



Урок алгебры в 11 классе

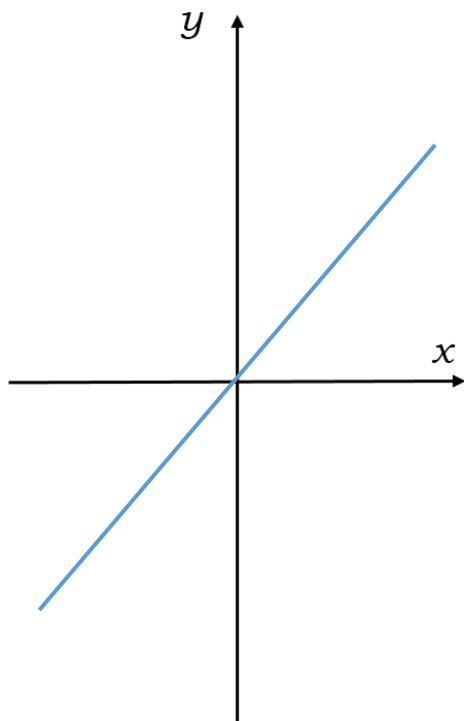
Степенные функции, их свойства и графики.

Подготовила
Учитель математики
I квалификационной категории
МКОУ «Хотьковская СОШ»
*Коломина
Наталья Николаевна*

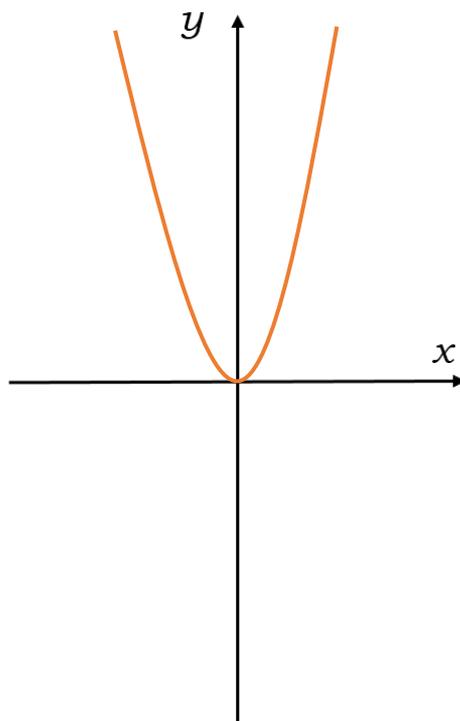
Функция вида $y = x^r$ (где r - любое действительное число (в том числе и иррациональное)) называют *степенными функциями*.

Если r - натуральное число ($r = n$), то получаем функцию $y = x^n$.

