

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О
ПРЕДЕЛАХ.
РАСКРЫТИЕ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$. Здесь $\alpha(x) + \beta(x)$ б.м.ф. как сумма б.м.ф. По теореме о связи функции, ее предела и б.м.ф. можно записать $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 2. Функция может иметь только один предел при $x \rightarrow x_0$.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$.

По теореме $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$.

имеем: $0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A - B$.

Отсюда $A - B = 0$, т. е. $A = B$.

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

Доказательство аналогично предыдущему, проведем его без особых пояснений.

Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, $\varphi(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф.

Следовательно, $f(x) \cdot \varphi(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x))$, т. е.

$f(x) \cdot \varphi(x) = AB + (A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x)\beta(x))$. Выражение в скобках есть б.м.ф.

Следствие Постоянный множитель можно выносить за знак

предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Теорема 4. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$. В частности,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{(f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x))}_{n \text{ сомножителей}} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$$

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 7)$.

Решение:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 7 = \\ &= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 7 = 3 \cdot 1 - 2 + 7 = 8. \end{aligned}$$

Теорема 5. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right).$$

Доказательство аналогично предыдущему. Из равенств

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B \neq 0$$

следуют соотношения $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Тогда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} \right) = \frac{A}{B} + \frac{B \cdot \alpha(x) - A \cdot \beta(x)}{B^2 + B \cdot \beta(x)}.$$

Второе слагаемое есть б.м.ф. как частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел.

$$\text{Поэтому } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ т. е. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x \rightarrow 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида $\frac{0}{0}$* . Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x - 2 \neq 0$ ($x \rightarrow 2$, но $x \neq 2$):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 16)}{(x - 2)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 16}{x - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 16)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4)} = \frac{2 + 16}{2 - 4} = -9.$$

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5}$.

Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$* . Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})} = \frac{1}{2}. \quad \text{Функция } 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$$

есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}) = 2$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}) = 4$.

Признаки существования пределов

Не всякая функция, даже ограниченная, имеет предел. Например, функция $y = \sin x$ при $x \rightarrow \infty$ предела не имеет. Во многих вопросах анализа бывает достаточно только убедиться в существовании предела функции. В таких случаях пользуются признаками существования предела.

Теорема (о пределе промежуточной функции).

Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A,$$
$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x), \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Из равенств $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$,

вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют две окрестности δ_1 и δ_2 точки x_0 , в одной из которых выполняется неравенство $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$, а в другой $|g(x) - A| < \varepsilon$, т. е. $-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon$.

Пусть δ — меньшее из чисел δ_1 и δ_2 . Тогда в δ -окрестности точки x_0 выполняются оба неравенства $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$, и $-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon$.

Из неравенств $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, находим, что $\varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq g(x) - A$.

С учетом неравенств $-\varepsilon < \varphi(x) - A < \varepsilon$, и $-\varepsilon < g(x) - A < \varepsilon$. из неравенства $\varphi(x) - A \leq f(x) - A \leq g(x) - A$.

Мы доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon$,

то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Теорема (о пределе монотонной функции).

Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена при $x < x_0$ или при $x > x_0$, то существует соответственно ее левый предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ или ее правый предел } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

Доказательство этой теоремы не приводим.

Следствие. Ограниченная монотонная последовательность x_n ,
 $n \in \mathbb{N}$, имеет предел.

Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

называемый *первым замечательным пределом*.

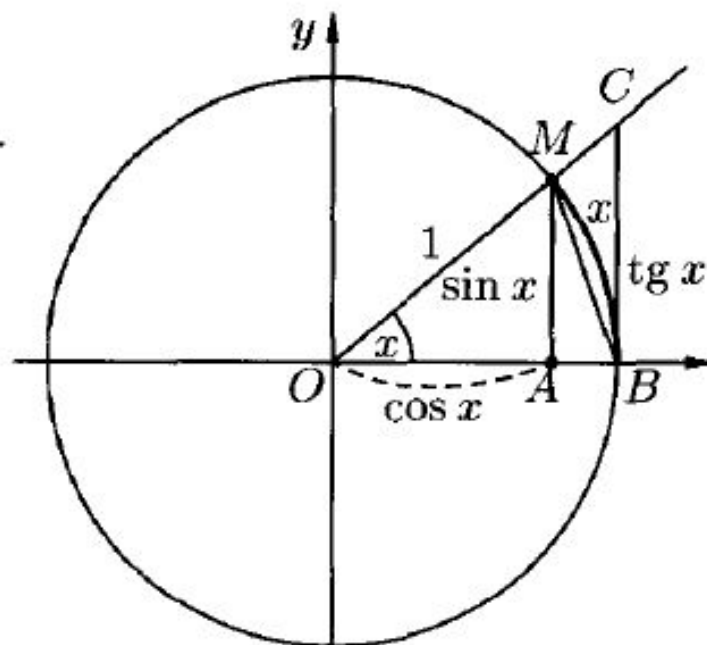
Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство

Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x . Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга

MB численно равна центральному углу x , $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, имеем

$S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2} \sin x > 0$,

$$\text{получим } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ или } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x < 0)}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

вытекает равенство

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,}$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$.

Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2 \cdot \frac{t}{3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Принципы применения первого замечательного предела

Напомним, что первый замечательный предел имеет вид: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Очевидно, что предел не зависит от обозначения переменной, т.е. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$. Обозначим $2x = t$, тогда при $x \rightarrow 0$ будет $t \rightarrow 0$,

и получим первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Или в пределе $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)}$ обозначим $x-3 = t$, если $x \rightarrow 3$, $t \rightarrow 0$, и снова

получим первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Вообще, $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$, т.е.

1) если аргумент синуса и знаменатель представляют собой одну и ту же функцию и

2) она стремится к нулю,

то имеет место конструкция первого замечательного предела и этот предел равен единице.

ПРИМЕР : Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x}$;

Решение. Подставляя предельное значение x , имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{\sin \pi}{\pi/2} = \frac{0 \cdot 2}{\pi} = 0.$$

Здесь нет неопределенности, поэтому сразу получен ответ.

Пример Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$;

Решение. представим дробь в виде $\frac{\sin 2x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin 2x$. функция $\sin 2x$ при $x \rightarrow \infty$

предела вообще не имеет, но является ограниченной ($-1 \leq \sin 2x \leq 1$),

а множитель $1/x$ при $x \rightarrow \infty$ является бесконечно малой функцией.

Воспользуемся Свойством бесконечно малых функций: произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция, предел которой равен нулю. Получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \sin 2x = 0.$$

Пример Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$;

Решение. после подстановки нуля вместо x получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Проделаем следующие операции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2.$$

ПРИМЕР : Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$;

Решение. аргумент синуса и знаменатель дроби совпадают, они равны $x - 1$, но при $x \rightarrow 2$ имеем $x - 1 \rightarrow 1$, а не к нулю, т.е. второе условие конструкции первого замечательного предела не выполнено. Поэтому первого замечательного предела здесь нет, более того, здесь нет и неопределенности.

Подставляя $x = 2$, получим ответ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{\sin(2-1)}{2-1} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$.

ПРИМЕР : Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$;

Решение. оба условия, входящие в конструкцию первого замечательного предела выполнены:

1) аргумент синуса и знаменатель дроби совпадают: $x - 1$ и

2) при $x \rightarrow 1$ разность $x - 1 \rightarrow 0$, следовательно, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$.

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$;

Решение. Используя тригонометрическую формулу

$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 (\alpha/2)$ и конструкцию первого замечательного предела,

получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 (5x/2)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(5x/2)}{x} \right)^2;$$

«достраиваем» выражение в скобке до первого замечательного предела,

умножая знаменатель и числитель на $5/2$, получим

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{5}{2} \sin \frac{5}{2} x}{\frac{5}{2} x} \right)^2 = \frac{25}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{5}{2} x}{\frac{5}{2} x} \right)^2 = \frac{25}{2} \cdot 1^2 = \frac{25}{2}.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \alpha) + \sin \alpha}{x^2 + \alpha x}$;

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$ (проверьте!). Применяем тригонометрическую

формулу $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, в знаменателе выносим x за скобки:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \alpha) + \sin \alpha}{x^2 + \alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x - \alpha + \alpha}{2} \cos \frac{x - \alpha - \alpha}{2}}{x(x + \alpha)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{\nearrow 0}{\sin \frac{x}{2}} \overbrace{\cos \frac{x - 2\alpha}{2}}^{\nearrow \cos(-\alpha)}}}{\underset{0 \swarrow}{x} \underset{\searrow \alpha}{(x + \alpha)}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{учитывая, что при } x \rightarrow 0 \\ \cos \frac{x - 2\alpha}{2} \rightarrow \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ x + \alpha \rightarrow \alpha, \text{ получим} \end{array} \right\| = \frac{2 \cos \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x} = \frac{2 \cos \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{(x/2) \cdot 2} =$$

$$= \frac{2 \cos \alpha}{2\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)} = \frac{\cos \alpha}{\alpha}, \text{ т.к. второй множитель представляет собой первый замечательный предел.}$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\cos^2 x - \cos^2 a}$;

