ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Наиболее важными с практической точки зрения являются цепи синусоидального тока.
Если в цепи действует периодическая ЭДС, т.е. выполняется соотношение вида
$e(t+T)=e(t)$
то в линейной цепи возникает периодический ток с периодом *T.* Т.к. любую
периодическую функцию всегда можно представить в виде ряда Фурье, т.е. в виде сумм некоторых синусоид,
то для анализа систем, в которых действует периодическая ЭДС,
достаточно проанализировать эти цепи при действии синусоидальной ЭДС, т.е ЭДС вида
$e(t)=E_m sin(\omega t+\varphi)$
где E_m – амплитуда ЭДС
ω – угловая частота

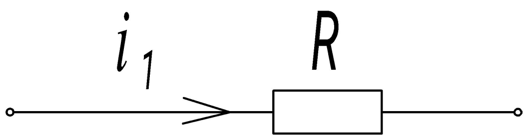
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$$

$(\omega t+\varphi)$ – фаза колебания
φ - начальная фаза ($T=0$)
$\varphi>0$ - если точка перехода синусоиды с отрицательной полуволны в положительную лежит слева от начала координат. И наоборот.
На практике синусоидальную ЭДС получают, как правило, с помощью синхронных генераторов.

Синусоидальный ток в активном сопротивлении

Пусть через сопротивление R протекает синусоидальный ток

$i=I_m sin\omega t$



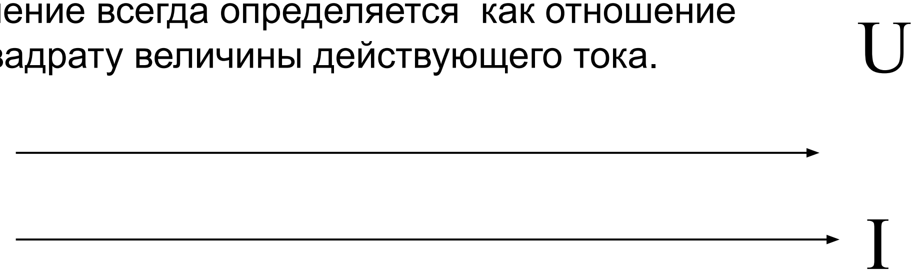
согласно закону Ома

$U=Ri=Ri_m sin\omega t$

Из полученного выражения видно, что амплитудное значение напряжения

$U_m = Ri_m$

А начальная фаза напряжения совпадает с начальной фазой тока.
Следует отметить, что при протекании синусоидального тока через нагрузку активное сопротивление всегда больше сопротивления при протекании постоянного тока. Это связано с тем, что активное сопротивление всегда определяется как отношение активной мощности к квадрату величины действующего тока.



Под активной мощностью в цепи синусоидального тока понимают среднюю мощность за период

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u * i dt$$

Из приведенного выше выражения видно, что в нашем случае

$$P = \frac{RI_m^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{RI_m^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)dt = \frac{RI_m^2}{T} * \frac{1}{2}T = \frac{RI_m^2}{2}$$

Под действующим значением тока понимают такой постоянный ток, который при протекании по указанному сопротивлению выделяет за период такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток. Другими словами, должен быть равен мощности вида

$$RI^2 = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2 dt$$

Т.о., действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

Из приведенного выше выражения видно, что для синусоидального тока

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Т.к. при переменном токе происходит излучение энергии в окружающее пространство, то очевидно, что активная мощность в этом случае всегда будет больше по отношению к случаю постоянного тока. Т.е. при одном и том же действующем значении тока мощность в синусоидальном случае выше. Поэтому больше будет и активное сопротивление. Наряду с действующими значениями токов и напряжений часто используют так называемые средние значения величин.

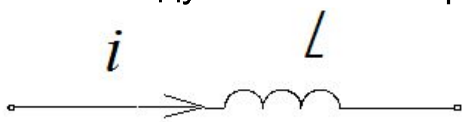
Т.к. среднее за период от синусоиды всегда равно нулю, то под средним значением тока обычно понимают среднее за половину периода

Для синусоидального тока среднее значение

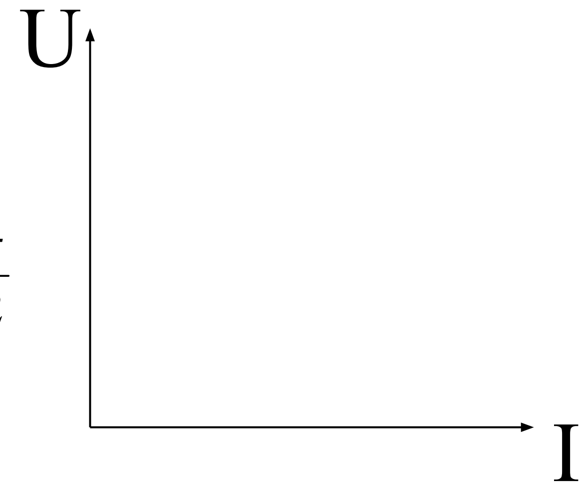
$$I_{cp} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i dt \qquad I_{cp} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T}(-\cos \omega t)\Big/_0^{T/2} = \frac{2I_m}{2\pi}(1-\cos\pi) = \frac{2I_m}{\pi}$$

