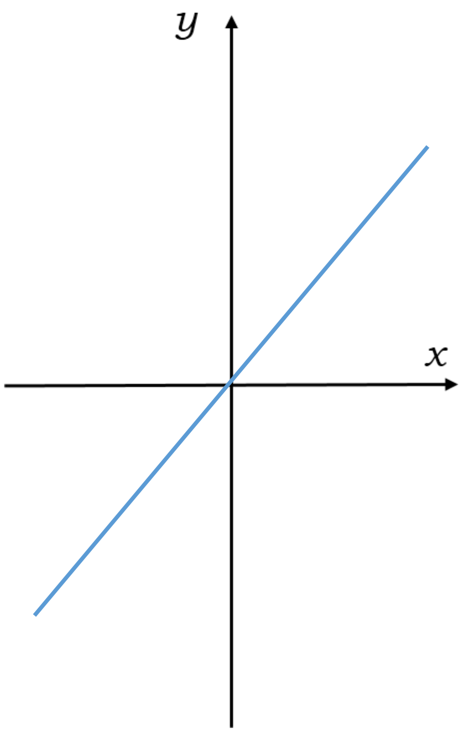
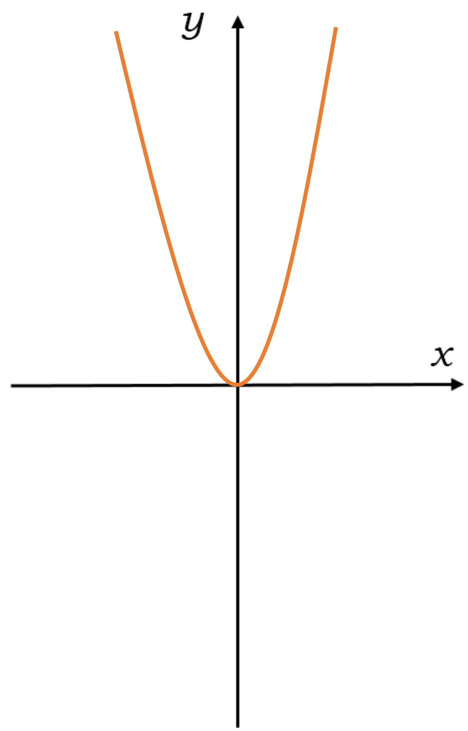
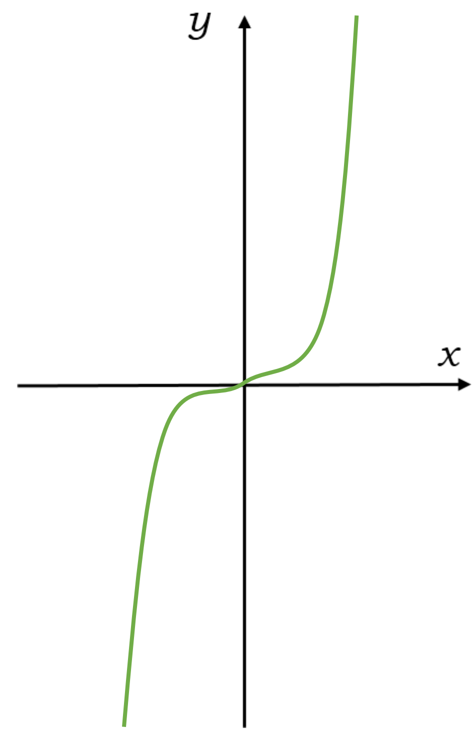
Урок алгебры в 11 классе

Степенные функции, их свойства и графики.

Подготовила
Учитель математики
I квалификационной категории
МКОУ «Хотьковская СОШ»
Коломина
Наталья Николаевна