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$. В числителе стоит выражение, содержащее иррациональности; в соответствии с приемом, изложенным выше, домножаем его (и знаменатель) на сопряженное выражение $\sqrt{x} + \sqrt{a}$. Знаменатель раскладываем на множители по формуле разности квадратов.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\cos x - \cos a)(\cos x + \cos a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})};$$

в числителе получилась формула разности квадратов, в знаменателе при $x \rightarrow a$ $\cos x + \cos a \rightarrow 2 \cos a$, $\sqrt{x} + \sqrt{a} \rightarrow 2\sqrt{a}$; к выражению $\cos x - \cos a$ применим формулу разности косинусов:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\cos x - \cos a)(\cos x + \cos a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2 \cos a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{-2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}}$$

Числитель полученного выражения разделим и умножим на 2, а также учтем,

что при $x \rightarrow a$ имеем $A = \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \rightarrow 1$, поэтому $\frac{\frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} = \frac{1}{A} \rightarrow 1$, кроме того,

$\sin \frac{x+a}{2} \rightarrow \sin a$ при $x \rightarrow a$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cos a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{-2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}} &= -\frac{1}{4\sqrt{a} 2 \cos a \sin a} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x-a}{2} \cdot 2}{\sin \frac{x-a}{2}} = \\ &= -\frac{2}{4\sqrt{a} 2 \sin 2a} = -\frac{1}{2\sqrt{a} \sin 2a}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{6x - \pi}$;

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$. При $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$ будет $x - \frac{\pi}{6} \rightarrow 0$, поэтому в знаменателе выносим 6 за скобки, в числителе выносим 2 за скобки и представляем $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{6x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \left(\frac{1}{2} - \sin x \right)}{6 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \frac{\pi}{6} - \sin x}{x - \frac{\pi}{6}} = \left\| \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right\| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} - x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + x}{2}}{x - \frac{\pi}{6}};$$

$\cos \frac{\pi/6 + x}{2} \rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$, в знаменателе выносим знак « \rightarrow » за скобки,

делим и умножаем на 2, «выстраивая»

первый замечательный предел:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \frac{\pi/6 - x}{2}}{-\frac{\pi/6 - x}{2} \cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \frac{\pi/6 - x}{2}}{\frac{\pi/6 - x}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\cos 4x} - 1}{x^2 - (\pi + 1)x + \pi}$.

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$. Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\sqrt{\cos 4x} + 1$; квадратный трехчлен раскладываем на множители, найдя предварительно его корни: $x^2 - (\pi + 1)x + \pi = 0$, по теореме Виета $x_1 + x_2 = \pi + 1$, $x_1 \cdot x_2 = \pi \Rightarrow x_1 = \pi$, $x_2 = 1$ или по обычной формуле корней квадратного уравнения $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

$$D = b^2 - 4ac = (\pi + 1)^2 - 4\pi = \pi^2 - 2\pi + 1 = (\pi - 1)^2;$$

$$x_1 = \frac{\pi + 1 + \pi - 1}{2} = \pi; \quad x_2 = \frac{\pi + 1 - \pi + 1}{2} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{\cos 4x} - 1}{x^2 - (\pi + 1)x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sqrt{\cos 4x} - 1)(\sqrt{\cos 4x} + 1)}{(\sqrt{\cos 4x} + 1)(x - 1)(x - \pi)};$$

в числителе формула разности квадратов, в знаменателе $\sqrt{\cos 4x} + 1 \rightarrow 2$, $x - 1 \rightarrow \pi - 1$ при $x \rightarrow \pi$;

получаем:

$$\frac{1}{2(\pi - 1)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 4x - 1}{x - \pi};$$

в числителе выносим знак «-» за скобки и применяем формулу $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(\pi - 1)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 4x - 1}{x - \pi} &= -\frac{1}{2(\pi - 1)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 2x}{x - \pi} = \left\| \begin{array}{l} \text{замена } x - \pi = t, \\ \text{тогда } t \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pi \end{array} \right\| = -\frac{1}{\pi - 1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2(\pi + t)}{t} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \text{по формуле приведения} \\ \sin 2(\pi + t) = \sin(2\pi + 2t) = \sin 2t \end{array} \right\| = -\frac{1}{\pi - 1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2t}{t} = -\frac{1}{\pi - 1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2t}{2t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin 2t = \\ &= \left\| \frac{\sin 2t}{2t} \rightarrow 1 \text{ при } t \rightarrow 0 \right\| = -\frac{1}{\pi - 1} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Показать, что: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$. Представляем функцию в виде

