

Пусть $|a| \leq 1$, $\arccos a$ — такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a .

$$\cos x = a$$

корни уравнения выражаются формулой $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a :

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

а общая формула решения

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Тригонометрическая таблица

градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

629 1) $\sqrt{3} \sin x \cos x = \sin^2 x$; 2) $2 \sin x \cos x = \cos x$;
3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; 4) $\sin 2x + 2 \cos^2 x = 0$.

631 1) $2 \sin 2x - 3 (\sin x + \cos x) + 2 = 0$;
2) $\sin 2x + 3 = 3 \sin x + 3 \cos x$;
3) $\sin 2x + 4 (\sin x + \cos x) + 4 = 0$;
4) $\sin 2x + 5 (\cos x + \sin x + 1) = 0$.

$$\sin(30^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ - \alpha) = -\sqrt{3} \sin \alpha;$$

$$\sin(30^\circ - \alpha) + \sin(30^\circ + \alpha) = \cos \alpha.$$

$$(2 \cos x + 1)(2 \sin x - \sqrt{3}) = 0;$$

$$2 \cos x - 3 \sin x \cos x = 0;$$

$$4 \sin^2 x - 3 \sin x = 0;$$

тригонометрические неравенства

$$\sin x > a$$

$$\cos x > a$$

$$\operatorname{tg} x > a$$

$$\sin x < a$$

$$\cos x < a$$

$$\operatorname{tg} x < a$$

Алгоритм решения неравенства

$$\operatorname{ctg} x > a$$

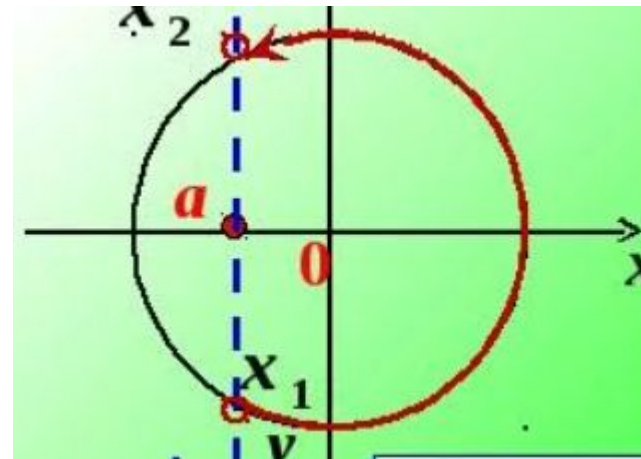
Изобразить единичную окружность, отметить число $x = a$

$$\operatorname{ctg} x < a$$

Выделить дугу окружности, соответствующую знаку сравнения (обход - строго против часовой стрелки).

Записать числовые значения граничных точек дуги.

Учитывая, что **начало дуги** – **меньшее значение**.



Записать решение неравенства

$$x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n),$$

$$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n).$$

$$\cos x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n),$$

$$\cos x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n).$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} x > a \quad x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right),$$

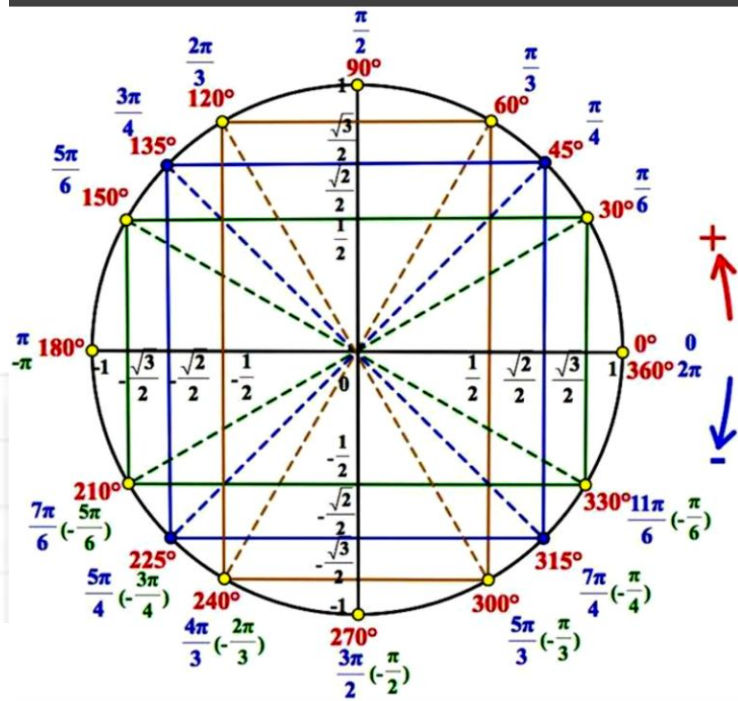
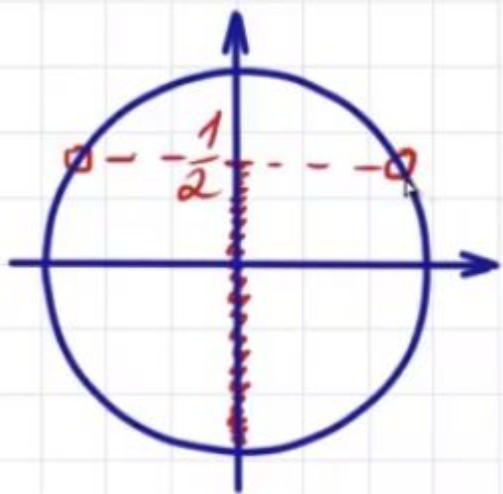
$$\operatorname{tg} x < a \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \operatorname{arctg} a + \pi n \right).$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg} x > a \quad x \in (\pi n, \operatorname{arcctg} a + \pi n),$$

$$\operatorname{ctg} x < a \quad x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n, \pi + \pi n).$$

Как решать тригонометрические неравенства

1. Решите неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$.

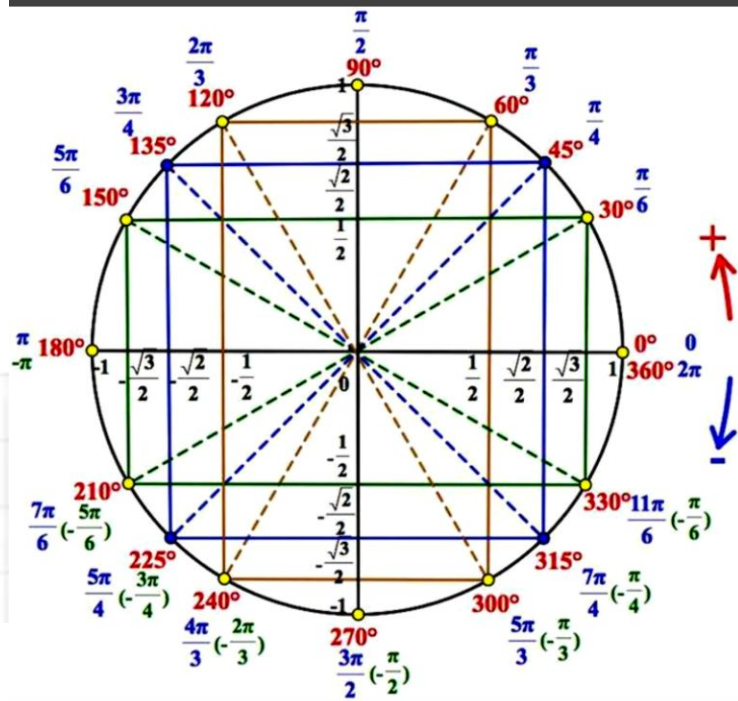
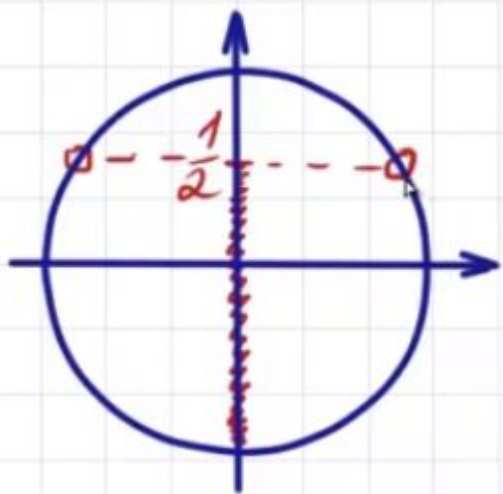


