

ЛЕКЦИЯ № 14

Тема:

ЧИСЛОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Цель лекции:

1. Сформулировать основные определения.
2. Изучить законы распределения случайных величин и случайных процессов.
3. Рассмотреть некоторые примеры законов распределения.

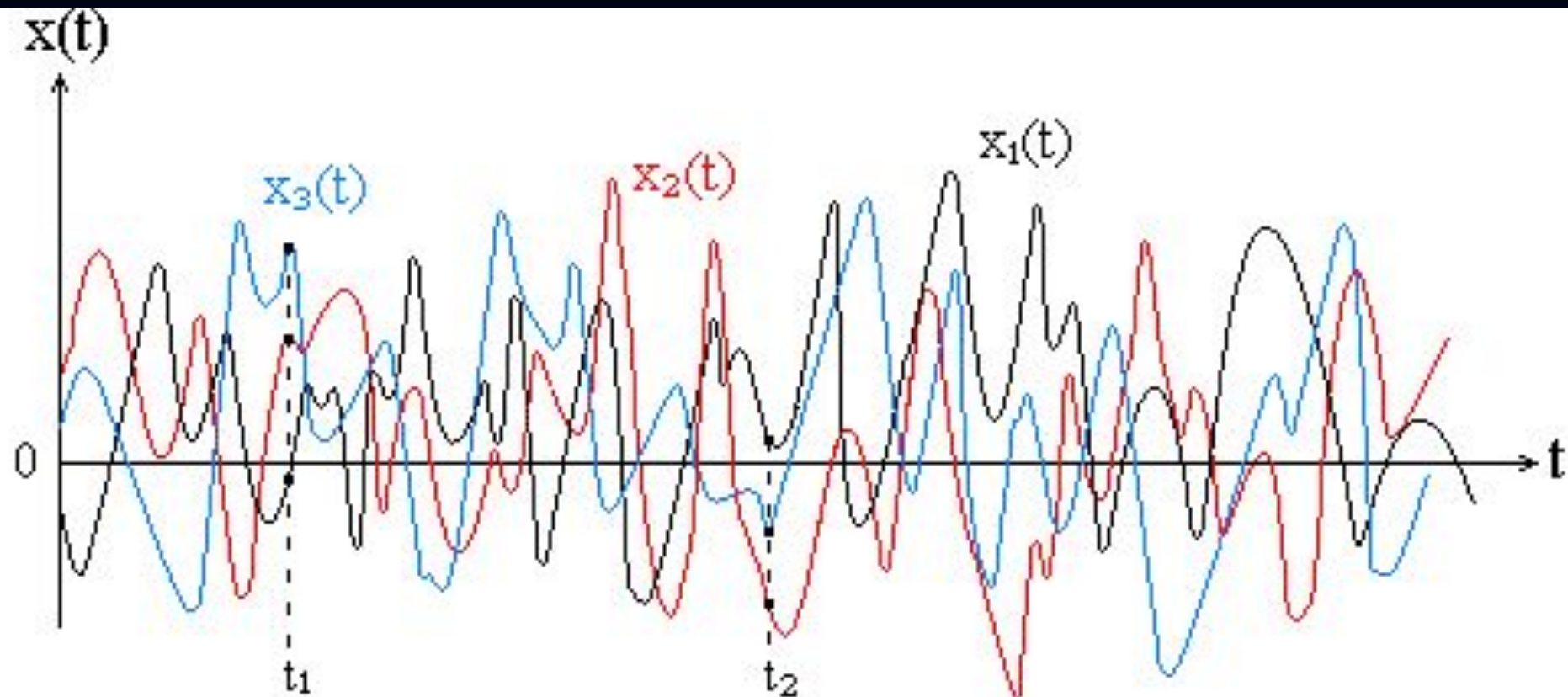


Рис. 1. Реализации случайного сигнала

$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ – реализации случайного сигнала;
 $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, $x_3(t_1)$ – случайная величина $x(t_1)$;
 $x_1(t_2)$, $x_2(t_2)$, $x_3(t_2)$ – случайная величина $x(t_2)$.

1. Общие положения

Законы распределения полностью характеризуют случайную величину с вероятностной точки зрения. Зная закон распределения, можно указать возможные значения случайной величины и вероятность появления ее в том или ином интервале. Однако при решении многих практических задач нет необходимости или нет возможности характеризовать случайные величины и процессы их законами распределения.

1. При решении многих задач линейного и нелинейного преобразований случайных сигналов вычисление законов распределения не представляется возможным.