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x / \cos x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}. \text{ Получим: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

ПРИМЕР. Показать, что: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$. Обозначаем $\arcsin x = t$, откуда $x = \sin t$

$$(-\pi/2 \leq t \leq \pi/2), \text{ причем, если } x \rightarrow 0, \text{ то } t = \arcsin x \rightarrow 0. \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Замечание. В дальнейшем будем считать, что нам известны пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Докажем, что к числу e стремится и функция $x_n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \rightarrow \infty$ ($x \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

1. Пусть $x \rightarrow +\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \leq x < n + 1$, где $n = [x]$ — это целая часть x . Отсюда следует $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$, поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Если $x \rightarrow +\infty$, то $n \rightarrow \infty$. Поэтому, согласно $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

имеем:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пре делов

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. Пусть $x \rightarrow -\infty$. Сделаем подстановку $-x = t$, тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^1 = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Из равенств $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

вытекает равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Если в равенстве $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$), оно

запишется в виде

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Равенства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

называются *вторым замечательным пределом*.

Они широко используются при вычислении пределов.

В приложениях анализа большую роль играет показательная

функция с основанием e . Функция $y = e^x$ называется

экспоненциальной, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

Принципы применения второго замечательного предела

Оба равенства по сути выражают одну математическую модель:
1)

$$\boxed{(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \rightarrow e \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.}$$

В формуле в основании степени стоит единица плюс бесконечно малая функция, а показатель степени является величиной в точности обратной к этой бесконечно малой функции (т.е. бесконечно большой функцией).

Действительно, в равенстве функция $1/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. является некоторой бесконечно малой функцией при $x \rightarrow \infty$, а x , стоящий в показателе степени есть функция, обратная для $1/x$, и при $x \rightarrow \infty$ она является бесконечно большой функцией. В равенстве функция x , стоящая в скобке, стремится к нулю при $x \rightarrow 0$, а показатель $1/x$ – тоже функция, обратная для x , и $1/x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, т.е. является бесконечно большой функцией.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$2) \quad a^{+\infty} = \infty, \text{ если } a > 1; \quad a^{+\infty} = 0, \text{ если } 0 < a < 1.$$

$$a^{-\infty} = 0, \text{ если } a > 1; \quad a^{-\infty} = \infty, \text{ если } 0 < a < 1.$$

Если же $a \rightarrow 1$, то выражение a^{∞} представляет собой неопределенность, которую будем записывать в виде 1^{∞} , а раскрывать при помощи второго замечательного предела.

ПРИМЕР. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{2x+3}$;

Решение. При подстановке бесконечности вместо x получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{2x+3} = \left(1 - \frac{5}{\infty}\right)^{\infty} = (1 - 0)^{\infty} = 1^{\infty} - \text{неопределенность.}$$

Будем формировать модель

$$\boxed{(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \rightarrow e \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{2x+3} = \left\| \begin{array}{l} \text{в скобке должно быть } 1 + \alpha(x), \\ \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x}\right)^{2x+3} ;$$

здесь $\alpha(x) = \frac{-5}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Для получения соотношения

$$\boxed{(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \rightarrow e \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.}$$

в показателе степени надо иметь выражение, обратное для $-5/x$, т.е. $x/(-5)$. Домножим и разделим на него показатель степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5} \cdot (2x+3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}} \right]^{\frac{-5(2x+3)}{x}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{здесь использовано} \\ \text{правило } a^{nm} = (a^n)^m \end{array} \right\| = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x}\right)^{\frac{x}{-5}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5(2x+3)}{x}} = e^{-10},$$

т.к. в квадратных скобках имеем модель $\boxed{(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \rightarrow e \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.}$

а выражение $\frac{-5(2x+3)}{x} \rightarrow -10$ при $x \rightarrow \infty$

Пример Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{5x}}$;

Подставляя $x = 0$, получим неопределенность вида 1^∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{5x}} = \left(1 - \frac{0}{7}\right)^{\frac{1}{0}} = (1 - 0)^\infty = 1^\infty, \quad \text{следовательно, опять можно}$$

формировать модель

$$\boxed{(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \rightarrow e \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-x}{7}\right)^{\frac{7}{-x} \cdot \frac{-x}{7} \cdot \frac{1}{5x}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{-x}{7}\right)^{\frac{7}{-x}} \right]^{\frac{1}{35}} = e^{-\frac{1}{35}}.$$

Пример Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{5x}$.

