Векторы в пространстве

вход

Содержание

Выход

Скалярное произведение

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения

Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

- *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательство

Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство:

$I.$ *при* $\vec{a} = \vec{0}$ *или* $\vec{b} = \vec{0}$, *равенство*

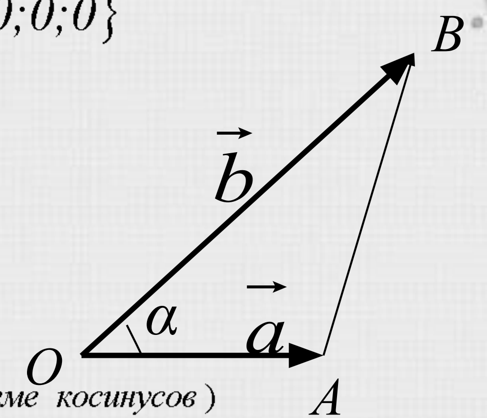
$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ *справедливо, т.к.* $\vec{0}\{0;0;0\}$

$II.$ *при* $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

O *– произвольная точка*

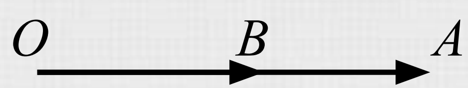
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

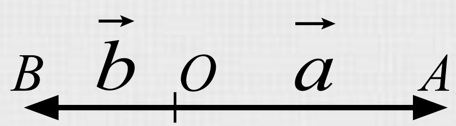
если $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны, то*



$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$ *(по теореме косинусов)*

это равенство верно и в том случае когда векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны*





$\cos\alpha = 1, AB^2 = (OA - OB)^2 =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$

$\cos\alpha = -1, AB^2 = (OA + OB)^2 =$

$= OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$

Доказательство формулы скалярного произведения

$Так\ как\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, то$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$-(z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$-x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ *и* $\vec{\mathbf{c}}$ *и любого числа* $\mathbf{k}$ *справедливы равенства :*

$1^0.$ $\vec{a} \geq 0$ *причем* $\vec{a}^2 > 0$ *при* $\vec{a} \neq 0$

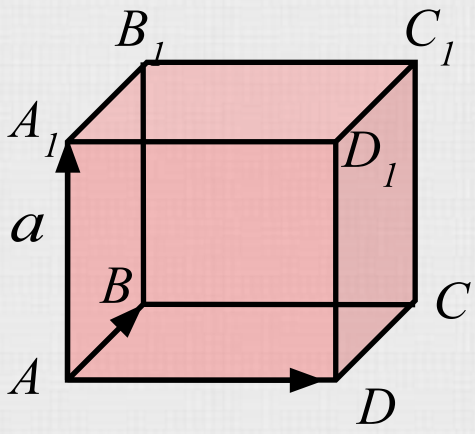
$2^0.$ $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ **(переместительный закон)**

$3^0.$ $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ **(распределительный закон)**

$4^0.$ $(k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ **(сочетательный закон)**

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



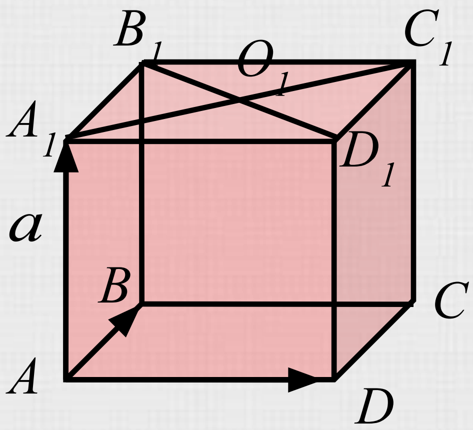
Дано :
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$
б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$
в) $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$
г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

Решение

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :
$ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$
$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

д) $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$
е) $\overrightarrow{DO_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$
ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$

Решение

Решение

$$а)\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=a^2$$

$$б)AC-\text{диагональ квадрата}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}=-\overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{AC}\cdot(-\overrightarrow{A_1C_1})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-(a\sqrt{2})^2=-2a^2$$

$$в)D_1B-\text{диагональ куба}$$

$$D_1B=\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}a(п(\text{ т.Пифагора из }\Delta DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}a^2\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=a^3\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a^3\sqrt{3}$$

$$г)BA_1,BC_1-\text{диагонали квадратов}$$

$$\Delta A_1BC_1-\text{равносторонний},\angle A_1BC_1=60^\circ$$

$$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2a^2}{2}=a^2$$

Решение

$д) A_1O_1 -$ *половина диагонали квадрата*

$A_1C_1 -$ *диагональ квадрата*

$\angle O_1A_1C_1 = 0°$

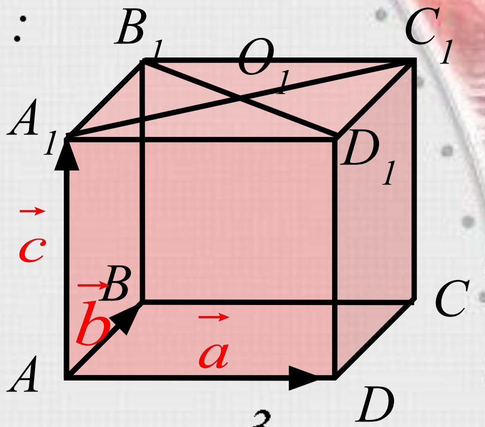
$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 0° = a^2$$

$е) D_1O_1, B_1O_1 -$ *половины диагонали квадрата*

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

Решение

ж) I способ – решение по определению:



$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

C_1B – диагональ квадрата

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1}\cdot(-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 30^\circ = -\frac{3}{2}a^2$$

II способ – разложение по базису:

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{a} - \vec{b}\right) = -\left(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2\right) = -\left(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2\right) = -\frac{3}{2}a^2$$