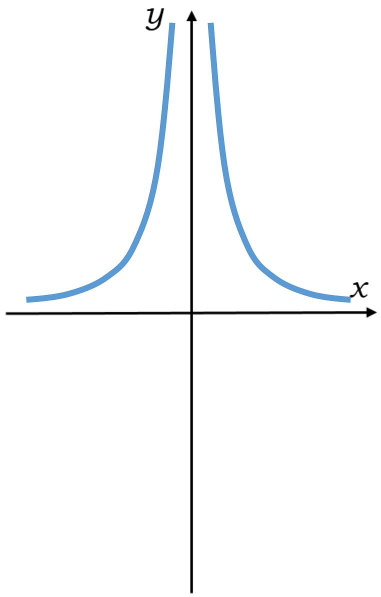
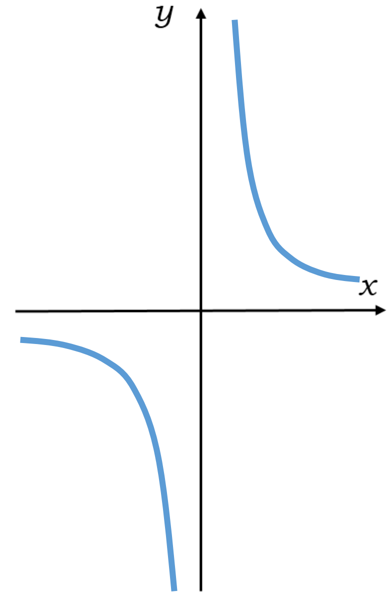
Функция вида $\boldsymbol{y = x^r}$ (где r - любое действительное число (в том числе и иррациональное)) называют *степенными функциями*.

Если r - натуральное число ($r = n$), то получаем функцию $\boldsymbol{y = x^n}$.

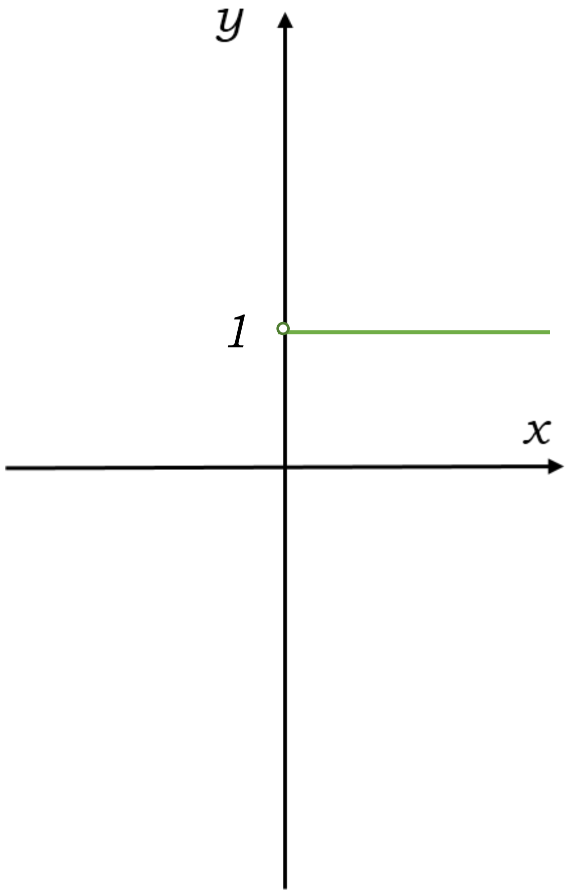
$n=1$	$n=2$	$n=3$
		

Если $r = -n$, то получаем степенную функцию $y = x^{-n}$ или

$$y = \frac{1}{x^n}$$

n - чётное	*n - нечётное*
	

При $r = 0$ имеем функцию $y = x^0$ или $y = 1$ (где $x \neq 0$). Графиком такой функции является горизонтальная прямая $y = 1$ с выколотой точкой $x = 0$ $(x>0)$.