Подставляя $x = 0$, убеждаемся в том, что в данном случае нет неопределенности, и сразу приходим к ответу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{5x} = (1 - 0)^0 = 1^0 = 1.$$

Пример Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x}$

Решение. а) Неопределенность вида 1^∞ : при $x \rightarrow \infty$ $1 + 5x \rightarrow \infty$ и

$$\frac{3x+2}{3x+4} \rightarrow \frac{3}{3} = 1 \quad (\text{т.к. числитель и знаменатель имеют одинаковые высшие}$$

степени (x^1), предел дроби равен отношению коэффициентов при x).

Формируем модель ; сначала выделяем в скобке единицу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+4}\right)^{1+5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4-4+2}{3x+4}\right)^{1+5x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+4} + \frac{-2}{3x+4}\right)^{1+5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{3x+4}\right)^{1+5x}; \end{aligned}$$

Пример . Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2. \end{aligned}$$

Пример $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x+3} \right)^x$

Здесь имеем неопределенность вида (1^∞) . Применим второй замечательный предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x+3} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3+4}{2x+3} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x+3} \right)^{\frac{2x+3}{4} \cdot \frac{4x}{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{4x}{2x+3}} = e^2 \end{aligned}$$

Пример $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{3n+1}$

Здесь имеем неопределенность вида (1^∞) . Применим второй замечательный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2} \cdot \frac{2(3n+1)}{n}} = e^6$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \rightarrow \infty$

Как было показано в предыдущем пункте, вычисление любого предела от элементарной функции при $x \rightarrow a$ следует начинать с подстановки в функцию вместо x значения a .

В некоторых случаях при этом получается выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$, называемое неопределенностью по той причине, что результат его нельзя вычислить, надо находить предел, который может быть равен ∞ , нулю, любому другому числу или не существовать, т.е. не определен заранее.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ и точку x_0 . «Процессом» будем называть изменение значения функции $f(x)$ при приближении ее аргумента к x_0 . Пусть в окрестности некоторой точки какая-либо функция является бесконечно большой. Тогда ее бесконечное возрастание можно трактовать как происходящий при $x \rightarrow x_0$ «процесс», в котором функция неограниченно увеличивается. Та же функция при стремлении аргумента к другой точке может быть бесконечно малой, т.е. ее бесконечное убывание может трактоваться как «процесс», при котором функция уменьшается, приближаясь к значению нуль.

Тогда в неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ имеется два «процесса»: неограниченно увеличивается и числитель, и знаменатель. Очевидно, результат зависит от взаимосоотношения этих процессов. Об этом будет сказано ниже. А пока для выяснения неопределенности можно предложить следующее: вынести за скобки в числителе и знаменателе высшую степень x каждого из них, а затем воспользоваться свойствами пределов функций, аналогично тому, как это делалось при вычислении пределов последовательностей.

ПРИМЕР Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x + 3}{2 + x + 5x^2}$;

Решение. Высшие степени x в числителе и знаменателе — соответственно x^3 и x^2 . Выносим их за скобки, затем сокращаем дробь на x^2 и пользуемся правилами вычисления пределов

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x + 3}{2 + x + 5x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(4 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 5 \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 5 \right)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \text{т.к. при } x \rightarrow \infty \text{ дроби } \frac{2}{x^2}, \frac{3}{x^3}, \\ \frac{2}{x^2}, \frac{1}{x} \text{ стремятся к нулю, то} \end{array} \right\| = \frac{4 + 0 + 0}{0 + 0 + 5} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x = \frac{4}{5} \cdot \infty = \infty. \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2 + 3x + 5x^3}$;

Решение.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2 + 3x + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)} = \frac{1 + 0}{0 + 0 + 5} = \frac{1}{5}.$$

ПРИМЕР Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 3}{x^3 + 5x^4}$.

Решение. в этом примере высшие степени числителя и знаменателя соответственно x^2 и x^4 (выносим их за скобки):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 3}{x^3 + 5x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^4 \left(\frac{1}{x} + 5\right)} = \frac{4 - 0 + 0}{0 + 5} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{4}{5} \cdot 0 = 0.$$

Замечание. Сравним высшие степени x числителей и знаменателей в дробях

примера и обратим внимание на зависимость полученных ответов от этих степеней:

- а) высшая степень числителя x^3 , знаменателя $-x^2$, т.е. в числителе степень выше, при этом предел дроби равен ∞ ;
- б) высшие степени x в числителе и знаменателе одинаковы (x^3), при этом предел дроби равен $4/5$, т.е. отношению коэффициентов при высших степенях x числителя и знаменателя;
- в) высшая степень числителя x^3 , знаменателя $-x^4$, т.е. в знаменателе степень выше, при этом предел равен 0 .

