Математический анализ
2 семестр
Занятие №5

Интегрирование тригонометрических функций

Занятие 5. Интегрирование произведения тригонометрических функций

$$\int \sin(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\int \sin(\alpha x)d(\alpha x) = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$$

$$\int \cos(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\int \cos(\alpha x)d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

Занятие 5. Интегрирование произведения тригонометрических функций

$$\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \; dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos 2x \; dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x \; dx + \frac{1}{4}\int \cos 6x \; dx + \frac{1}{4}\int dx =$$

$$= \frac{1}{8}\sin(2x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{1}{24}\sin(6x) + \frac{1}{4}x + C$$

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}[\cos x + \cos 3x]\cos 3x =$$

$$= \frac{1}{4}[\cos 2x + \cos 4x + 1 + \cos 6x]$$

Занятие 5. Интегрирование произведения тригонометрических функций

1. $\int \sin 5x \cdot \cos x \; dx$

2. $\int \sin 5x \cdot \sin 3x \; dx$

3. $\int \cos x \cdot \cos 3x \; dx$

4. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \; dx$

5. $\int \sin x \cdot \sin(x+a) \cdot \sin(x+b) \; dx$

6. $\int \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{3} \; dx$

7. $\int \sin^2 ax \cdot \sin bx \; dx$

8. $\int \cos^2 ax \cdot \cos bx \; dx$

9. $\int \sin^2 ax \cdot \cos bx \; dx$

10. $\int \sin x \cdot \sin(x+a) \cdot \cos(x+b) \; dx$

11. $\int \cos x \cdot \sin(x+a) \cdot \sin(x+b) \; dx$

Занятие 5. Интегрирование тригонометрических функций

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \quad a)\ x = \operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{dt}{t^2+1} \quad b)\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$$

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} dx = \left\langle \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x \quad x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1} \end{matrix} \right\rangle = \int \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{-t+1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + 1| - \frac{1}{4}\ln\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) + \frac{1}{2}x + C$$

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Mt+N}{t^2+1} = \frac{1/2}{t+1} + \frac{Mt+N}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + Mt^2 + Nt + Mt + N}{(t+1)(t^2+1)} \qquad A = \left.\frac{1}{t^2+1}\right|_{t=-1} = \frac{1}{2} \qquad \begin{matrix} M = -1/2 \\ N = 1/2 \end{matrix}$$

Занятие 5. Интегрирование тригонометрических функций

1. $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

2. $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx$

3. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

4. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}$

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$

6. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

7. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos^3 x}$

8. $\int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)\cos x}$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

Спасибо за внимание

Занятие окончено