Синусоидальный ток через индуктивность

Напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на 90^0.



$$i=I_m \sin\omega t$$



Напряжение на зажимах этой индуктивности

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Амплитуда напряжения $U_m = \omega L I_m$ начальная фаза $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

индуктивное сопротивление $x_L = \omega L$

Энергия магнитного поля, запасаемая в индуктивности

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI^2{}_m}{4}(1-\cos 2\omega t)$$

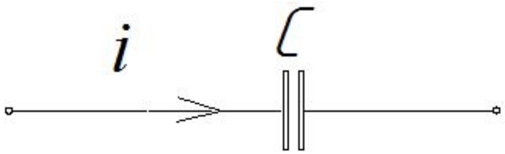
Максимальная энергия, которая может быть запасена в индуктивности

$$W_{LMAX} = \frac{LI^2{}_m}{2} = LI^2$$

Где I – действующее значение тока.
Тогда выражение для индуктивного сопротивления имеет вид

$$x_L = \frac{\omega W_{LMAX}}{I^2}$$

Синусоидальный ток через емкость

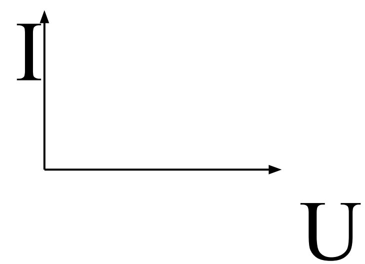


$$i=I_m sin\omega t$$

напряжение на емкости $$u_L = \frac{1}{C}\int i dt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos\omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Амплитудное значение напряжения $$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C}$$



начальная фаза напряжения $$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Т.е. напряжение на емкости отстает от тока по фазе на 90^0

Энергия электрического поля, запасаемая в емкости $$W_C = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_m^2}{4}(1+\cos 2\omega t)$$

Максимальная энергия, которая может быть запасена в емкости $$W_{CMAX} = \frac{CU^2{}_m}{2}$$

Емкостное сопротивление при этом $$x_C = \frac{\omega W_{CMAX}}{I^2}$$

Мощность в цепи синусоидального тока

Под активной мощностью понимают среднее за период от мгновенной мощности

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi = UI\cos\varphi$$

U и I – действующие значения напряжения и тока
Cosφ – коэффициент мощности
Мощность, поступающая в участок цепи будет максимальной, если коэффициент мощности будет стремиться к 1.
В цепи синусоидального тока часто используют понятие реактивной мощности

Реактивная мощность характеризует ту энергию электромагнитного поля, которая возвращается к источнику.

$$Q = UI\sin\varphi \qquad [\text{ВАр}]$$

Полная мощность цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI \qquad [\text{ВА}]$$

Комплексные изображения синусоидальных величин

Синусоидальную функцию времени всегда можно рассмотреть как действительную или мнимую части комплексного числа, представленного в показательной форме

$$A_m e^{\pm j(\omega t+\varphi)} = A_m \cos(\omega t+\varphi) \pm jA_m \sin(\omega t+\varphi) =$$

$$= X \pm jY = \sqrt{X^2+Y^2}\, e^{\pm jarctg\frac{Y}{X}}$$

$$u_R = Ri \qquad i = I_m \sin(\omega t+\varphi) = I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$u_R = RI_m e^{j(\omega t+\varphi)} \quad u_L = L\frac{di}{dt} = j\omega LI_m e^{j(\omega t+\varphi)} \quad u_C = \frac{1}{C}\int idt = \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Из приведенных выражений видно, что $e^{j\omega t}$

является общим множителем для всех приведенных напряжений. Поэтому при записи уравнений по 2 закону Кирхгофа его можно опустить и работать только с комплексными амплитудами.

В качестве комплексных сопротивлений для элементов R, L, C используют выражения

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$$

$$u_R = R\dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$u_L = j\omega L\dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$u_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m$$

$$\dot{U}_{mL} = j\omega L\dot{I}_m$$

$$\dot{U}_{mC} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m$$

$$z_R = R$$

$$z_L = j\omega L$$

$$z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$I_m \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$$

... пропорционален угловой частоте, в резистивном элементе ток от угловой частоты не зависит.
Добротность Q при резонансе токов определяет кратность превышения тока в индуктивном (емкостном) элементе над суммарным током в резонансе.
Повышения напряжения на участках цепи при резонансе токов не происходит, поэтому в отличие от резонанса напряжений не возникает опасности для электротехнического оборудования.

