1+1)}=-\dfrac{1}{2}$.

ПРИМЕР . Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right) \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right);$$

Решение. И при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$ имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. В соответствии с изложенным выше методом нахождения пределов от выражений, содержащих иррациональности, выражение, стоящее под знаком предела, умножаем и делим на сопряженное к нему. В результате получаем дробь:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\frac{x^2+2x-x^2+2x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}.$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Сравнивая высшие степени числителя и знаменателя, убеждаемся в том, что они равны, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при них. Но числитель положителен при $x \to +\infty$ и отрицателен при $x \to -\infty$, знаменатель же положителен как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2|x|} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 2;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{2|x|} = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -2.$$

ПРИМЕР . Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. Подставляя $+\infty$ вместо x, имеем неопределенность вида $\infty-\infty$

Вычисляем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

При $x\to-\infty$ неопределенности нет, и сразу получаем ответ

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=-\infty-\infty=-\infty. \blacksquare$$

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$;

Решение. а) При подстановке $x=0$ получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Представляя далее данное произведение в виде дроби, получим:

$$\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)};$$

при $x\to 0$ $\cos(x/2)\to 1$, а оставшееся выражение приводим к первому замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x/2}{\sin(x/2)} = 2, \quad \text{т.к. } \frac{x/2}{\sin(x/2)}\to 1 \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2} = 2$.

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x}\ln(1+2\sin x)$.

Решение. Подстановка $x=0$ дает: $\dfrac{1}{\sin 0}\ln(1+2\sin 0)=\dfrac{1}{0}\ln(1+0)=\infty\cdot 0$ – неопределенность.

Используем правило $n\log_a b=\log_a b^n$, тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln(1+2\sin x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+2\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Под знаком логарифма при $x\to 0$ имеем неопределенность $(1+0)^{1/0}=1^{\infty}$.

Раскрываем ее с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}\cdot 2}=\ln\lim_{x\to 0}\left((1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}}\right)^{2}=\ln e^{2}=2.$$

Заметим, что при вычислении предела использовалась непрерывность логарифмической функции.