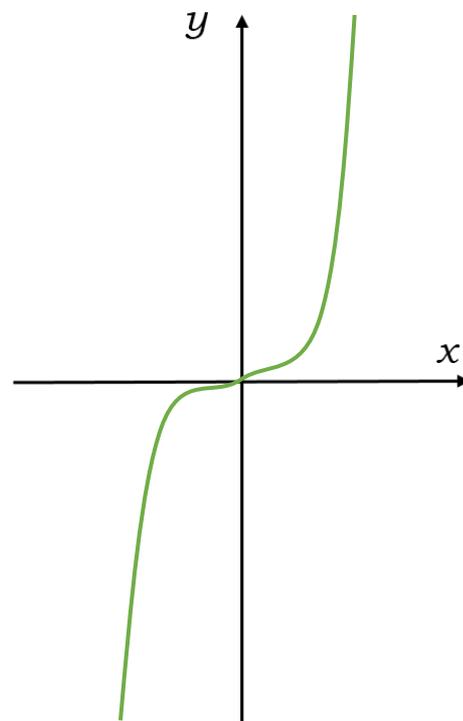
$n=1$



$n=2$

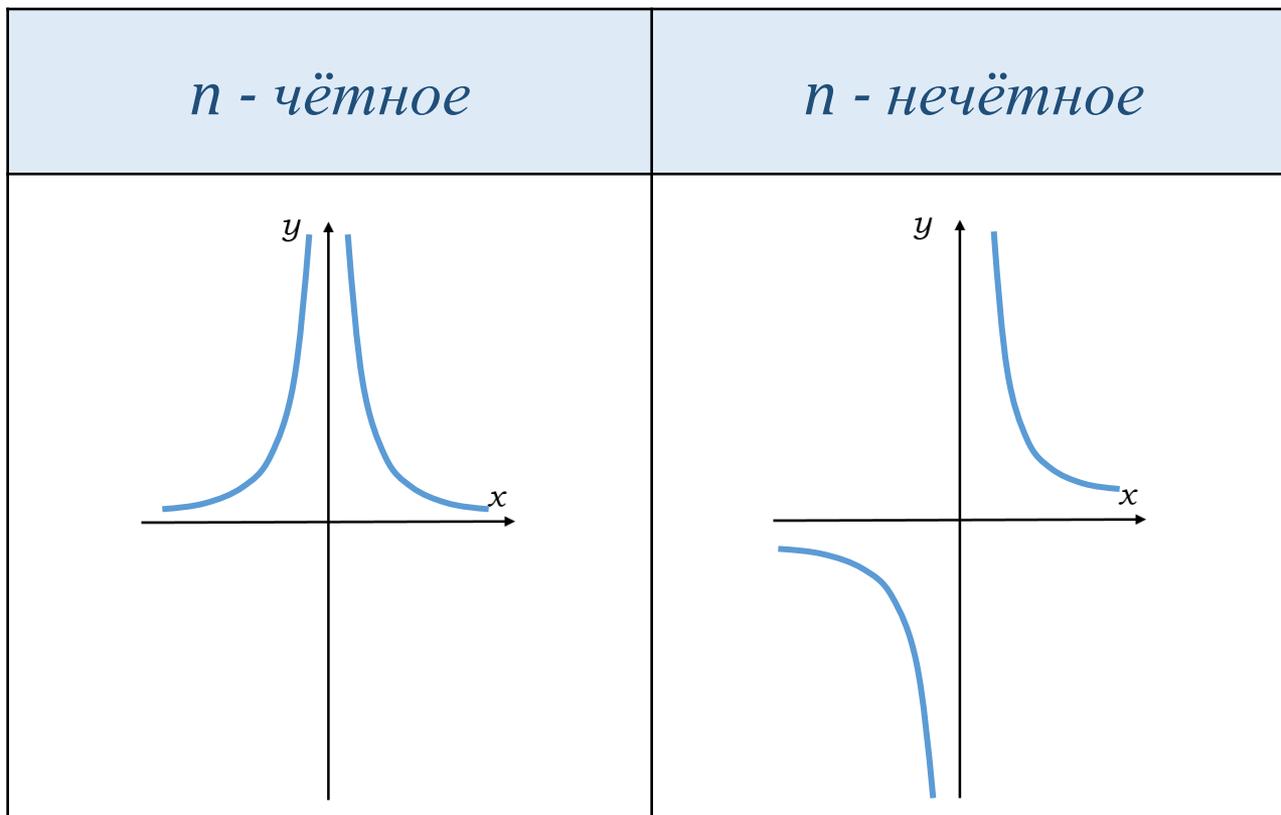


$n=3$

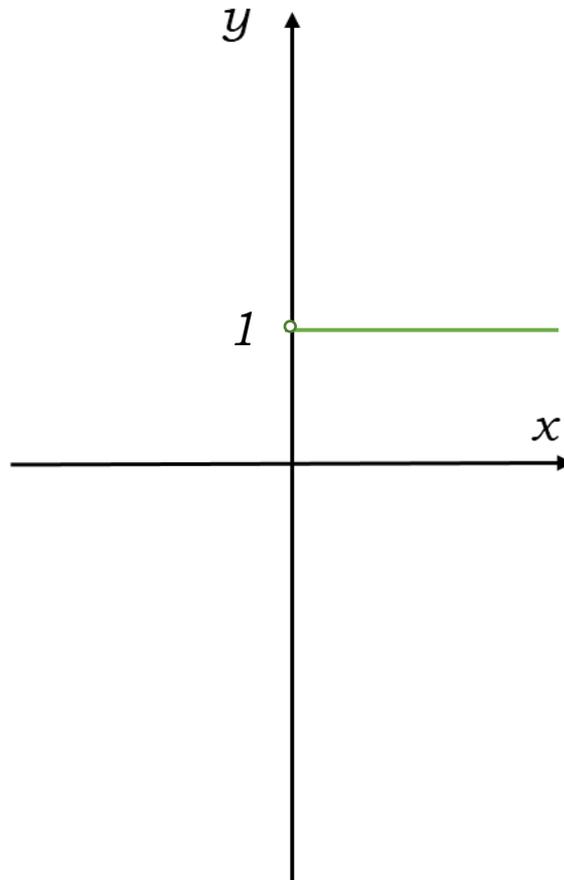


Если $r = -n$, то получаем степенную функцию $y = x^{-n}$ или

$$y = \frac{1}{x^n}$$



При $r = 0$ имеем функцию $y = x^0$ или $y = 1$