Пример 1.1. На рисунке 1.9 представлена электрическая схема. В схеме комплексные сопротивления заданы в исходных данных. Для каждого варианта студент определяет структуру схемы в зависимости от заданного варианта следующим образом:

Вар	E1, В	f, Гц	C1, мкФ	C2, мкФ	C3, мкФ	L1, мГн	L2, мГн	L3, мГн	R1, Ом	R2, Ом	R3, Ом
100	200	50	-	300	-	15	-	10	3	6	8

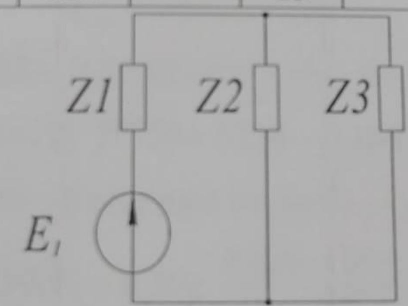


Рис.1.9

Решение: Из этой таблицы формируем исходные данные: Если в ячейке стоит прочерк, то этот элемент в схеме отсутствует, особое внимание необходимо обращать на единицы измерения, заданные в таблице.

→ Сглажи. фильтр → Стабилиз-затор выход →

в 10^{00}

$Z1 = R1 + jX_{L1}$ – если в ветви катушка индуктивности, то перед j – знак «+»;

$Z2 = R2 + jX_{C2}$ — если в ветви конденсатор, то перед j знак «-»;

$Z3 = R3 + jX_{L3}$

Согласно приведенному примеру схема преобразуется:

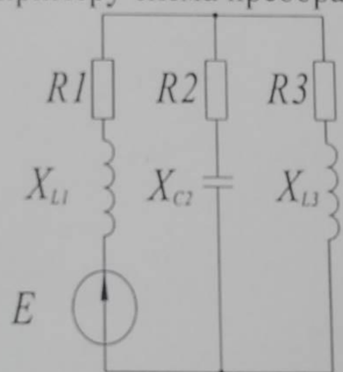


Рис.1.10

В результате получается схема для решения задачи. В этой схеме:

$$\dot{Z}1 = R1 + jX_{L1} = R1 + j2\pi f L1 = 3 + j2\cdot 3.14\cdot 50\cdot 15\cdot 10^{-3} = 3 + j4.7 Ом,$$

$$\dot{Z}2 = R2 + jX_{C2} = R2 - j1/2\pi f C2 = 6 - j1/(2\cdot 3.14\cdot 50\cdot 300\cdot 10^{-6}) = 6 - j10.6 Ом,$$

$$\dot{Z}3 = R3 + jX_{L3} = R3 + j2\pi f L3 = 8 + j2\cdot 3.14\cdot 50\cdot 10^{-2} = 8 + j3.14 Ом,$$

Алгоритм решения задачи:

чение тока

ы

трической
ых I_L и I_C
резонансе
й катушке
ный ток в

озрастает
уктивном
угловой

тока в

поэтому
ического

к возрастает
в индуктивном
нален угловой

ышения тока в

сходит, поэтому
ротехнического

хема. В схеме
Для каждого
от заданного

	R2, Ом	R3, Ом
	6	8

ли в ячейке
внимание

В результате получается схема для решения задачи. В этой схеме:

$$\dot{Z}1 = R1 + jX_{L1} = R1 + j2\pi fL1 = 3 + j2\cdot 3.14\cdot 50\cdot 15\cdot 10^{-3} = 3 + j4.7\,Ом;$$

$$\dot{Z}2 = R2 + jX_{C2} = R2 - j1/2\pi fC2 = 6 - j1/(2\cdot 3.14\cdot 50\cdot 300\cdot 10^{-6}) = 6 - j10.6\,Ом;$$

$$\dot{Z}3 = R3 + jX_{L3} = R3 + j2\pi fL3 = 8 + j2\cdot 3.14\cdot 50\cdot 10^{-2} = 8 + j3.14\,Ом;$$

Алгоритм решения задачи:

1.Определить эквивалентное сопротивление схемы:

$$\dot{Z}экв = \dot{Z}1 + \dot{Z}23 = \dot{Z}1 + \frac{\dot{Z}2\cdot\dot{Z}3}{\dot{Z}2+\dot{Z}3} = 3 + j4.7 + \frac{(6-j10.6)(8+j3.14)}{6-j10.6+8+j3.14} = 9.5 + 3.44\,Ом;$$

$$\dot{Z}23 = 6.5 - j1.26\,Ом;$$

Определить ток İ1:

$$\dot{Z}1 = R1 + jX_{L1} = R1 + j2\pi fL1 = 3 + j\cdot 3.14\cdot 50\cdot 15\cdot 10^{-3} = 3 + j4.7\,Ом;$$

$$\dot{I}1 = \frac{E1}{\dot{Z}_{экв}} = \frac{200}{9.5 + j3.44} = 18.61 - j6.75\,A;$$

2.Определить напряжение на сопротивлении Z1:

$$\dot{U}1 = \dot{I}1\cdot\dot{Z}1 = (18.61 - j6.75)\cdot(3 + j4.7) = 87.5 + j67.3\,B;$$

3.Определить напряжение на сопротивлениях *Z2* и *Z3*. Так как ветви включены параллельно, напряжения на них будут равны. *На этом этапе расчета можно сделать проверку, рассчитав напряжение $\dot{U}23$ разными способами.*

4.Расчет напряжения по закону Ома:

$$\dot{U}23 = \dot{I}1\cdot\dot{Z}23 = (18.61 - j6.75)\cdot(6.5 - j1.26) = 112.4 - j67.3\,B;$$

5.Расчет напряжения $\acute{U}23$ по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}23 = E - \dot{U}1 = 200 - (87.5 + j67.3) = 112.4 - j67.3B;$$

Расчетные данные совпали, следовательно, на данном этапе ошибок нет. Если напряжения получились разные, следует искать ошибку в расчетах. Самые распространенные ошибки при вычислениях комплексных чисел – неправильное определение знака при умножении мнимых частей.

6.Определить ток $\acute{I}2$:

$$\dot{I}2 = \frac{\dot{U}23}{\dot{Z}2} = \frac{112.4 - j67.4}{6 - j10.6} = 9.38 + j5.3A;$$

7.Определить ток $\acute{I}3$:

$$\dot{I}3 = \frac{\dot{U}23}{\dot{Z}3} = \frac{112.4 - j67.4}{8 + j3.14} = 9.31 - j12.08A$$

8.Проверка расчетов по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}1 = \dot{I}2 + \dot{I}3 = 9.38 + j5.3 + 9.31 - j12.08 = 18.69 - j6.78A;$$

9.Расчет мощности источника Е1:

$$\dot{S}_{ucm} = E1 \cdot \dot{I}1 = 200 \cdot (18.61 - j6.75) = 3722 - j1350BA;$$

10.Расчет мощностей потребителей в ветвях:

$$\dot{S}1 = \dot{I}1^2 \cdot Z1 = (18.61 - j6.75)^2 \cdot (3 + j4.7) = 2083.13 + j659.88BA;$$

7.Определить ток İ3:

$$\dot{I}3 = \frac{\dot{U}23}{\dot{Z}3} = \frac{112.4 - j67.4}{8 + j3.14} = 9.31 - j12.08A$$

8.Проверка расчетов по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}1 = \dot{I}2 + \dot{I}3 = 9.38 + j5.3 + 9.31 - j12.08 = 18.69 - j6.78A;$$

9.Расчет мощности источника E1:

$$\dot{S}_{ucm} = E1 \cdot \dot{I}1 = 200 \cdot (18.61 - j6.75) = 3722 - j1350BA;$$

10.Расчет мощностей потребителей в ветвях:

$$\dot{S}1 = \dot{I}1^2 \cdot Z1 = (18.61 - j6.75)^2 \cdot (3 + j4.7) = 2083.13 + j659.88BA;$$

$$\dot{S}2 = \dot{I}2^2 \cdot Z2 = (9.38 + j5.3)^2 \cdot (6 - j10.6) = 14.13.19 - j38.31BA;$$

$$\dot{S}3 = \dot{I}3^2 \cdot Z3 = (9.31 - j12.08)^2 \cdot (8 + j3.14) = 232.3 - j1985.57BA;$$

11.Составление баланса мощности.

Баланс мощности – это соотношение между мощностью источника и суммарной мощностью потребителей:

$$\dot{S}_{ucm} \approx \dot{S}1 + \dot{S}2 + \dot{S}3;$$

$$3722 - j1350 \approx 2083.13 + j659.88 + 1433.19 - j38.31 + 232.3 - j985.57;$$

$$3722 - j1350 \approx 3748 - j1364;$$

Определение погрешности уравнения баланса мощностей:

$$\frac{3722 - 3748.62}{3722} \cdot 100\% = 0.7\%; \quad \frac{1350 - 1364}{1350} \cdot 100\% = 1.03\%/$$