$$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n).$$

$$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n).$$

Как решать тригонометрические неравенства

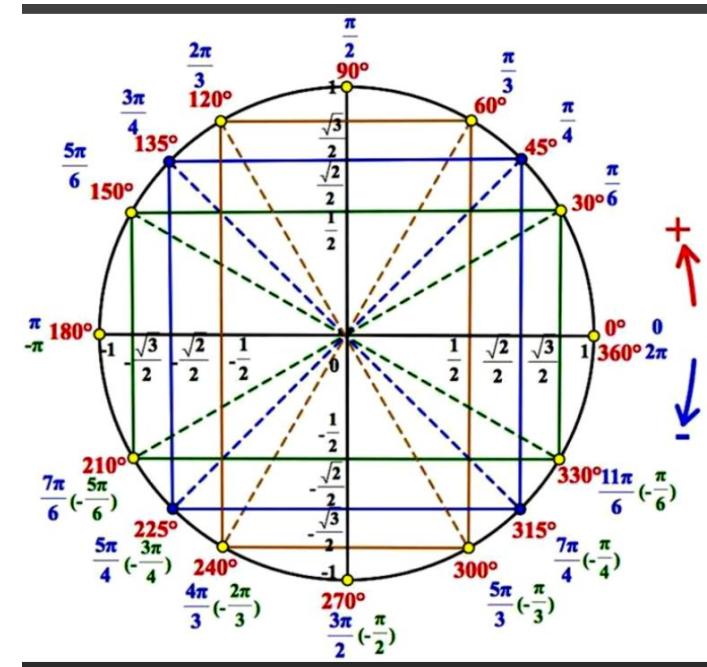
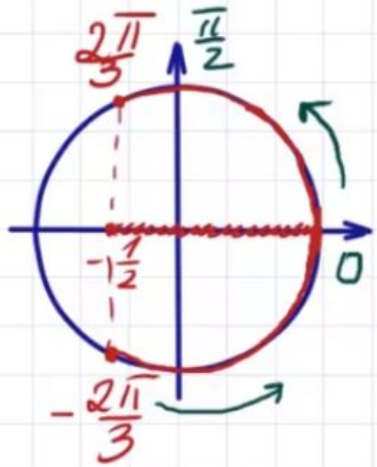
1. Решите неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$.



$$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n).$$

$$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n).$$

2. Решите неравенство $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.



$$\cos x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n),$$

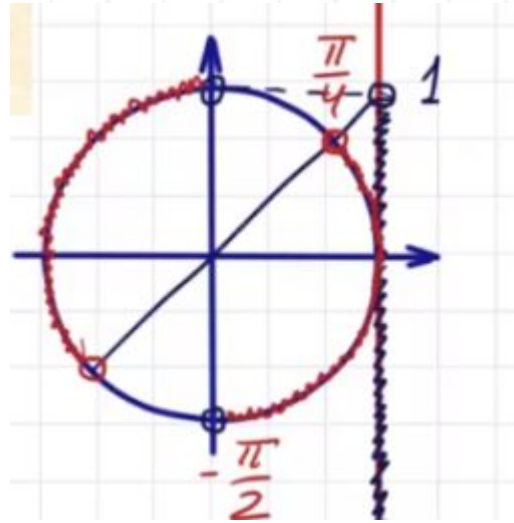
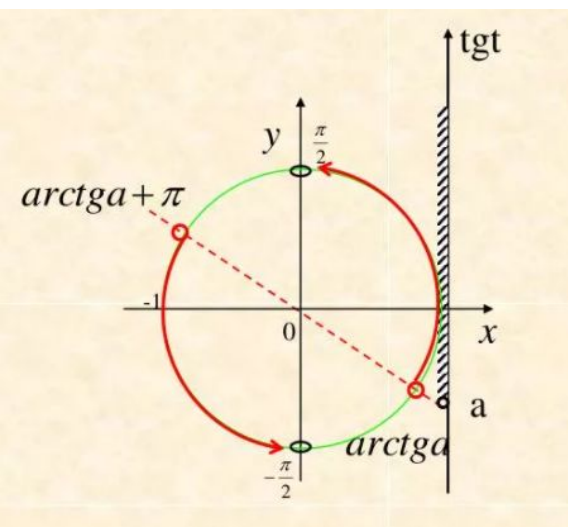
$$\cos x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n).$$

Тригонометрическая таблица

градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

3. Решите неравенство $\operatorname{tg} x < 1$.

$$\operatorname{tg}(\pi + \frac{x}{3}) + 1 \geq 0$$



$$\operatorname{tg} x > a$$

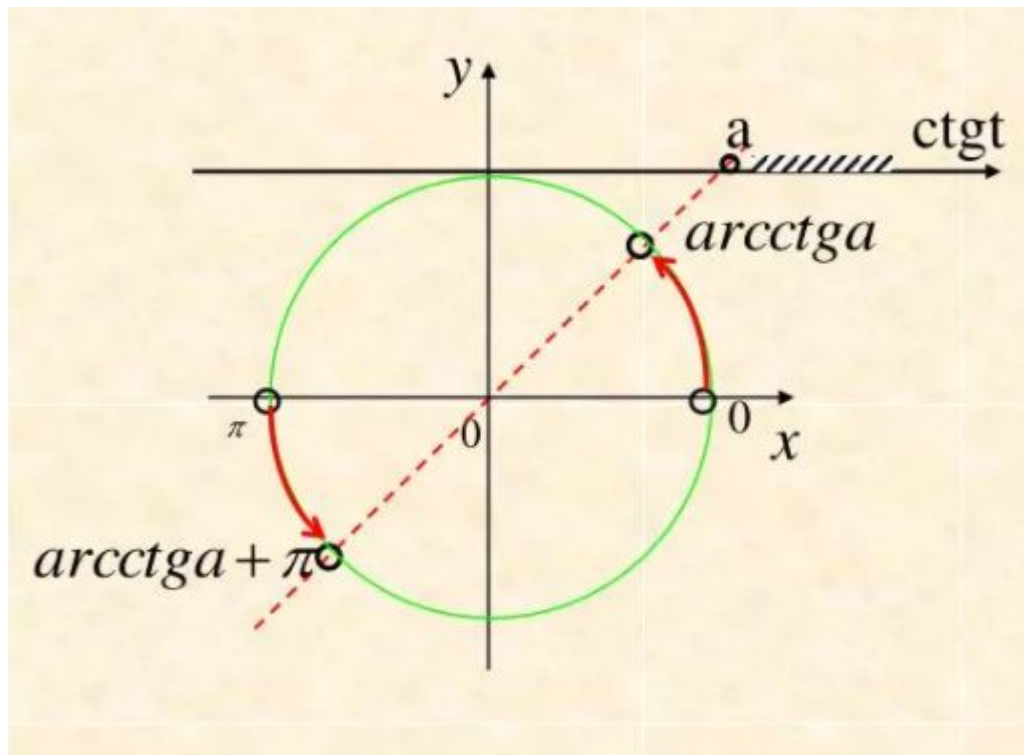
$$x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right),$$

$$\operatorname{tg} x < a$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \operatorname{arctg} a + \pi n \right).$$