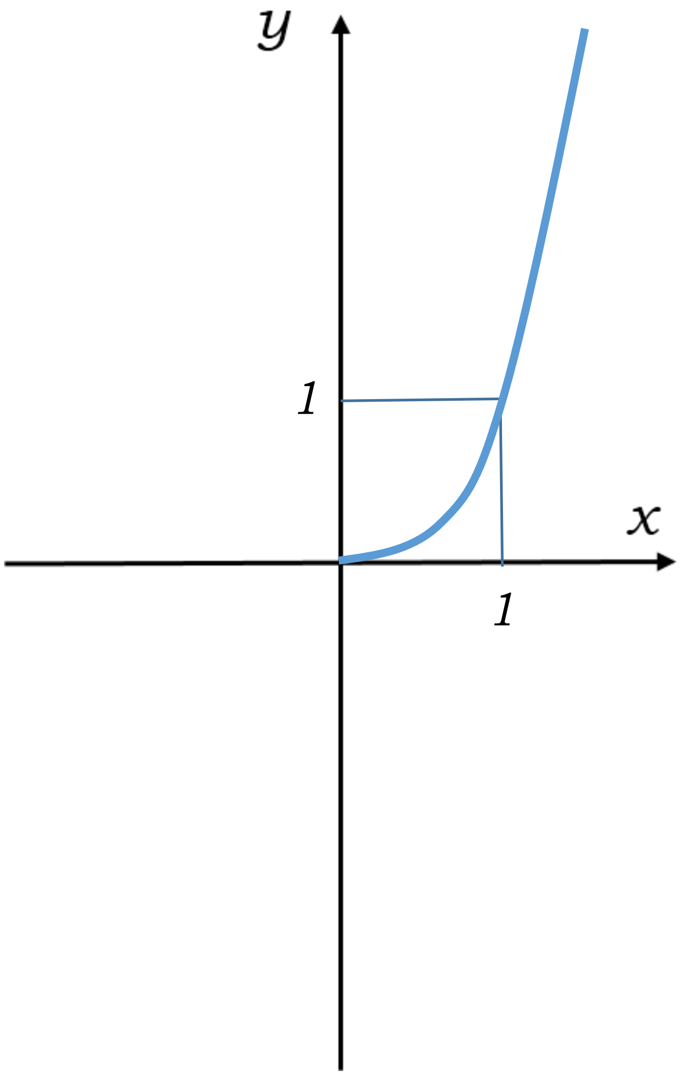


Рассмотрим теперь степенные функции

$$\boxed{y = x^{\frac{m}{n}}}$$

С рациональными показателями степени.

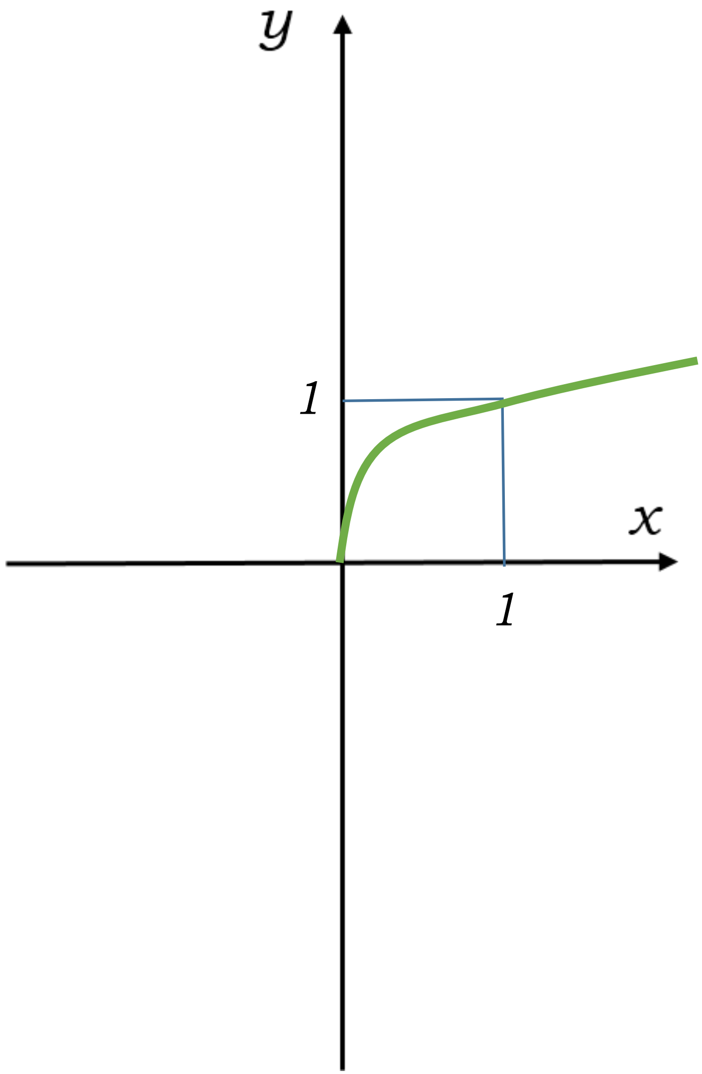
Их свойства и графики существенно зависят от показателя степени.



$$y = x^{\frac{m}{n}} \qquad \frac{m}{n} > 1$$

Свойства функции:

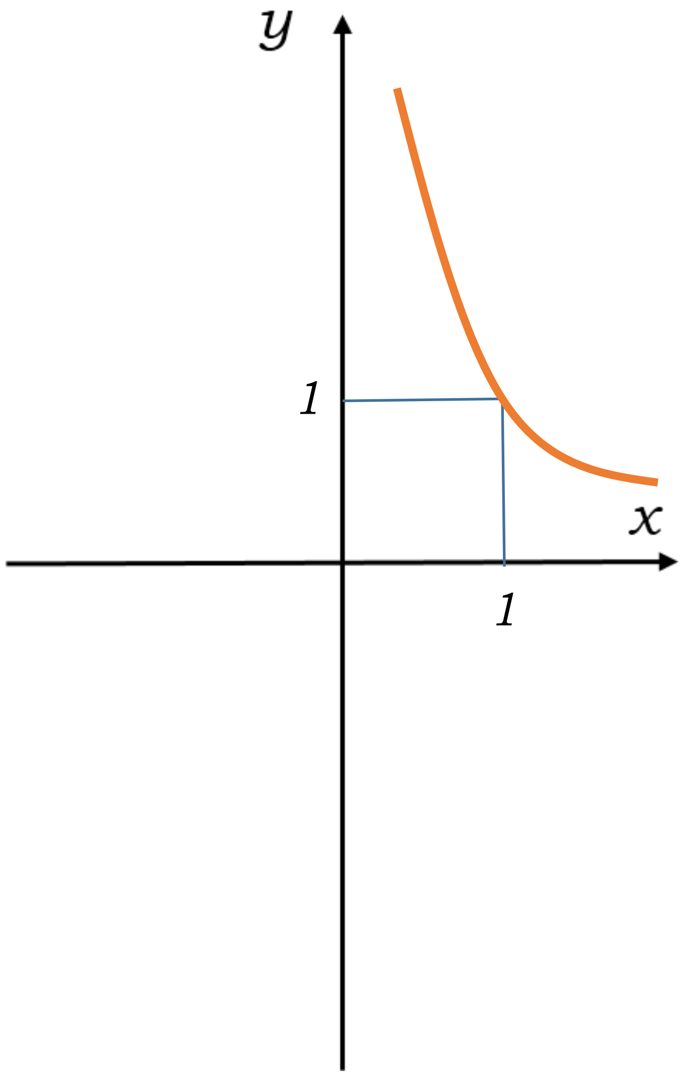
1. Область определения $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Определённой чётности не имеет.
3. Возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшее значение $y_{наим} = 0$, наибольшего значения не имеет.
6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = [0; +\infty)$.
8. Выпукла вниз.



$$y = x^{\frac{m}{n}} \qquad 0 \langle \frac{m}{n} \langle 1$$

Свойства функции:

1. Область определения $D(f) = [0; +\infty)$.
2. Определённой чётности не имеет.
3. Возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.
4. Ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. Наименьшее значение $y_{наим} = 0$, наибольшего значения не имеет.
6. Непрерывна.
7. Область значений $E(f) = [0; +\infty)$.
8. Выпукла вверх.



$$y = x^{\frac{m}{n}} \qquad \frac{m}{n} \langle 0$$

Свойства функции:

1. *Область определения D(f) = (0; +∞).*
2. *Определённой чётности не имеет.*
3. *Возрастает на промежутке (0; +∞).*
4. *Ограничена снизу и не ограничена сверху.*
5. *Наименьшего и наибольшего значений не имеет.*
6. *Непрерывна.*
7. *Область значений E(f) = (0; +∞).*
8. *Выпукла вверх.*

Теорема.

Если x>0 и r – любое рациональное число, то производная степенной функции $y = x^r$ *вычисляется по формуле*

$$y' = rx^{r-1}$$

Пример 1. *Найдём производную функции:*

а) $y=3x^{\frac{2}{3}}$; $\quad y'=3\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=2x^{-\frac{1}{3}}$;

б) $y=7x^{-\frac{4}{7}}$; $\quad y'=7\cdot\left(x^{-\frac{4}{7}}\right)'=7\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot x^{-\frac{11}{7}}=-4x^{-\frac{11}{7}}$;

в) $y=8(6x-5)^{\frac{5}{8}}$; $\quad y'=8\left((6x-5)^{\frac{5}{8}}\right)'=8\cdot 6\cdot\frac{5}{8}96x-5)^{-\frac{3}{8}}=$

$30(6x-5)^{-\frac{3}{8}}$.

