Векторы в пространстве

вход

Содержание

Выход

Скалярное произведение

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения

Справедливые утверждения

• *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}\quad \vec{a}\neq\vec{0}\quad \vec{b}\neq\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

• *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2=a^2$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ *и* $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательство

Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство:

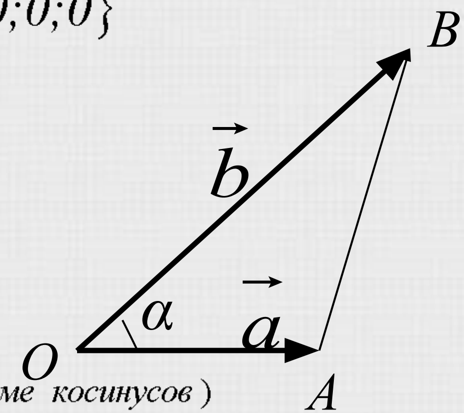
$I.$ при $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, равенство

$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ справедливо, т.к. $\vec{0}\{0;0;0\}$

$II.$ при $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

O – произвольная точка

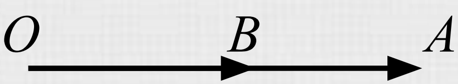
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

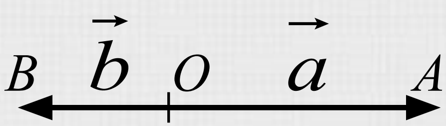


если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$ (по теореме косинусов)

это равенство верно и в том случае когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны





$\cos\alpha = 1,\ AB^2 = (OA - OB)^2 =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$

$\cos\alpha = -1,\ AB^2 = (OA + OB)^2 =$

$= OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB =$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$

Доказательство формулы скалярного произведения

$Так\ как\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ то$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \left|\vec{b}\right|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$-(z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$-x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ *и* $\vec{\mathbf{c}}$ *и любого числа* $\mathbf{k}$ *справедливы равенства :*

$1^0.$ $\vec{a} \geq 0$ *причем* $\vec{a}^{\,2} > 0$ *при* $\vec{a} \neq 0$

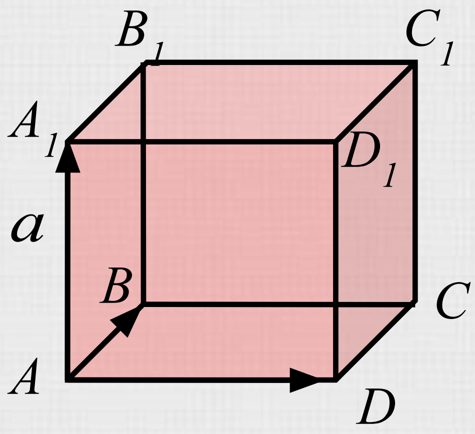
$2^0.$ $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ **(переместительный закон)**

$3^0.$ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ **(распределительный закон)**

$4^0.$ $\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ **(сочетательный закон)**

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :
$ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$

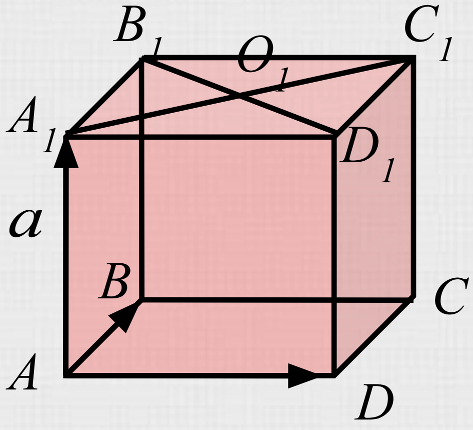
в) $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

Решени
е

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :
$ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$
$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

д)$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$
е)$\overrightarrow{DO_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$
ж)$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$

Решение

Решение

$$а)\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=a^2$$

$б)AC - \text{диагональ квадрата}$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}=-\overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{AC}\cdot(-\overrightarrow{A_1C_1})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-(a\sqrt{2})^2=-2a^2$$

$в)D_1B - \text{диагональ куба}$

$$D_1B=\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}a(n(\ \text{т.Пифагора из } \Delta DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}a^2\cdot a\sqrt{2}\cdot \cos 45^\circ=a^3\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a^3\sqrt{3}$$

$г)BA_1, BC_1 - \text{диагонали квадратов}$

$\Delta A_1BC_1 - \text{равносторонний}, \angle A_1BC_1=60^\circ$

$$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2a^2}{2}=a^2$$

Решение

$д) A_1O_1 -$ *половина диагонали квадрата*

$A_1C_1 -$ *диагональ квадрата*

$\angle O_1A_1C_1 = 0°$

$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 0° = a^2$$

$е) D_1O_1, B_1O_1 -$ *половины диагонали квадрата*

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

Решение

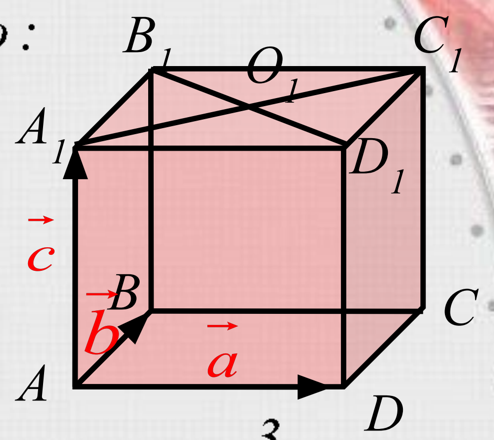
ж)I способ – решение по определению :

$$BO_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

C_1B *– диагональ квадрата*

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\cdot 60^\circ = 30^\circ$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1}\cdot(-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 30^\circ = -\frac{3}{2}a^2$$



II способ – разложение по базису :

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot(-\vec{a} - \vec{b}) = -(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} -$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2) = -(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2) = -\frac{3}{2}a^2$$