Тригонометрическая таблица

градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-



Тригонометрическая таблица

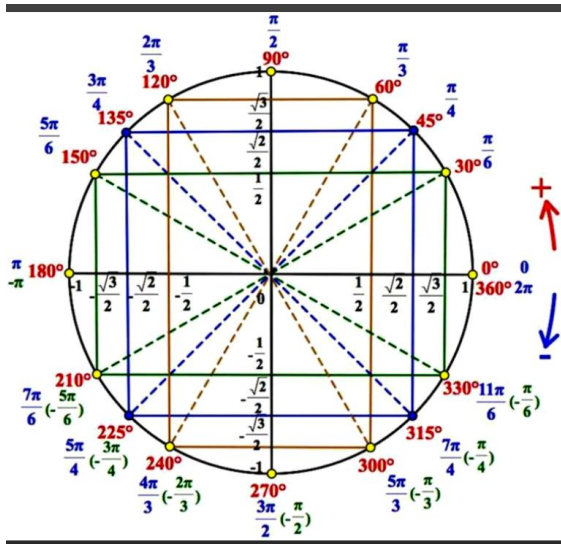
градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

$$\text{ctg } x > a$$

$$x \in (\pi n; \text{arccctg } a + \pi n)$$

$$\text{ctg } x < a$$

$$x \in (\text{arccctg } a + \pi n; \pi + \pi n)$$



Тригонометрическая таблица

градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

Решить неравенство (648—654).

648 1) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

649 1) $\cos x \leq \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -2$; 3) $\cos x \geq 1$; 4) $\cos x \leq -1$

650 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

651 1) $\sin x \geq -\sqrt{2}$; 2) $\sin x > 1$;
 3) $\sin x \leq -1$; 4) $\sin x \geq 1$.

652 1) $\sqrt{2} \cos 2x \leq 1$; 2) $2 \sin 3x > -1$;
 3) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

653 1) $\cos \left(\frac{x}{3} + 2\right) \geq \frac{1}{2}$; 2) $\sin \left(\frac{x}{4} - 3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

654 1) $\sin^2 x + 2 \sin x > 0$; 2) $\cos^2 x - \cos x < 0$.

$$\cos \left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) < 0;$$

3. [7] $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 \leq 0$.

$$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n, \pi - \arcsin a + 2\pi n)$$

$$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n)$$

$$\cos x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\arccos a + 2\pi n, \arccos a + 2\pi n)$$

$$\cos x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$$

Задания для самостоятельной работы

а) $3 \cos^2 t - 4 \cos t \geq 4$;

в) $3 \cos^2 t - 4 \cos t < 4$;

б) $6 \cos^2 t + 1 > 5 \cos t$;

г) $6 \cos^2 t + 1 \leq 5 \cos t$.

Вариант I

Решить неравенство

$$\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \geq 1;$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1;$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 3 < 0.$$

Вариант II

Решить неравенство

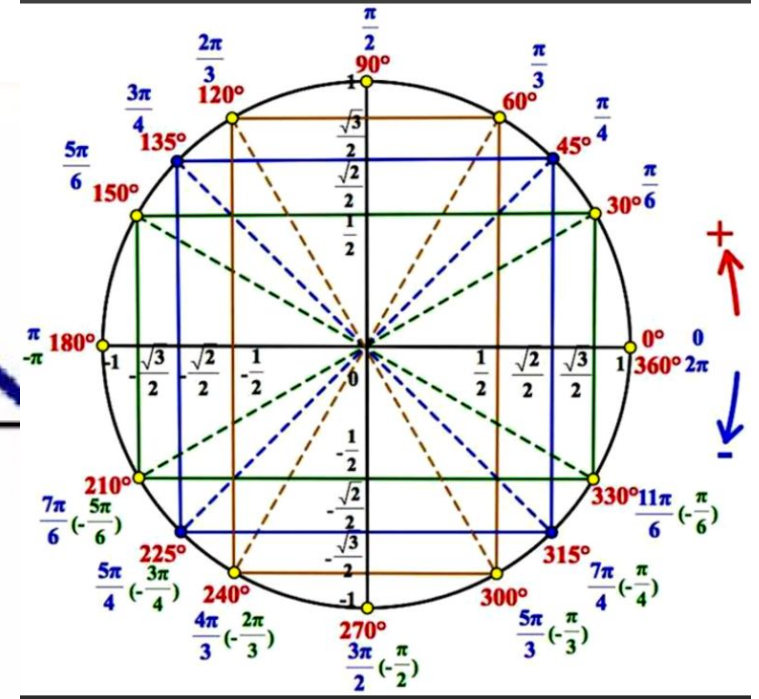
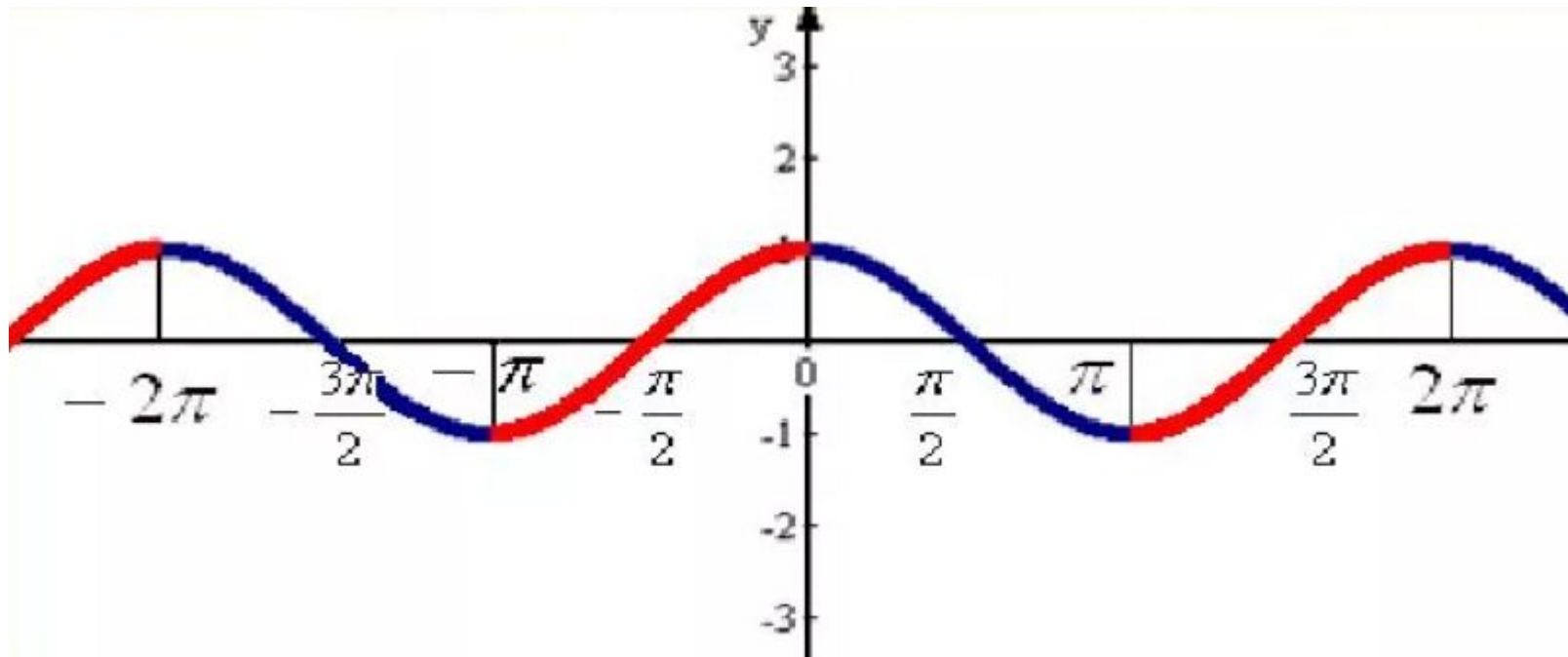
$$\cos \frac{x}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) < 3;$$