(где $x \neq 0$). Графиком такой функции является
горизонтальная прямая $y = 1$ с выколотой точкой
 $x = 0$ ($x > 0$).

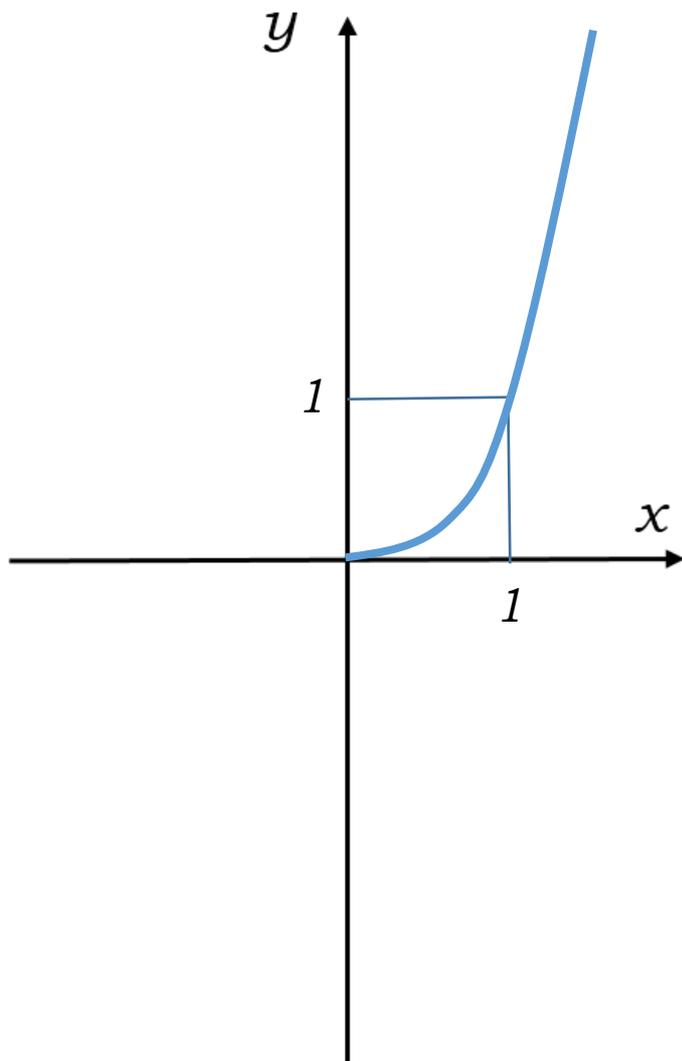


Рассмотрим теперь степенные функции

$$y = x^{\frac{m}{n}}$$

С рациональными показателями
степени.