2. В радиотехнике возможны ситуации, когда механизм образования случайных сигналов неизвестен.

3. Имеются законы распределения, которые характеризуются несколькими параметрами. Знание этих параметров достаточно, чтобы определить закон распределения.

4. Иногда достаточно иметь общее представление о случайной величине, для чего необходимо знать только несколько ее параметров.

Для общей характеристики случайной величины используют величины, которые носят название *числовые характеристики*. Основное их назначение — выразить наиболее существенные особенности того или иного распределения.

Наибольшее применение нашли такие числовые характеристики, как *математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция*.

2. Числовые характеристики случайных величин

2.1. Математическое ожидание

Математическое ожидание является важнейшей характеристикой случайной величины. Ее еще называют средним значением случайной величины. Это название отражает физический смысл данной характеристики. Возможные значения случайной величины всегда колеблются около среднего значения.

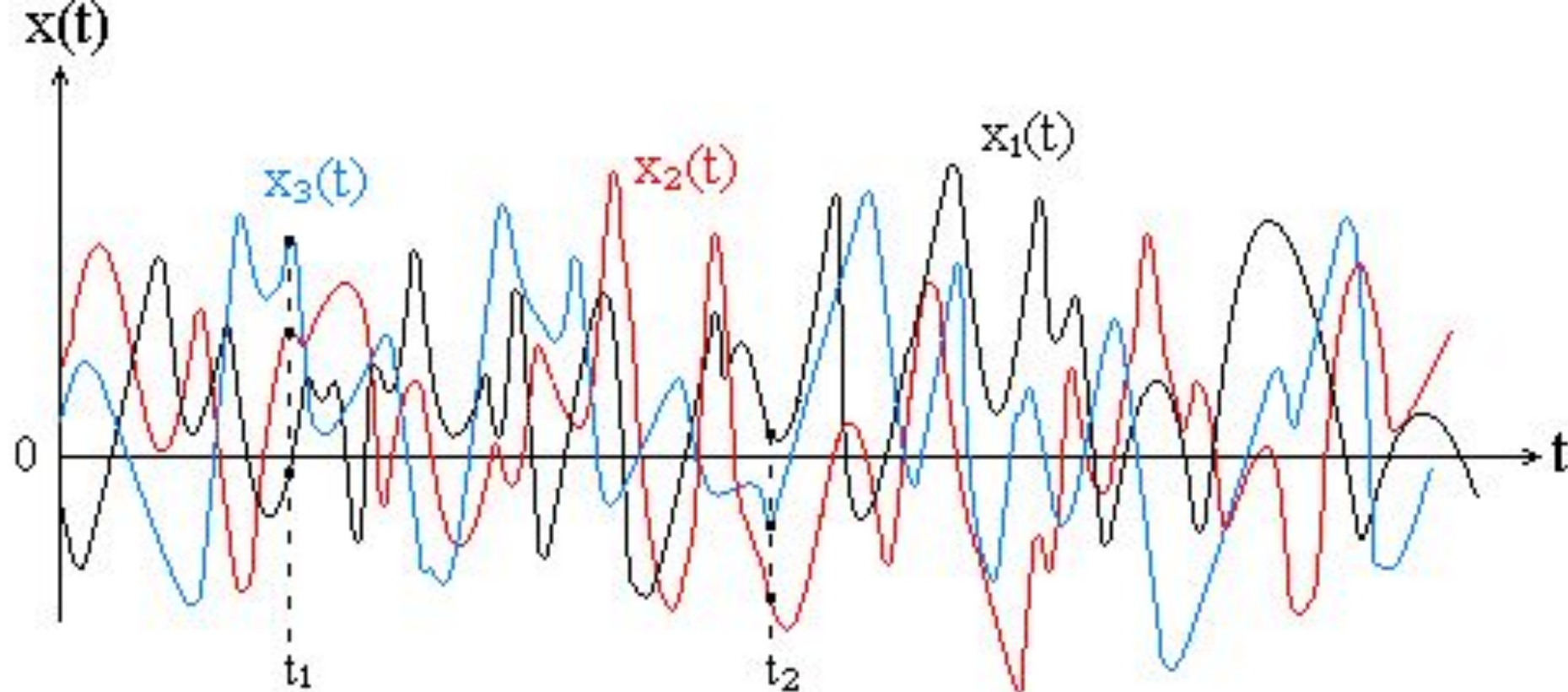


Рис. 1. Реализации случайного сигнала

$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ – реализации случайного сигнала;
 $x_1(t_1)$, $x_2(t_1)$, $x_3(t_1)$ – случайная величина $x(t_1)$;
 $x_1(t_2)$, $x_2(t_2)$, $x_3(t_2)$ – случайная величина $x(t_2)$.