$$2 \cos \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) > \sqrt{2}$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 > 0.$$

График функции $y = \cos x$



Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, выполнить упражнения (708—713).

708 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x , принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает:

- 1) значение, равное 0, 1, -1;
- 2) положительные значения;
- 3) отрицательные значения.

709 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:

- 1) $[3\pi; 4\pi]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;
- 4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 5) $[1; 3]$; 6) $[-2; -1]$.

710 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:

- 1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

711 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:

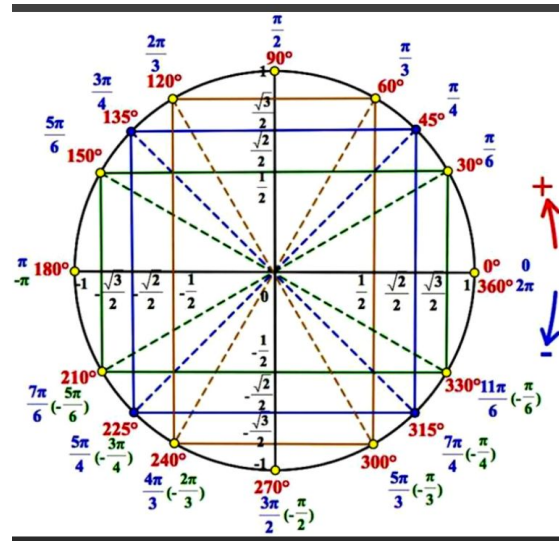
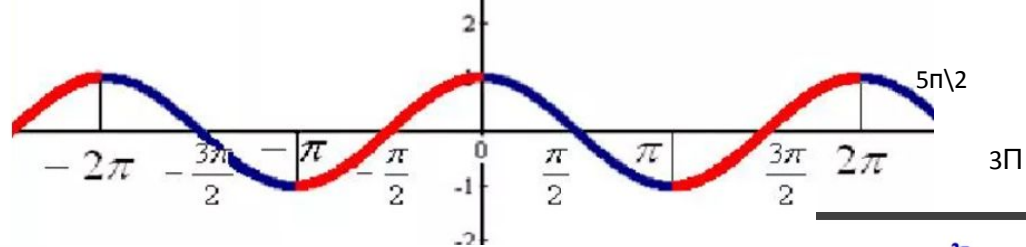
- 1) $\cos \frac{\pi}{7}$ и $\cos \frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos \frac{8\pi}{7}$ и $\cos \frac{10\pi}{7}$;
- 3) $\cos \left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos \left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos \left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;
- 5) $\cos 1$ и $\cos 3$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

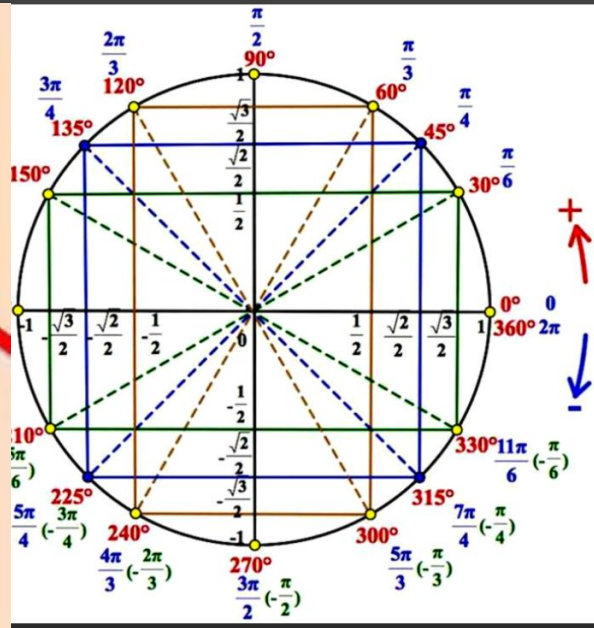
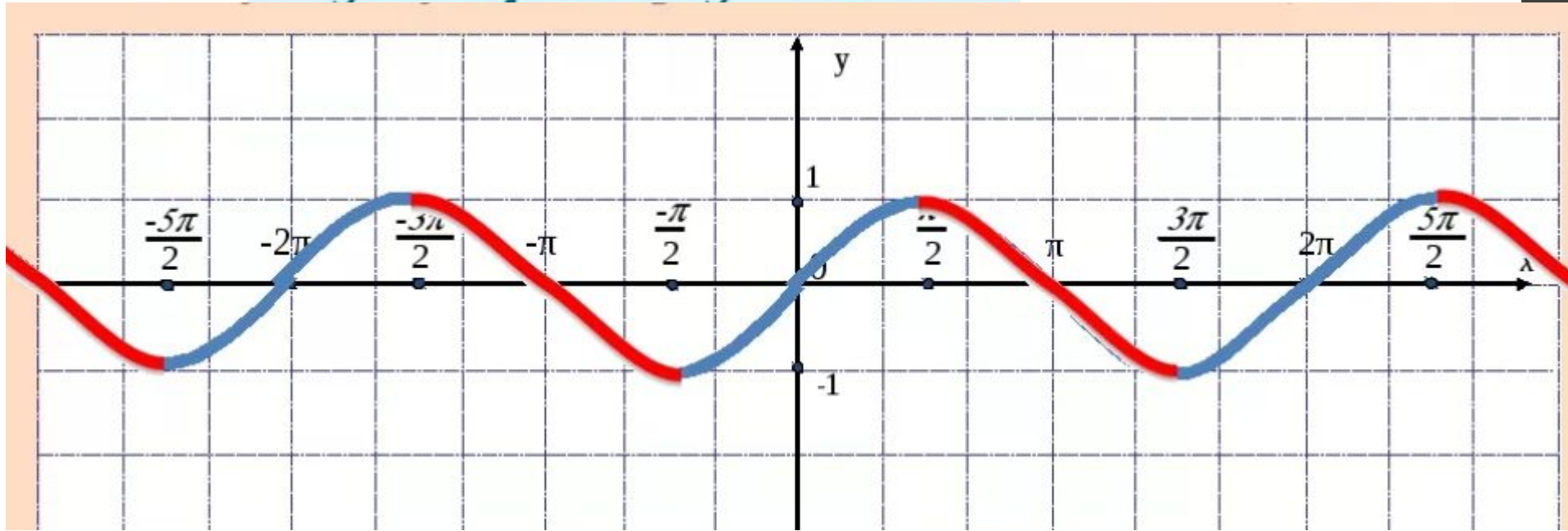
- 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

717 Построить график функции и выяснить её свойства:

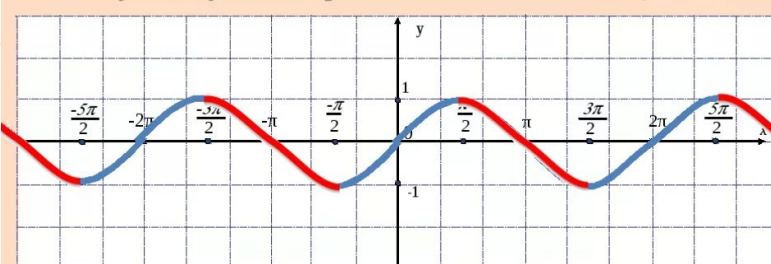
- 1) $y = 1 + \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = 3 \cos x$.