Выводы. Сравнивая высшие степени x числителя и знаменателя в неопределенностях вида $\frac{\infty}{\infty}$, получаем:

- 1. ∞ , если степень выше в числителе;**
- 2. 0 , если степень выше в знаменателе;**
- 3. отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя, если они равны.**

В простейших случаях будем пользоваться этими выводами.

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{4x^2 + 1}}$;

Решение. Делим числитель и знаменатель на x , подводя x под корни второй, третьей и четвертой степени:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{4x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x^2 + 1}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}}{\sqrt[4]{\frac{x}{x^4}} + \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3 + 1/x^2} + \sqrt[3]{1/x}}{\sqrt[4]{1/x^3} + \sqrt{4 + 1/x^2}} = \frac{\sqrt{3} + 0}{0 + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Конечно, можно было воспользоваться Выводами , а именно:

высшая степень и числителя, и знаменателя – $\sqrt{x^2}$, т.е. x^1 , поэтому в ответе

будет стоять отношение коэффициентов перед ними: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{4-x}{5+3x}}$;

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{4-x}{5+3x}} = 5^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x}{5+3x}} = 5^{\frac{1}{3}}$, т.к. высшие степени числителя

и знаменателя совпадают, отношение коэффициентов при них равно $-\frac{1}{3}$. Здесь

не дается обоснование перехода от предела показательной функции к пределу ее показателя. Правомерность подобного перехода для этой и других непрерывных функций будет рассмотрена:

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[4]{5x^4 + 1}}{2 + 4x}$ (два предела)

Решение. В подкоренном выражении выносим x^4 за скобки и извлекаем корень, в знаменателе выносим за скобку x :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[4]{5x^4 + 1}}{2 + 4x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \sqrt[4]{5 + \frac{1}{x^4}}}{x \left(\frac{2}{x} + 4 \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[4]{5 + \frac{1}{x^4}}}{\frac{2}{x} + 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}}{4} = \left\| \begin{array}{l} \nearrow \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \searrow \text{при } x \rightarrow -\infty \end{array} \right\| = \frac{\sqrt[4]{5}}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \frac{\sqrt[4]{5}}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \frac{\sqrt[4]{5}}{4}, \\ &= \frac{\sqrt[4]{5}}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \frac{\sqrt[4]{5}}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -\frac{\sqrt[4]{5}}{4}. \end{aligned}$$

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow a$

В выражении вида $\frac{0}{0}$ стоящий в числителе 0 означает, что числитель уменьшается, при этом дробь тоже уменьшается, стоящий же в знаменателе 0 указывает, что знаменатель уменьшается, при этом дробь увеличивается.

Напомним, что вычисление любого предела начинается с подстановки в функцию вместо независимой переменной того значения, к которому она стремится. Если получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия в некоторых случаях используются известные из курса элементарной математики теорема Безу и следствия из нее, а именно:

1. Если число a является корнем многочлена относительно x , то этот многочлен делится без остатка на разность $x - a$.

2. Если число a является корнем многочлена относительно x , то этот многочлен может быть представлен в виде произведения двух множителей: разности $x - a$ и некоторого многочлена.

Из этих утверждений следует, что многочлены, стоящие в числителе и знаменателе рассматриваемой дроби, имеют общий множитель, на который дробь можно сократить. После этого неопределенность может исчезнуть, в противном случае надо повторить процедуру. В частных случаях для разложения на множители можно использовать другие методы (формулы сокращенного умножения, вынесение общего множителя за скобки и т.п.).

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$;

Решение. $\frac{0}{0}$.

Числитель и знаменатель должны иметь общий множитель $(x - 1)$. Действительно, вынося в числителе за скобки общий множитель x и используя формулу разности квадратов, а в знаменателе применяя формулу квадрата разности, получим этот множитель $(x - 1)$, на который и сократим дробь:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x + 1)}{x - 1} = \left[\frac{1 \cdot 2}{0} \right] = \infty.$$

Несмотря на то, что запись дроби с нулем в знаменателе не является вполне корректной, мы будем позволять себе ее и в дальнейшем. Строго надо было бы использовать [Замечание](#), согласно которому функция, обратная к бесконечно малой функции, стоящей в данном случае в знаменателе, является бесконечно

большой:
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

Заметим, что правило вычисления предела произведения двух функций использовано здесь правомерно в силу [Замечания](#).

