



Математический анализ
2 семестр
Занятие №5

Интегрирование
тригонометрических
функций

Занятие 5. Интегрирование произведения тригонометрических функций

$$\int \sin(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int \sin(\alpha x) d(\alpha x) = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)$$

$$\int \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \int \cos(\alpha x) d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Занятие 5. Интегрирование произведения тригонометрических функций

$$\begin{aligned}\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx &= \\ &= \frac{1}{4} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos 4x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos 6x \, dx + \frac{1}{4} \int dx = \\ &= \frac{1}{8} \sin(2x) + \frac{1}{16} \sin(4x) + \frac{1}{24} \sin(6x) + \frac{1}{4} x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x &= \frac{1}{2} [\cos x + \cos 3x] \cos 3x = \\ &= \frac{1}{4} [\cos 2x + \cos 4x + 1 + \cos 6x]\end{aligned}$$

Занятие 5. Интегрирование произведения тригонометрических функций

1. $\int \sin 5x \cdot \cos x \, dx$

2. $\int \sin 5x \cdot \sin 3x \, dx$

3. $\int \cos x \cdot \cos 3x \, dx$

4. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$

5. $\int \sin x \cdot \sin(x + a) \cdot \sin(x + b) \, dx$

6. $\int \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} \, dx$

7. $\int \sin^2 ax \cdot \sin bx \, dx$

8. $\int \cos^2 ax \cdot \cos bx \, dx$

9. $\int \sin^2 ax \cdot \cos bx \, dx$

10. $\int \sin x \cdot \sin(x + a) \cdot \cos(x + b) \, dx$

11. $\int \cos x \cdot \sin(x + a) \cdot \sin(x + b) \, dx$

Занятие 5. Интегрирование тригонометрических функций

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \quad a) \quad x = \operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \quad b) \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} dx = \left\langle \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \quad x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \end{array} \right\rangle = \int \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{-t+1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \ln|t+1| - \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x + 1| - \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + \frac{1}{2} x + C$$

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Mt+N}{t^2+1} = \frac{1/2}{t+1} + \frac{Mt+N}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + Mt^2 + Nt + Mt + N}{(t+1)(t^2+1)}$$

$$A = \frac{1}{t^2+1} \Big|_{t=-1} = \frac{1}{2}$$

$$M = -1/2$$

$$N = 1/2$$

Занятие 5. Интегрирование тригонометрических функций

$$1. \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$2. \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$$

$$3. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$5. \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$$

$$6. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$7. \int \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$$8. \int \frac{dx}{(\sin x - \cos x) \cos x}$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$



Спасибо за
внимание

Занятие окончено