Функция $y = \sin x$



Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, выполнить упражнения (720—725).



720 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x , принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает:

- 1) значение, равное 0, 1, -1;
- 2) положительные значения;
- 3) отрицательные значения.

721 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:

- 1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$;
- 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;
- 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;
- 4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$;
- 5) $[2; 4]$;
- 6) $(6; 7)$.

722 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:

- 1) $[0; \pi]$;
- 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$;
- 3) $[-\pi; 0]$;
- 4) $[-2\pi; -\pi]$.

723 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа:

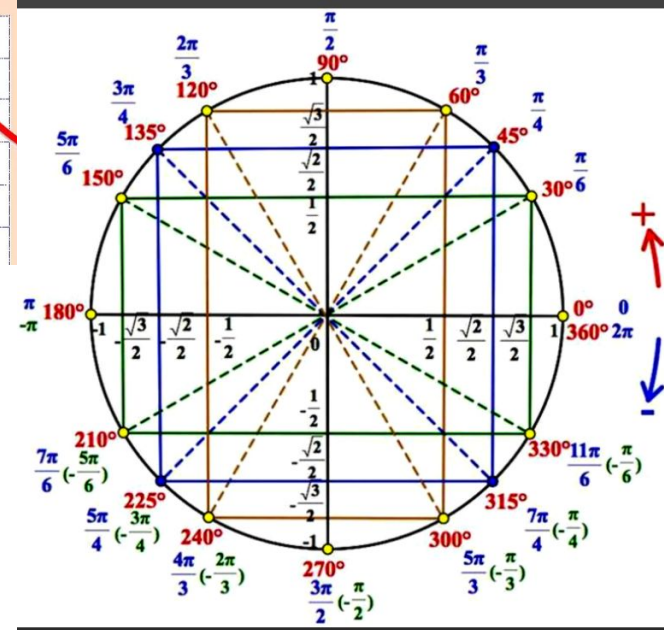
- 1) $\sin \frac{7\pi}{10}$ и $\sin \frac{13\pi}{10}$;
- 2) $\sin \frac{13\pi}{7}$ и $\sin \frac{11\pi}{7}$;
- 3) $\sin \left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin \left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;
- 4) $\sin 7$ и $\sin 6$.

724 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

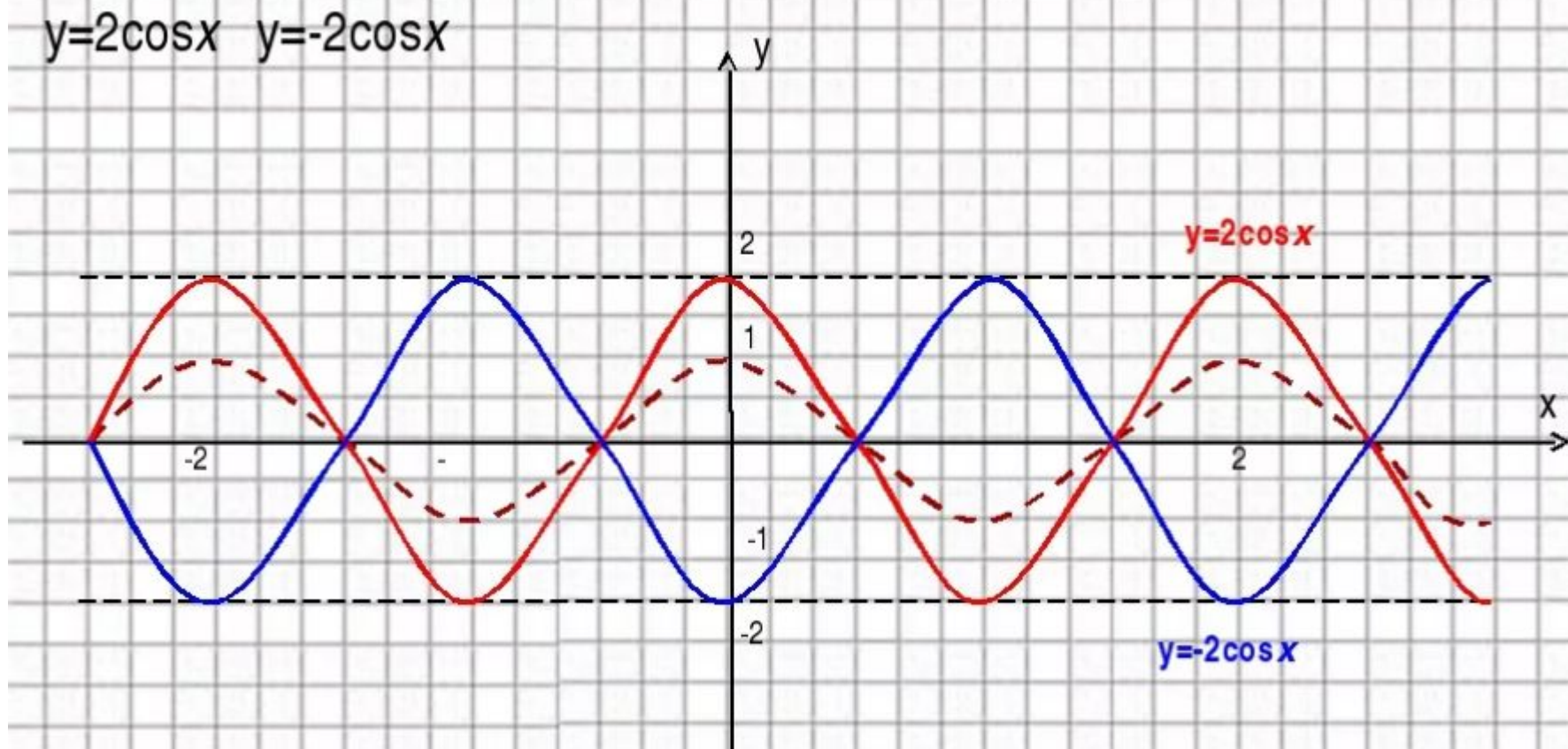
- 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