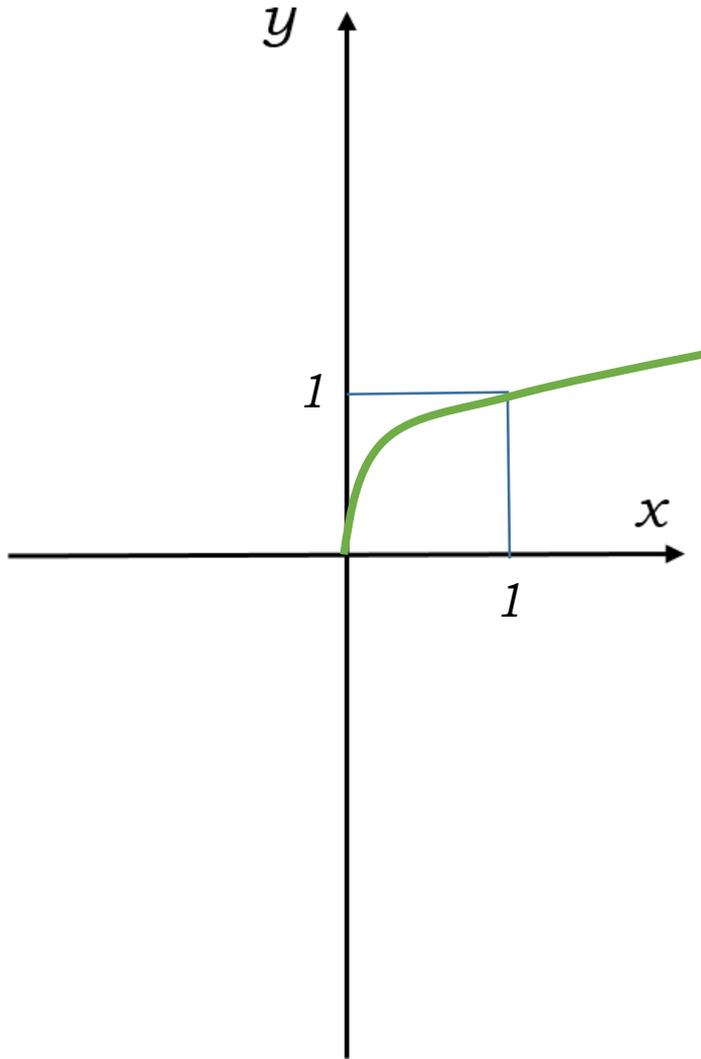
Их свойства и графики существенно
зависят от показателя степени.



$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad \frac{m}{n} > 1$$

Свойства функции:

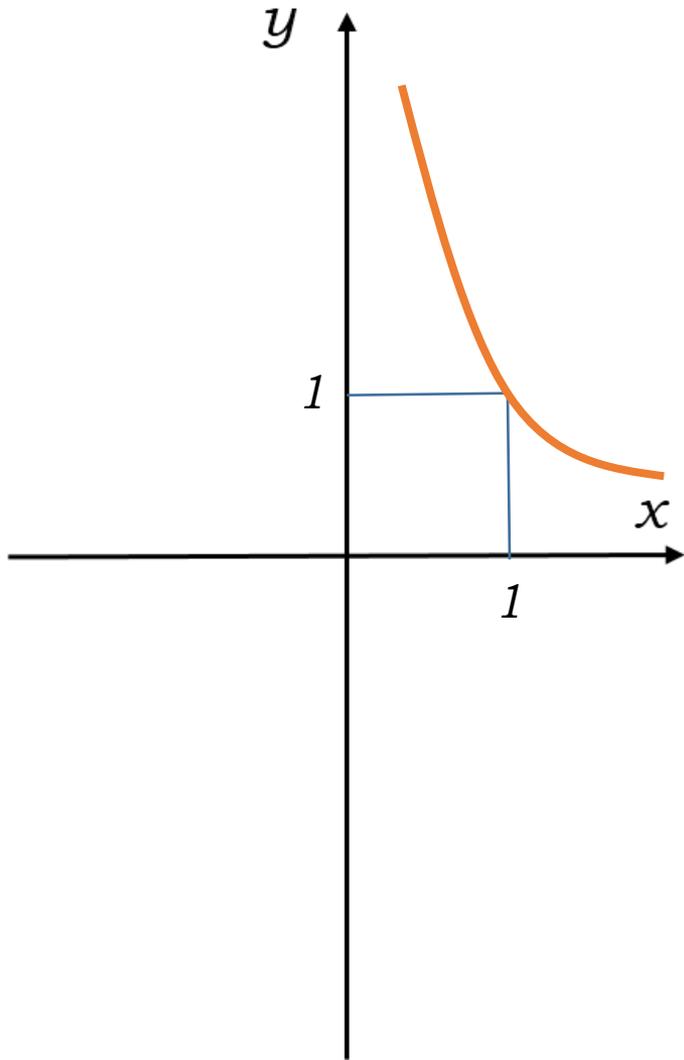
1. Область определения $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Определённой чётности не имеет.
3. Возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшее значение $y_{\text{наим}} = 0$, наибольшего значения не имеет.
6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = [0; +\infty)$.
8. Выпукла вниз.



$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad 0 < \frac{m}{n} < 1$$

Свойства функции:

1. Область определения $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Определённой чётности не имеет.
3. Возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшее значение $y_{\text{наим}} = 0$, наибольшего значения не имеет.
6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = [0; +\infty)$.
8. Выпукла вверх.



$$y = x^{\frac{m}{n}} \quad \frac{m}{n} < 0$$

Свойства функции:

1. Область определения $D(f) = (0; +\infty)$.
2. Определённой чётности не имеет.
3. Возрастает на промежутке $(0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшего и наибольшего значений не имеет.
6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = (0; +\infty)$.
8. Выпукла вверх.

Теорема.

Если $x > 0$ и r – любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ вычисляется по формуле

$$y' = rx^{r-1}$$

Пример 1. Найдём производную функции:

$$а) y = 3x^{\frac{2}{3}}; \quad y' = 3 \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{-\frac{1}{3}};$$

$$б) y = 7x^{-\frac{4}{7}}; \quad y' = 7 \cdot \left(x^{-\frac{4}{7}}\right)' = 7 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \cdot x^{-\frac{11}{7}} = -4x^{-\frac{11}{7}};$$

$$в) y = 8(6x - 5)^{\frac{5}{8}}; \quad y' = 8 \left((6x - 5)^{\frac{5}{8}} \right)' = 8 \cdot 6 \cdot \frac{5}{8} (6x - 5)^{-\frac{3}{8}} = 30(6x - 5)^{-\frac{3}{8}}.$$

При этом было использовано правило дифференцирования

$$(f(ax + b))' = af'(ax + b).$$

Пример 2. Исследуем функцию $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$
На монотонность и экстремумы и
построим её график.