ПРИМЕР Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x^4 + 24}$;

Решение. Для разложения числителя на множители используем формулу:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни трехчлена, которые находятся

по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Трехчлен $2x^2 - x - 10$ имеет корни $x_1 = -2$,

$x_2 = 5/2$, и раскладывается на множители следующим образом:

$$2x^2 - x - 10 = 2(x + 2)(x - \frac{5}{2}) = (x + 2)(2x - 5).$$

Знаменатель, согласно теореме Безу, делится без остатка на разность $x - (-2) = x + 2$.

Напомним эту операцию, не забыв делимое и делитель расположить по убывающим степеням x :

- 1) первый член делимого $-x^4$ делим на первый член делителя x и результат $-x^3$ записываем в частном;
- 2) $-x^3$ умножаем на делитель и записываем под делимым;
- 3) вычитаем из делимого выражение, стоящее под ним, записывая результат по убывающим степеням x ;

4) снова повторяем процедуру с выражением, получившимся в результате вычитания, пока не получим в остатке 0.

$$\begin{array}{r} -x^4 + x^3 + 24 \quad |x+2 \\ - \underline{-x^4 - 2x^3} \\ 3x^3 + 24 \\ - \underline{3x^3 + 6x^2} \\ - 6x^2 + 24 \\ - \underline{-6x^2 - 12x} \\ 12x + 24 \\ - \underline{12x + 24} \\ 0 \end{array}$$

Теперь, используя следствие из теоремы Безу, получим:

$$-x^4 + x^3 + 24 = (x + 2)(-x^3 + 3x^2 - 6x + 12). \text{ В результате имеем:}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^3 - x^4 + 24} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-5)}{(x+2)(-x^3 + 3x^2 - 6x + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-5}{-x^3 + 3x^2 - 6x + 2} = -\frac{9}{34}.\end{aligned}$$

Вычисление пределов, содержащих иррациональности

Иногда при наличии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (или $\infty - \infty$, которая будет разбираться ниже) функция содержит в числителе или знаменателе иррациональные выражения типа $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ и т.п. Вспоминая формулы сокращенного умножения $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$, будем домножать числитель и знаменатель дроби на сопряженные выражения, в результате чего функции, составляющие неопределенность, превратятся в рациональные.

ПРИМЕР Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$;

Решение. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

а) Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и раскладывая квадратный трехчлен на множители (корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$), получим:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 1)(x - 4)(\underbrace{\sqrt{x} + 2}_{\rightarrow 4})} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 1)(x - 4)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 1)(x - 4)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Фигурной скобкой выделено выражение, имеющее конечный предел, в данном случае равный 4. Таким же обозначением будем пользоваться и в дальнейшем.

ПРИМЕР Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$;

Решение. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

б) Для числителя сопряженным будет выражение $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$, при умножении на которое получим формулу разности кубов; сопряженным для знаменателя будет выражение $\sqrt{x} + 1$, при умножении на которое получим формулу разности квадратов. Итак, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, и так же числитель и знаменатель – на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \frac{2}{3}.$$

ПРИМЕР Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x} + 1}.$$

Решение. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Выражение, сопряженное числителю, есть $\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}$, сопряженным для знаменателя будет выражение $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1$. Поступая так же, как в предыдущем примере, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11})(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11})} = \frac{3}{6} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+10})^2 - (\sqrt{2x+11})^2}{(\sqrt[3]{x})^3 + 1^3} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+10 - 2x-11}{x+1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x-1}{x+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} 1 = -\frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}}$;

Решение. Неопределенность вида 1^∞ , «формируем» число e :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (-\sqrt[3]{\sin x})\right)^{\frac{1}{-\sqrt[3]{\sin x}} \cdot \frac{-\sqrt[3]{\sin x}}{1} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \text{т.к. } -\sqrt[3]{\sin x} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} x} = \frac{-2\sqrt[3]{\sin x} \cos x}{\sin x} = \\ = \frac{-2 \cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \rightarrow \left(\frac{-2 \cdot 1}{0}\right) \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = e^{-\infty} = 0, \quad \text{т.к. } e > 1.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}}$;

Решение. Неопределенности нет:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \sqrt[3]{\sin x}\right)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} x}} = (1 - 0)^{\frac{3}{\operatorname{ctg} 0}} = 1^{\infty} = 1^0 = 1.$$

ПРИМЕР Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{3x}}$.