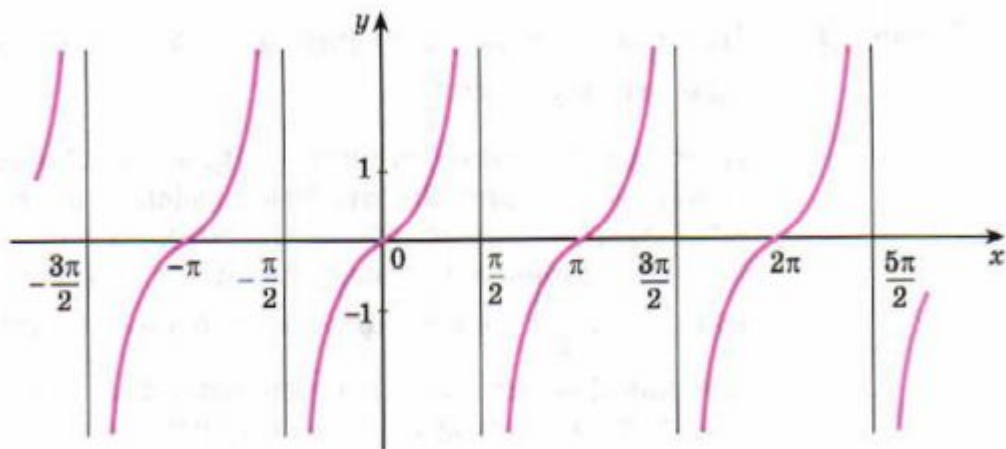
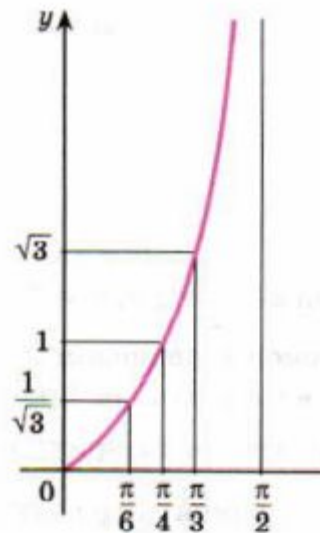
729 Построить график функции и выяснить её свойства:

- 1) $y = 1 - \sin x$;
- 2) $y = 2 + \sin x$;
- 3) $y = \sin 3x$;
- 4) $y = 2 \sin x$.



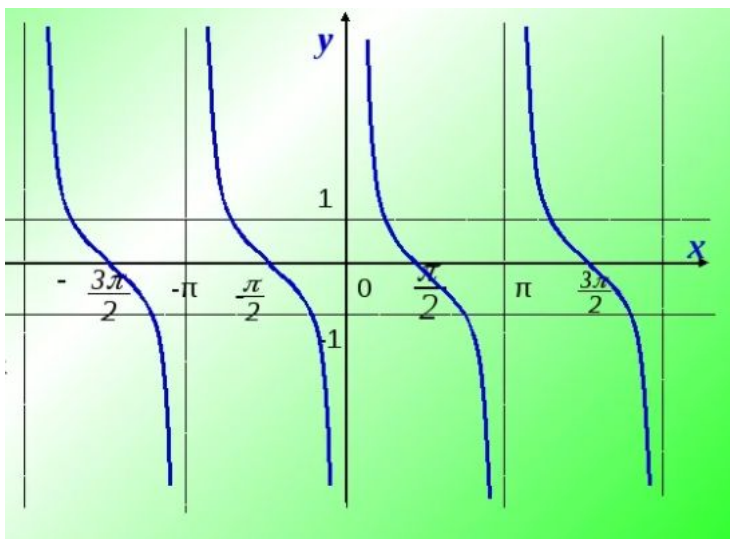
Преобразование графиков тригонометрических функций путем сжатия и растяжения





Тригонометрическая таблица

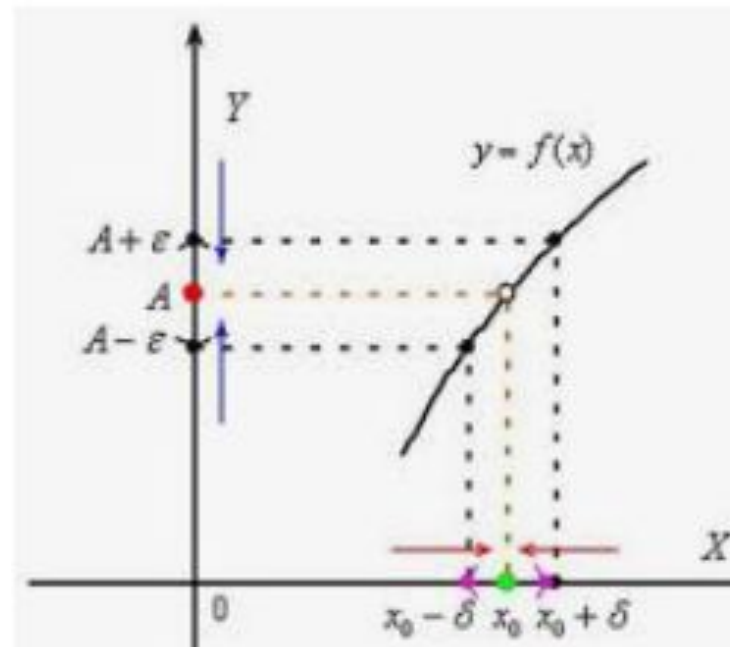
градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
ctg x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-



Понятие производной

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 – это скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0 .

Определение. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

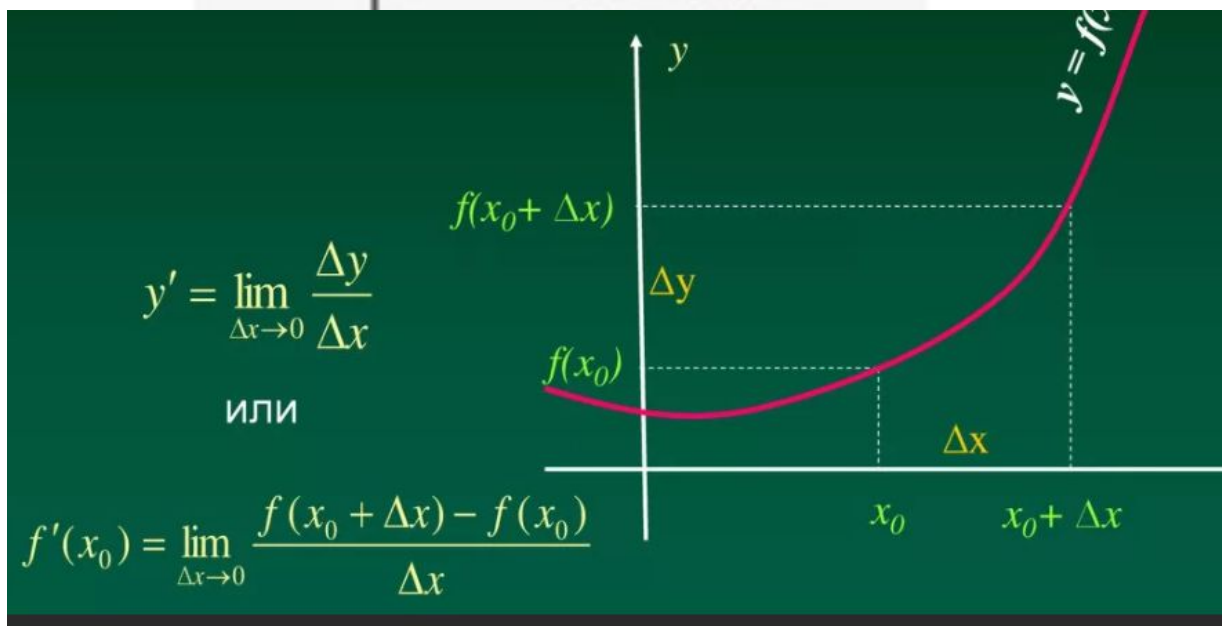


Определение

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел разностного отношения при $h \rightarrow 0$, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \quad (2)$$

Если существует $f'(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , а если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема на этом промежутке.