1. Математическое ожидание дискретной случайной величины

$$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i P_i,$$

где x_i – i -ое значение случайной величины ;

P_i – вероятность того, что случайная величина X принимает значение x_i ;

n – количество i -ых значений случайной величины.

2. Математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

3. Если случайная величина Y является функцией случайной величины X , т.е. $y = f(x)$, то математическое ожидание равно

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx.$$

2.2. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение

Дисперсия служит для оценки степени рассеяния случайной величины около ее среднего значения.

1. Дисперсия дискретной случайной величины

$$D_x = D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 P_i.$$

2. Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx .$$

3. Если случайная величина Y является функцией случайной величины X , т.е. $y = f(x)$, то дисперсия равна

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - m_y]^2 p(x) dx .$$

Дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата ее математического ожидания, т.е.

Имеется определенное правило вычисления дисперсии.

$$\begin{aligned} D_x &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot m_x p(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} m_x^2 p(x) dx = \\ &= M[X^2] - 2m_x^2 + m_x^2 = M[X^2] - m_x^2. \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия случайной величины получается, если от математического ожидания квадрата случайной величины отнять квадрат ее математического ожидания.

2.3. Моменты случайной величины

На практике применяют моменты двух видов: *начальные моменты* и *центральные моменты*.

Начальным моментом k -го порядка непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины Y , значения которой равны $y=x^k$, т.е.

$$\alpha_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx.$$

Очевидно, что начальный момент первого порядка есть не что иное, как математическое ожидание, так как

$$\alpha_1 = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx.$$

Центральным моментом k -го порядка непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание центрированной случайной величины $X - m_x$, возведенной в k -ю степень, т.е.

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k p(x) dx.$$

Очевидно, что центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx - m_x \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = m_x - m_x = 0.$$

В свою очередь, центральный момент второго порядка есть не что иное, как дисперсия, т.е.

$$\mu_2 = D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx.$$

Центральные моменты высших порядков используются главным образом для оценки некоторых параметров законов распределения случайной величины (асимметрии, эксцесс и др.).

3. Числовые характеристики случайных сигналов

Прежде чем рассматривать числовые характеристики случайных сигналов, необходимо определить разновидности случайных процессов, которые используются для математического описания сигналов.

3.1. Стационарные случайные процессы

Стационарные случайные процессы – это важнейший класс случайных процессов, которые являются математической моделью широко встречающихся в радиотехнике сигналов и помех. Особенности этих процессов, облегчающие применение математического аппарата для их анализа, позволяют решать многие задачи статистической радиотехники.

Случайный процесс называется стационарным в узком смысле (строго стационарным), если его n -мерные плотности вероятности $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$, при любом $n = 1, 2, 3, \dots$ не меняются при любом сдвиге точек t_1, t_2, \dots, t_n вдоль оси времени, т.е.

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0)$$

Другими словами, у стационарного в узком смысле случайного процесса n -мерные плотности вероятности при всех n инвариантны относительно начала отсчета времени. Это значит:

1. Одномерная плотность вероятности не зависит от времени, т.е. $p(x, t) = p(x)$.

2. Двухмерная плотность вероятности также не зависит от времени, а зависит от разности $\tau = t_2 - t_1$, т.е.

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; \tau).$$

Это значит, что моментные функции второго порядка также не зависят от времени, а корреляционные функции зависят только от $\tau = t_2 - t_1$.

Приведем формулы для числовых характеристик нестационарного и стационарного случайных процессов.

а. Нестационарный случайный процесс

Математическое ожидание $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx .$

Дисперсия $D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 p(x,t)dx .$

Ковариационная функция

$$B_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 .$$

Корреляционная функция

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)] p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 .$$

б. Стационарный случайный процесс

Математическое ожидание $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx .$

Дисперсия $D_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x]^2 p(x)dx .$

Ковариационная функция

$$B_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 .$$

Корреляционная функция

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x][x_2 - m_x] p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 .$$

Для стационарных случайных сигналов можно выделить следующие свойства числовых характеристик.

1. Корреляционная функция стационарного процесса четная, т.е. $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

2. Для многих практических случаев выполняется равенство $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$.

3. Дисперсия стационарного процесса равна значению корреляционной функции при $\tau = 0$, т.е. $D_x = R_x(0)$.

4. Абсолютное значение корреляционной функции не превышает ее значения при $\tau = 0$, т.е. $R_x(\tau) \leq R_x(0) = D_x$.