1. Найдём производную функции:

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

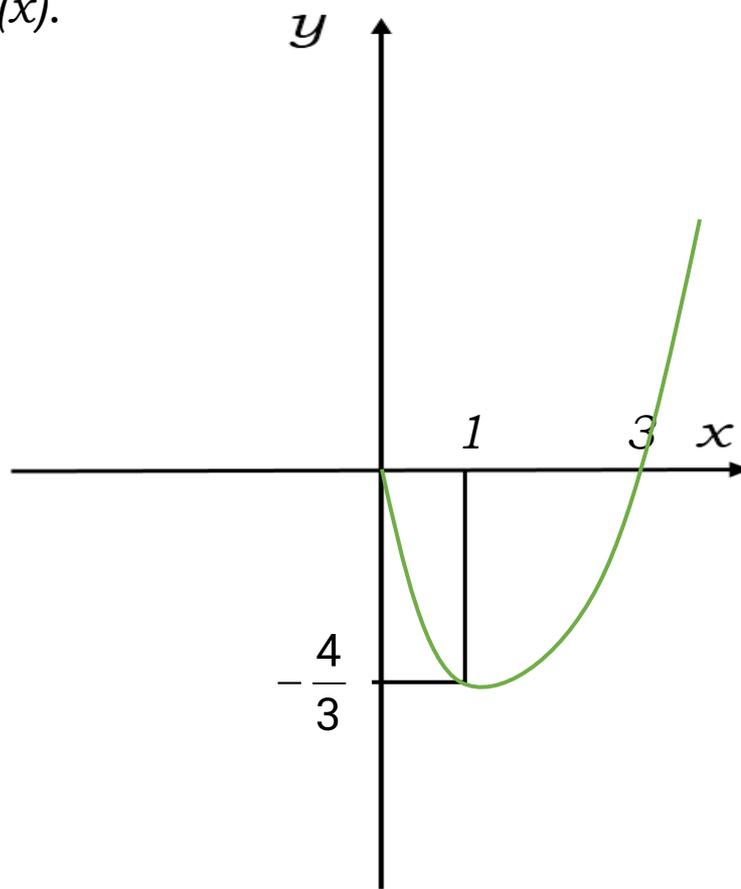
2. Функция существует при $x \geq 0$, производная существует при $x > 0$.
Поэтому критических точек у функции нет. Стационарную точку
найдем из условия $y' = 0$ или $\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$, откуда $x=1$.

3. Очевидно, что при $x \in (0; 1]$, значение $y' \leq 0$ и функция $y(x)$ убывает
на этом промежутке. При $x \in [1; +\infty)$ значение $y' \geq 0$ и функция $y(x)$
возрастает. В точке $x = 1$ функция $y(x)$ имеет минимум

$$y_{\min} = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

4. График функции $y(x)$ пересекает ось абсцисс в точке, которая является решением уравнения $0 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ или $0 = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}(x - 3)$, откуда $x=0$ или $x=3$.

5. Построим график функции $y(x)$.



Пример 3.

Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = (3x - 2)^{\frac{1}{3}}$ в точке $a = 1$.

Напомним общий вид уравнения касательной: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

1. Найдём значение функции: $f(a) = (3 \cdot 1 - 2)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = 1$.

2. Найдём производную функции: $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (3x - 2)^{-\frac{2}{3}} = (3x - 2)^{-\frac{2}{3}}$

и её значение $f'(1) = 1$.

3. Подставим значения $f(a)$, $f'(a)$ и a в уравнение касательной и получим:

$$y = 1 + 1 \cdot (x - 1) \quad \text{или} \quad y = x$$

Контрольные вопросы:

1. Определение степенной функции $y = x^r$.
2. Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ и её график для:
 - а) $\frac{m}{n} > 1$;
 - б) $0 < \frac{m}{n} < 1$;
 - в) $\frac{m}{n} < 0$.
3. Производная степенной функции.

Источники:



Шаблон презентации:

<http://school-box.ru/raznoe/vse-dlya-prezentazii/1486-shablony-dlya-prezentaziy-powerpoint-21.html>

Эмблема СУПа:

<http://dg54.mycdn.me/getImage?photoId=582860090169&photoType=6>

- Мордкович А.Г. - учебник-Алгебра и начала математического анализа (10-11, ч.1, баз.ур.)-2014
- Мордкович А.Г. - задачник-Алгебра и начала математического анализа (10-11 кл., ч.2, баз.ур.) -2014