- понятие производной
- физический смысл производной
- формулы для нахождения производной
- геометрический смысл производной
- уравнение касательной к графику функции
- Применение производной к построению графиков функций

Понятие "производная" возникло в связи с необходимостью решения ряда задач физики, механики и математики.

Честь открытия основных законов математического анализа принадлежит английскому ученому Ньютону и немецкому математику Лейбницу.

Лейбниц рассматривал задачу о проведении касательной к произвольной кривой.



Понятие производной функции

► Исаак Ньютон

(физическое толкование):



Производная – это скорость движущегося тела в данный момент времени

$$v = \frac{dx}{dt}$$

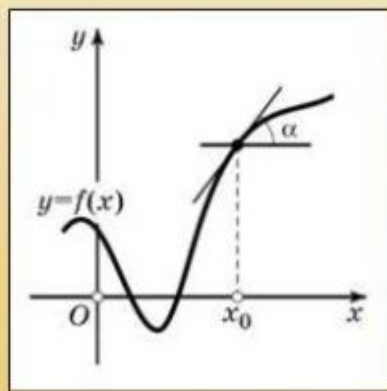


► Готфрид Вильгельм Лейбниц

(геометрическое толкование):



Производная функции в точке – это тангенс угла наклона касательной к графику этой функции в данной точке



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

► Огюстен Луи Коши

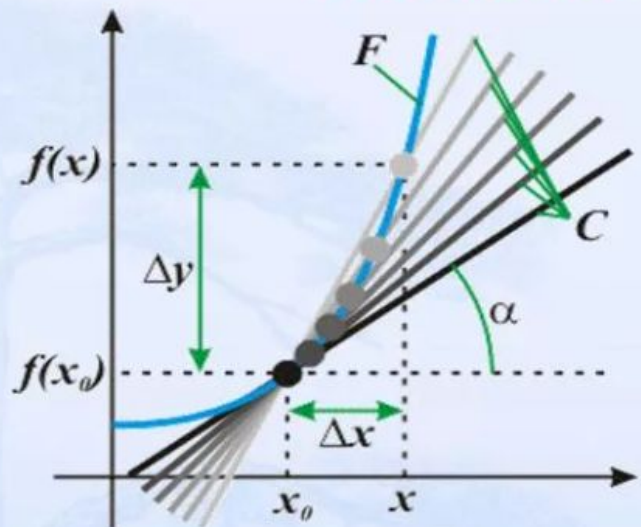
(аналитическое толкование):



Производная функции $f(x)$ в точке x_0 – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Понятие производной



$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

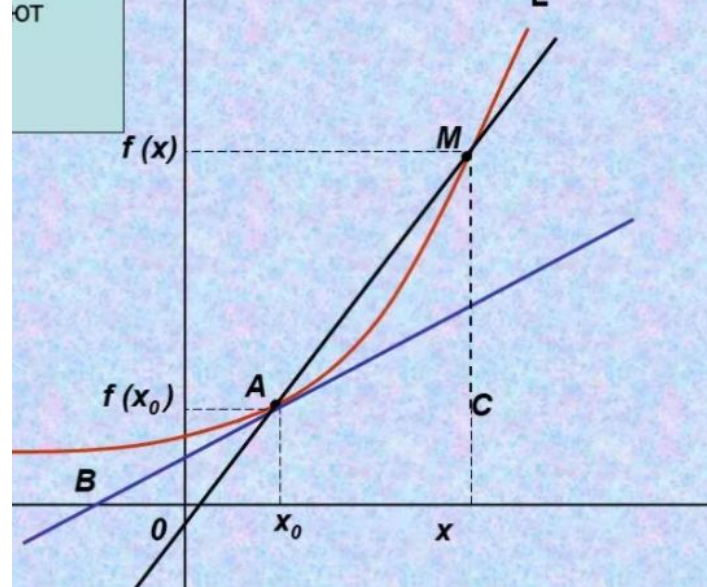
Определение.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

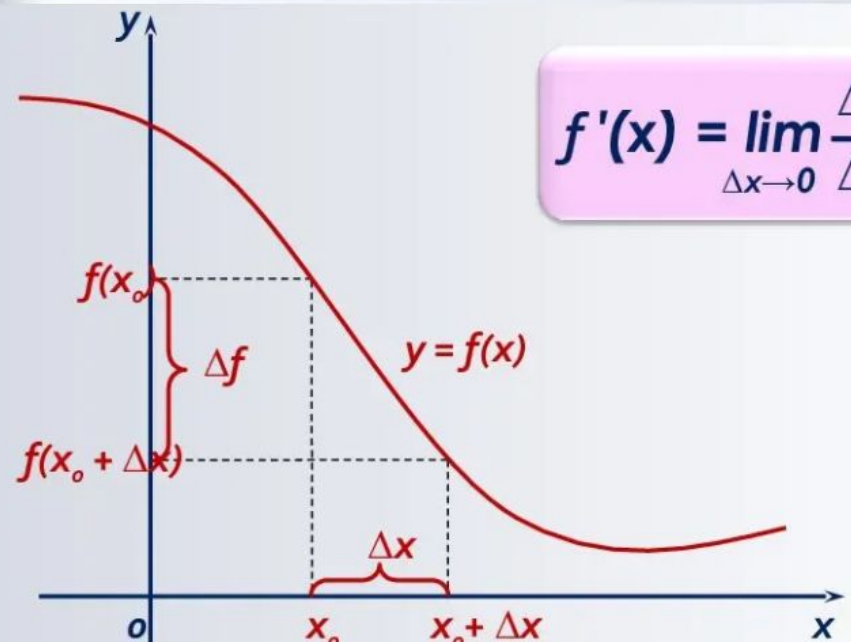
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке)

Производная — предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует



Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

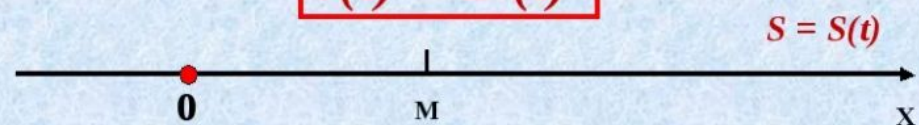
Физический смысл производной

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 – это скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0 .

Производная выражает **мгновенную скорость** в момент времени t .

Если при прямолинейном движении путь S , пройденный точкой, есть функция от времени t , т.е. $S = S(t)$, то **мгновенная скорость** точки есть **производная** от пути по времени, т.е.

$$v(t) = S'(t)$$



$$V_{cp} = \frac{S(t+h) - S(t)}{h} \quad \text{-разностное отношение}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Найдите производную

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = 2x$

3. $f(x) = x^{-7}$

4. $f(x) = 5,2$

5. $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x - 10$

7. $f(x) = (x - 3)^2$

8. $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

6. $(x^3 - 4)'$ =

9. $(\frac{1}{2}x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{2}{x})'$ =

10. $(5x^3 - \sqrt{x})'$ =

Упражнения

- 776 Точка движется по закону $s(t) = 1 + 3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t = 1$ до $t = 4$; 2) от $t = 0,8$ до $t = 1$.
- 777 Найти среднюю скорость движения точки на отрезке $[1; 1,2]$, если закон её движения $s = s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = 2t$; 2) $s(t) = t^2$.
- 778 Найти мгновенную скорость движения точки, если:
1) $s(t) = 2t + 1$; 2) $s(t) = 2 - 3t$.
- 779 Закон движения задан формулой $s(t) = 0,25t + 2$. Найти:
1) среднюю скорость движения от $t = 4$ до $t = 8$;
2) скорость движения в моменты $t = 4$ и $t = 8$.
- 780 Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = 3x + 2$; 2) $f(x) = 5x + 7$;
3) $f(x) = 3x^2 - 5x$; 4) $f(x) = -3x^2 + 2$.
- 781 С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:
1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = -7x + 5$; 3) $f(x) = -5x - 7$.
- 782 Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.
- 783 Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 + 2$, в момент времени:
1) $t = 5$; 2) $t = 10$.