При этом было использовано правило дифференцирования

$$(f(ax+b))'=af'(ax+b).$$

Пример 2. *Исследуем функцию* $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ *На монотонность и экстремумы и построим её график.*

1. Найдём производную функции:

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

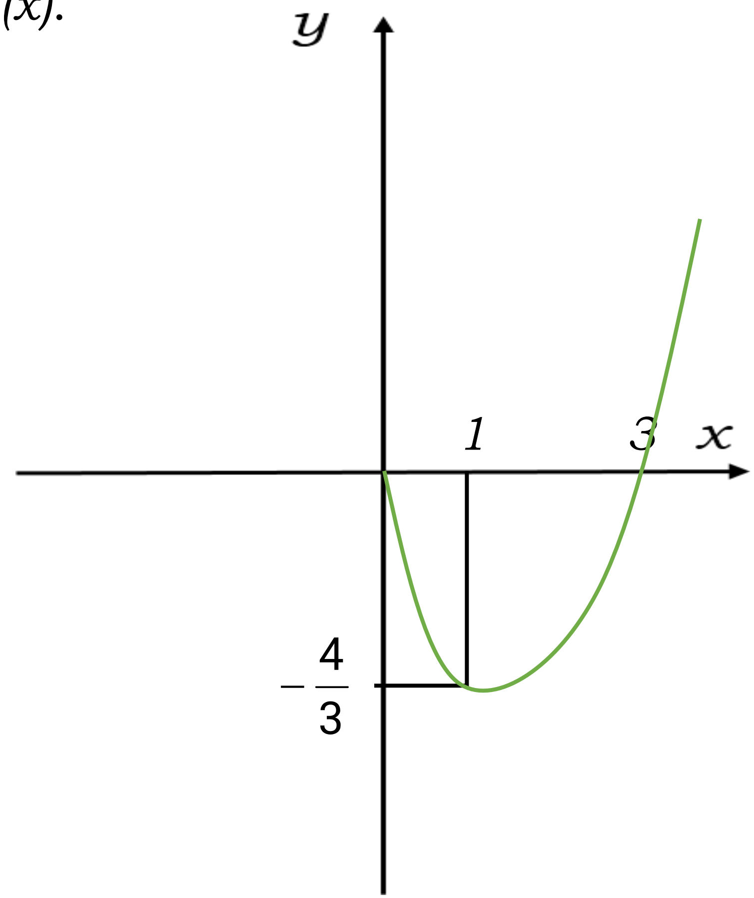
2. Функция существует при $x \geq 0$, производная существует при $x>0$. Поэтому критических точек у функции нет. Стационарную точку найдём из условия $y' = 0$ или $\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$, откуда $x=1$.

3. Очевидно, что при $x \in (0;1]$, значение $y' \leq 0$ и функция $y(x)$ убывает на этом промежутке. При $x \in [1;+\infty)$ значение $y' \geq 0$ и функция $y(x)$ возрастает. В точке $x = 1$ функция $y(x)$ имеет минимум

$$y_{\min} = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

4. График функции *y(x)* пересекает ось абсцисс в точке, которая является решением уравнения $0 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$ или $0 = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}(x-3)$, откуда $x=0$ или $x=3$.

5. Построим график функции *y(x)*.



Пример 3. *Напишем уравнение касательной к графику функции* $f(x)=(3x-2)^{\frac{1}{3}}$ *в точке* $a = 1$*.*

Напомним общий вид уравнения касательной: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

1. Найдём значение функции: $f(a)=(3\cdot 1-2)^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}=1.$

2. Найдём производную функции: $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot (3x-2)^{-\frac{2}{3}}=(3x-2)^{-\frac{2}{3}}$

и её значение $f'(1)=1.$

3. Подставим значения $f(a)$, $f'(a)$ и a в уравнение касательной и получим:

$$y=1+1\cdot(x-1) \quad \text{или} \quad y=x$$

Контрольные вопросы:

1. Определение степенной функции $\boldsymbol{y = x^r}$.

2. Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ и её график для:

$$a)\ \frac{m}{n}\rangle 1; \qquad б)\ 0\langle \frac{m}{n} \langle 1; \qquad в)\ \frac{m}{n}\langle 0.$$

3. Производная степенной функции.

Источники:

Шаблон презентации:

http://school-box.ru/raznoe/vse-dlya-prezentazii/1486-shablony-dlya-prezentaziy-powerpoint-21.html

Эмблема СУПа:

http://dg54.mycdn.me/getImage?photoId=582860090169&photoType=6

- Мордкович А.Г. - учебник-Алгебра и начала математического анализа (10-11, ч.1, баз.ур.)-2014
- Мордкович А.Г. - задачник-Алгебра и начала математического анализа (10-11 кл., ч.2, баз.ур.) -2014