Решение. Неопределенность вида 1^∞ , «строим» число e :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (1 - \cos x))^{\frac{1}{3x}} = \left\| \begin{array}{l} \text{проверка: при } x \rightarrow 0 \\ 1 - \cos x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (1 - \cos x))^{\frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{3x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x}} = \left\| \text{т.к. } 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ то} \right\| =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \left\| \frac{\sin(x/2)}{x/2} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow 0 \right\| = e^{\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2}} = e^0 = 1.$$

Неопределенности вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$

Когда возникают неопределенности вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$, обычно достаточно теми или иными способами преобразовать заданное выражение в дробь, после чего получаются уже разобранные выше неопределенности $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ (или неопределенности вообще не будет). Проиллюстрируем это примерами.

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \right);$

Решение. Подставляя ∞ вместо x , получаем неопределенность вида

$$\infty - \infty: \text{ при } x \rightarrow \infty \quad \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \rightarrow \infty$$

Приводим дроби к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^3 + 1}{x(x-1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x - x^4 - x^3 - x - 1}{x(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 2x - 1}{x^3 - x} = -1, \end{aligned}$$

ПРИМЕР . Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} - \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \right)$.

Решение Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$: при $x \rightarrow 1$ $\frac{x^3 + 3}{x^2 - 1} \rightarrow \left(\frac{4}{0} \right) \rightarrow \infty$

и $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x} \rightarrow \left(\frac{2}{0} \right) \rightarrow \infty$. Снова приводим к общему знаменателю, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^3 + 2x - 1}{x^3 - x}. \quad \text{Имеем неопределенность } \frac{0}{0}.$$

разложим числитель и знаменатель на множители.

Один из них известен это $(x - 1)$. Другой множитель числителя найдем при помощи «деления углом»:

$$\begin{array}{r}
 -x^3 + 2x - 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 -x^2 + 2x \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 x - 1 \\
 \underline{x - 1} \\
 0
 \end{array}$$

Тогда $-x^3 + 2x - 1 = (x - 1)(-x^2 - x + 1)$,

в знаменателе вынесем x за скобки и

применим формулу разности квадратов;

в результате получим:

$$\frac{-x^3 + 2x - 1}{x^3 - x} = \frac{(x - 1)(-x^2 - x + 1)}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{-x^2 - x + 1}{x(x + 1)}$$

и, следовательно, при $x \rightarrow 1$ имеем:

$$\frac{-x^2 - x + 1}{x(x + 1)} \rightarrow \frac{-1 - 1 + 1}{1(1 + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР . Вычислить пределы:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right);$$

Решение. И при $x \rightarrow +\infty$, и при $x \rightarrow -\infty$ имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. В соответствии с изложенным выше методом нахождения пределов от выражений, содержащих иррациональности, выражение, стоящее под знаком предела, умножаем и делим на сопряженное к нему. В результате получаем дробь:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x} \right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\ & = \frac{x^2 + 2x - x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}}. \end{aligned}$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Сравнивая высшие степени числителя и знаменателя, убеждаемся в том, что они равны, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при них. Но числитель положителен при $x \rightarrow +\infty$ и отрицателен при $x \rightarrow -\infty$, знаменатель же положителен как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2|x|} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2|x|} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -2.$$

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)$.

Решение. Подставляя $+\infty$ вместо x , имеем неопределенность вида $\infty - \infty$

Вычисляем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow -\infty$ неопределенности нет, и сразу получаем ответ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) = -\infty - \infty = -\infty. \blacksquare$$

ПРИМЕР. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

Решение. а) При подстановке $x = 0$ получаем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Представляя далее данное произведение в виде дроби, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)};$$

при $x \rightarrow 0$ $\cos(x/2) \rightarrow 1$, а оставшееся выражение приводим к первому замечательному пределу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x/2}{\sin(x/2)} = 2, \quad \text{т.к.} \quad \frac{x/2}{\sin(x/2)} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2$.

ПРИМЕР. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \ln(1 + 2 \sin x)$.

Решение. Подстановка $x = 0$ дает: $\frac{1}{\sin 0} \ln(1 + 2 \sin 0) = \frac{1}{0} \ln(1 + 0) = \infty \cdot 0$ – неопределенность.

Используем правило $n \log_a b = \log_a b^n$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \ln(1 + 2 \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 2 \sin x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Под знаком логарифма при $x \rightarrow 0$ имеем неопределенность $(1 + 0)^{1/0} = 1^\infty$.

Раскрываем ее с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 2 \sin x)^{\frac{1}{2 \sin x} \cdot 2} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + 2 \sin x)^{\frac{1}{2 \sin x}} \right)^2 = \ln e^2 = 2.$$

Заметим, что при вычислении предела использовалась непрерывность логарифмической функции.