Составить разностное отношение, если:

- 1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = x - 1$; 3) $f(x) = 4x^2$;
4) $f(x) = x^2 + 2$; 5) $f(x) = x^3 - x^2$; 6) $f(x) = 2x^3 + x$.

Производная степенной функции

Функция	Производная	
---------	-------------	--

Найти производную функции (787—792).

- 787 1) x^6 ; 2) x^7 ; 3) x^{11} ; 4) x^{13} .
- 788 1) x^{-2} ; 2) x^{-3} ; 3) x^{-4} ; 4) x^{-7} .
- 789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.
- 790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.
- 791 1) $(4x - 3)^2$; 2) $(5x + 2)^{-3}$; 3) $(1 - 2x)^{-6}$;
4) $(2 - 5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.
- 792 1) $\sqrt[3]{2x + 7}$; 2) $\sqrt[4]{7 - 3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.
- 793 Найти $f'(x_0)$, если:
- 1) $f(x) = x^6$, $x_0 = \frac{1}{2}$; 2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = 3$;
3) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$;
5) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $x_0 = 1$; 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 1}}$, $x_0 = 1$.
- 5) $\frac{2}{5\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$;

794 Построить график функции $y = x^4$ и график функции, являющейся её производной.

795 На рисунке 107 изображён график функции, являющейся производной одной из функций $y = x^2$, $y = x^3$ или $y = x^{\frac{1}{2}}$. Установить функцию.

796 Найти производную функции:

- 1) $\frac{1}{(2 + 3x)^2}$; 2) $\frac{1}{(3 - 2x)^3}$;
3) $\sqrt[3]{(3x - 2)^2}$; 4) $\sqrt[7]{(3 - 14x)^2}$;
5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3x - 7}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1 - 2x)^2}}$.

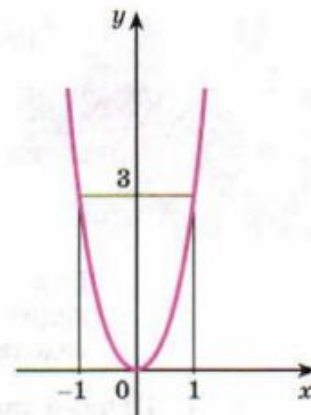


Рис. 107

797 При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 1, если:

- 1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

798 Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t) = \sqrt{t + 1}$, в момент времени $t = 3$.

799 При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = f(x)$, если:

- 1) $f(x) = (2x - 1)^2$; 2) $f(x) = (3x + 2)^3$?



Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))' = cf'(x). \quad (2)$$

3. Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \quad (4)$$

5. Производная сложной функции.

$$5.(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

39. С помощью формулы (8) найти производную функции:

1) $(2x-1)^3$; 2) $(x+3)^2$; 3) $(3x^2-2x)^2$; 4) $(x^3-x^2)^3$.

1) $f(x) = (3x^3 - 4x^2 + 2x - 1)^2$;

Найти производную функции (802—803).

802 1) $x^2 + x$; 2) $x^2 - x$; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0,5x^3$; 7) $13x^2 + 26$; 8) $8x^2 - 16$.

803 1) $3x^2 - 5x + 5$; 2) $5x^2 + 6x - 7$; 3) $x^4 + 2x^2$;
4) $x^5 - 3x^2$; 5) $x^3 + 5x$; 6) $-2x^3 + 18x$;
7) $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$; 8) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$.

804 Построить график функции $y = 3(x - 2)^2 + 1$ и график функции, являющейся её производной.

805 Найти производную функции:

1) $x^2 + \frac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

806 Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$;
3) $f(x) = -x^3 + x^2$; 4) $f(x) = x^2 + x + 1$.

807 Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;
3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$.

808 Дифференцируема ли функция $y = f(x)$ в точке x , если:

1) $y = \frac{2}{x-1}$, $x = 1$; 2) $y = \frac{3x-5}{(x-3)^2}$, $x = 3$;
3) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$; 4) $y = \sqrt{5-x}$, $x = 4$?

809 Найти значения x , при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = x^3 - 2x$;
2) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$;
4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$;
5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$;
6) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$.

810 Найти производную функции:

1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x + 2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x - 1)\sqrt{x}$.

811 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = (x - 1)^6(2 - x)^7$; 2) $f(x) = (2x - 1)^5(1 + x)^4$;
3) $f(x) = \sqrt{2 - x}(3 - 2x)^8$; 4) $f(x) = (5x - 4)^6\sqrt{3x - 2}$.

6) $2x\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x\sqrt[4]{x^3}}$.

812 Пересекается ли график функции, являющейся производной функции $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, с графиком функции $y = 3x + 1$?

813 При каких значениях x значение производной функции $y = (x - 3)^5 (2 + 5x)^6$ равно 0?

814 Найти производную функции:

1) $\frac{x^5 + x^3 + x}{x+1}$; 2) $\frac{\sqrt{x+x^2+1}}{x-1}$.

815 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2}{1-7x}$.

816 Найти функцию $f(g(x))$, если:

1) $g(x) = 1 - x$, $f(g) = g^{\frac{3}{2}}$; 2) $g(x) = \ln x$, $f(g) = \sqrt{g}$.

817 Представить в виде сложной функции:

1) $F(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$; 2) $F(x) = \sin(x^2 + 1)$.

Найти производную функции (818—821).

818 1) $\frac{x^3 + x^2 + 16}{x}$; 2) $\frac{x\sqrt[3]{x+3x+18}}{\sqrt[3]{x}}$.

- 819 1) $\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$; 2) $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.
- 820 1) $(2x - 3)^5 (3x^2 + 2x + 1)$; 2) $(x - 1)^4 (x + 1)^7$;
3) $\sqrt[4]{3x + 2} (3x - 1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x + 1} \cdot (2x - 3)^3$.
- 821 1) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1}$; 2) $\frac{3x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$; 3) $\frac{2 - x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2 - x}$.
- 822 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ равно 0?
- 823 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ равно 3?
- 824 При каких значениях x значение производной функции $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ равно 11?
- 825 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:
1) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$; 2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$;
3) $f(x) = (x + 2)^2 \sqrt{x}$; 4) $f(x) = (x - 3) \sqrt{x}$.
- 826 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:
1) $y = (5 - 3x)^4 (3x - 1)^3$; 2) $y = (2x - 3)^2 (3 - 2x)^3$;
3) $y = \frac{3x^2 - 1}{1 - 2x}$; 4) $y = \frac{3x^3}{1 - 3x}$.
- 827 Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 0,1t^2 - 0,5t + 0,2$. Найти угловую скорость (в рад/с) вращения тела в момент времени $t = 20$ с.
- 828 Тело, масса которого $m = 5$ кг, движется прямолинейно по закону $s = 1 - t + t^2$ (где s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.