Векторы в пространстве

вход

Содержание

I. Понятие вектора в пространстве

II. Коллинеарные векторы

III. Компланарные векторы

IV. Действия с векторами

V. Разложение вектора

VI. Базисные задачи

Проверь себя

Помощь в управлении презентацией

Выход

Скалярное произведение

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения

Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \neq 0 \quad \vec{b} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

- *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ *и* $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательство

Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство:

I. при $\vec{a}=\vec{0}$ *или* $\vec{b}=\vec{0}$, *равенство*

$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ *справедливо, т.к.* $\vec{0}\{0;0;0\}$

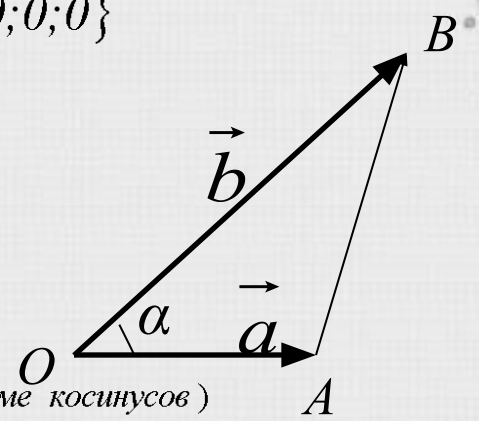
II. при $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$

O – произвольная точка

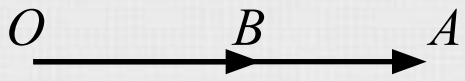
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

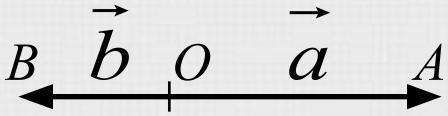
если $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны, то*

$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha$ *(по теореме косинусов)*



это равенство верно и в том случае когда векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны*





$\cos\alpha=1,\ AB^2=(OA-OB)^2=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\alpha$

$\cos\alpha=-1,\ AB^2=(OA+OB)^2=$

$=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\alpha$

Доказательство формулы скалярного произведения

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$, *то*

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2\right)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \left|\vec{b}\right|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$\left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$-(z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$-x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *и любого числа* k *справедливы равенства* :

1^0. $\vec{a} \geq 0$ *причем* $\vec{a}^2 > 0$ *при* $\vec{a} \neq 0$

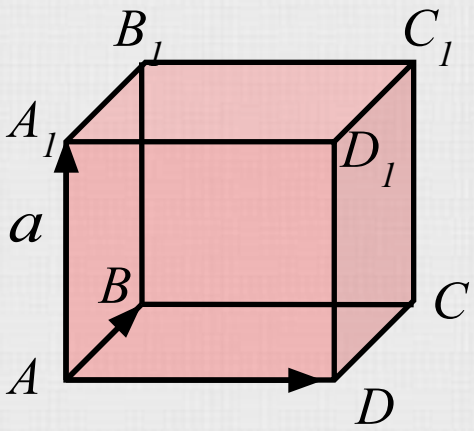
2^0. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ **(переместительный закон)**

3^0. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ **(распределительный закон)**

4^0. $\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ **(сочетательный закон)**

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – *куб*

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$

а) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}$

б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1A_1}$

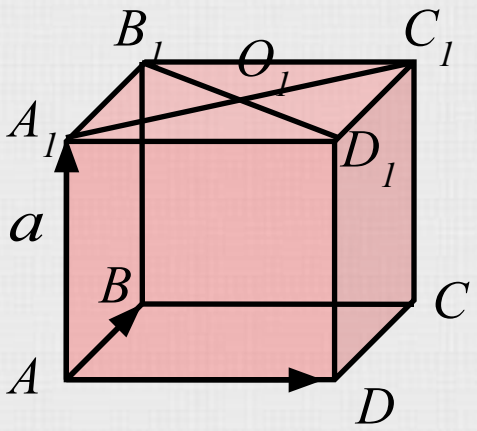
в) $\overrightarrow{D_1B} \cdot \overrightarrow{AC}$

г) $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$

Решение

Задача 4. Скалярное произведение

Вычислить скалярное произведение векторов:



Дано :

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – *куб*

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = a$

$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

д) $\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$

е) $\overrightarrow{DO_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1}$

ж) $\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1B}$

Решение

Решение

$$а)\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AD}^2=AD^2=a^2$$

$$б)AC-диагональ\ квадрата$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}=-\overrightarrow{C_1A_1}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{AC}\cdot(-\overrightarrow{A_1C_1})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-(a\sqrt{2})^2=-2a^2$$

$$в)D_1B-диагональ\ куба$$

$$D_1B=\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}a(n(\ т.Пифагора\ из\ \Delta DD_1B)$$

$$\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}a^2\cdot a\sqrt{2}\cdot cos45^\circ=a^3\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a^3\sqrt{3}$$

$$г)BA_1,BC_1-диагонали\ квадратов$$

$$\Delta A_1BC_1-равносторонний,\angle A_1BC_1=60^\circ$$

$$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2a^2}{2}=a^2$$

Решение

д) A_1O_1 – половина диагонали квадрата

A_1C_1 – диагональ квадрата

$\angle O_1A_1C_1 = 0°$

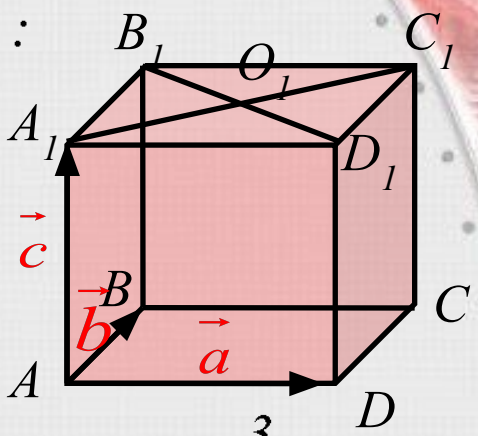
$$\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot cos0° = a^2$$

е) D_1O_1, B_1O_1 – половины диагонали квадрата

$$\overrightarrow{D_1O_1} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{D_1O_1} \cdot (-\overrightarrow{O_1B_1}) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

Решение

ж) I способ – решение по определению :



$$BO_1 = \sqrt{a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

C_1B – диагональ квадрата

$$\angle O_1BC_1 = \frac{1}{2}\angle A_1BC_1 = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BO_1}\cdot(-\overrightarrow{BC_1}) = -\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot cos30° = -\frac{3}{2}a^2$$

II способ – разложение по базису :

$$\overrightarrow{BO_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{C_1B} = (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c})\cdot(-\vec{a} - \vec{b}) = -(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} -$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b}^2) = -(\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2) = -\frac{3}{2}a^2$$