Докажем это.

Определим математическое ожидание $M[(x(t_1) - x(t_2))^2] \geq 0$,
полагая, что $m_x = 0$.

$$\begin{aligned} M[(x(t_1) - x(t_2))^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - x_2)^2 p(x, \tau) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 p(x, \tau) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x, \tau) dx + \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 p(x, \tau) dx = \\ &= D_x + D_x - 2R_x(\tau) = 2D_x - 2R_x(\tau) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $R_x(\tau) \leq D_x$.

в. Эргодический случайный процесс

Большинство стационарных случайных процессов обладают очень важным для практики свойством *эргодичности*. Суть этого свойства заключается в том, что все или некоторые вероятностные характеристики процесса можно определить не только путем усреднения по множеству реализаций, но и путем усреднения по времени одной достаточно длинной реализации. Усреднение по времени физически можно объяснить тем, что стационарный случайный процесс протекает однородно во времени, вследствие чего одна продолжительная реализация содержит все сведения о свойствах процесса.

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если при определении его статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной сколь угодно длинной реализации. Если речь идет о всех статистических характеристиках, то такой процесс называется эргодическим в строгом смысле. В то же время возможна эргодичность относительно отдельных характеристик.

Эргодичность случайных процессов позволяет изучать их статистические свойства по одной реализации, наблюдаемой в течение длительного промежутка времени.

Математическое ожидание

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt .$$

Дисперсия

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt .$$

Ковариационная функция

$$B_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt .$$

Корреляционная функция

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt .$$

3.3. Взаимная корреляционная функция

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ стационарные и стационарно связанные случайные процессы. Взаимные ковариационная и корреляционная функции этих процессов определяются следующими соотношениями:

$$B_{xy}(\tau) = B_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y p(x, y; \tau) dx dy .$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) \cdot (y - m_y) p(x, y; \tau) dx dy .$$

Для эргодических процессов

$$B_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt .$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x][y(t + \tau) - m_x] dt .$$

Рассмотрим два эргодических случайных процесса $x(t)$ и $y(t)$ с математическими ожиданиями, равными 0. Корреляционная функция случайного процесса $z(t) = x(t) + y(t)$ равна

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) + y(t)][x(t + \tau) + y(t + \tau)] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)y(t + \tau) dt + \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t + \tau) dt = \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau). \end{aligned}$$

Выводы.

1. Обоснована необходимость определения числовых характеристик случайных величин и случайных процессов.
2. Дано определение стационарных и эргодических случайных процессов.
3. Приведены числовые характеристики случайных величин и случайных процессов.

2.4. Корреляционные моменты двух случайных величин

Для количественной меры статистических связей двух случайных величин применяют смешанный начальный и центральный моменты случайных величин 2-го порядка.

Смешанный начальный момент случайных величин 2-го порядка называется *ковариационным моментом*.

$$B_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dx dy .$$

Смешанный центральный момент случайных величин 2-го порядка называется *корреляционным моментом*.

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y)p(x, y)dx dy .$$

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) p(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y) dx dy - m_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yp(x, y) dx dy - \\ &- m_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y) dx dy + m_x m_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy . \end{aligned}$$

Простейшие преобразования позволяют установить следующую связь между B_{xy} и R_{xy} .

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy - m_x \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy - m_y \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dx + m_x m_y ;$$

$$R_{xy} = B_{xy} - m_x m_y .$$

Свойства корреляционного момента.

1. Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.

Доказательство производится с учетом того, что для независимых случайных величин справедливо

$$p(x, y) = p(x) \cdot p(y).$$

$$B_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yp(y)dy = m_x m_y.$$

Тогда $R_{xy} = B_{xy} - m_x m_y = m_x m_y - m_x m_y = 0.$

2. При $R_{xy} < 0$ ($R_{xy} > 0$) между величинами X и Y существует отрицательная (положительная) корреляционная зависимость, т.е. чем больше значение одной величины, тем более вероятны меньшие (большие) значения у другой.

3. Из коррелированности двух случайных величин следует их зависимость, но из зависимости еще не следует их коррелированность.

Из независимости двух случайных величин обязательно следует их некоррелированность, но из некоррелированности не всегда следует их независимость.

Часто используется числовая характеристика, называемая коэффициентом корреляции, значение которого исключает зависимость корреляции от дисперсии:

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

3. Числовые характеристики случайных сигналов

Прежде чем рассматривать числовые характеристики случайных сигналов, необходимо определить разновидности случайных процессов, которые используются для математического описания сигналов.