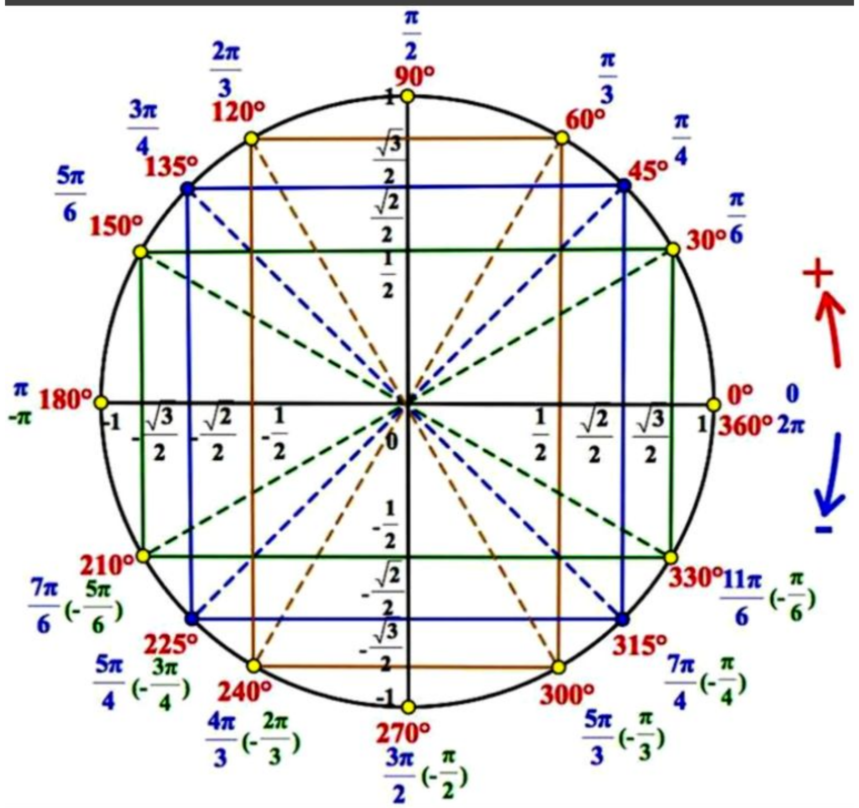


Тригонометрическая таблица

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{П}{6}$	$\frac{П}{4}$	$\frac{П}{3}$	$\frac{П}{2}$	$\frac{2П}{3}$	$\frac{3П}{4}$	$\frac{5П}{6}$	П	$\frac{3П}{2}$	2П
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Пусть $|a| \le 1$, arccos a — такое число из отрезка $[0\,;\ \pi]$, косинус которого равен a.

$$\cos x = a$$

корни уравнения выражаются формулой $x = \pm arccos\ a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Арксинусом числа $a \in [-1;\ 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\textbf{arcsin}\ a = \alpha, \quad \text{если} \quad \sin\alpha = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

а общая формула решения

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}$$

629 1) $\sqrt{3}\sin x\cos x = \sin^2 x$; 2) $2\sin x\cos x = \cos x$;
3) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; 4) $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$.

631 1) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$;
2) $\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$;
3) $\sin 2x + 4(\sin x + \cos x) + 4 = 0$;
4) $\sin 2x + 5(\cos x + \sin x + 1) = 0$.

$\sin(30° - \alpha) - \cos(60° - \alpha) = -\sqrt{3}\sin\alpha$;

$\sin(30° - \alpha) + \sin(30° + \alpha) = \cos\alpha$.

$(2\cos x + 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$;

$2\cos x - 3\sin x\cos x = 0$;
$4\sin^2 x - 3\sin x = 0$;

тригонометрические неравенства

$\sin x > a$
$\sin x < a$

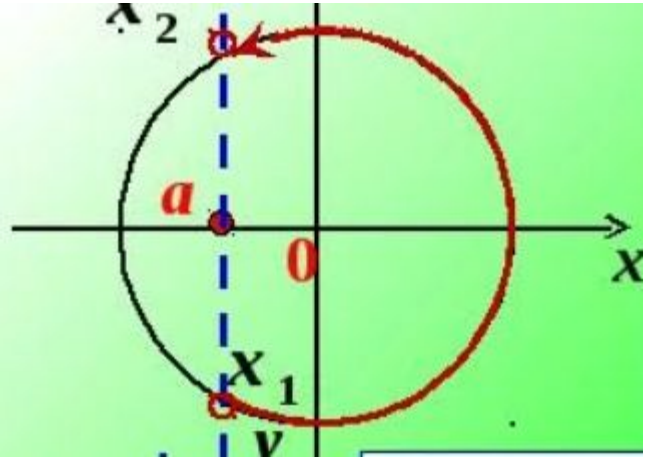
$\cos x > a$
$\cos x < a$

$\operatorname{tg} x > a$
$\operatorname{tg} x < a$
$\operatorname{ctg} x > a$
$\operatorname{ctg} x < a$

Алгоритм решения неравенства

Изобразить единичную окружность, отметить число $x = a$

Выделить дугу окружности, соответствующую знаку сравнения (обход - строго против часовой стрелки).



Записать числовые значения граничных точек дуги. Учитывая, что начало дуги – меньшее значение.

Записать решение неравенства

$$x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n,\ n \in Z$$

$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$.

$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n)$.

$\cos x > a \quad (|\mathrm{a}| < 1) \quad x \in (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$.

$\cos x < a \quad (|\mathrm{a}| < 1) \quad x \in (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$.

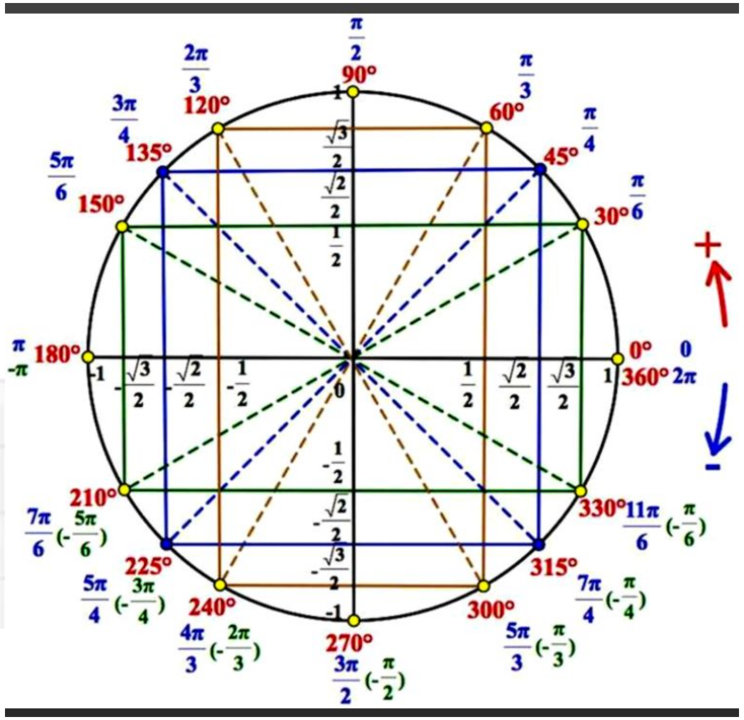
в) $\operatorname{tg} x > a \qquad x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$,

$\operatorname{tg} x < a \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right)$.

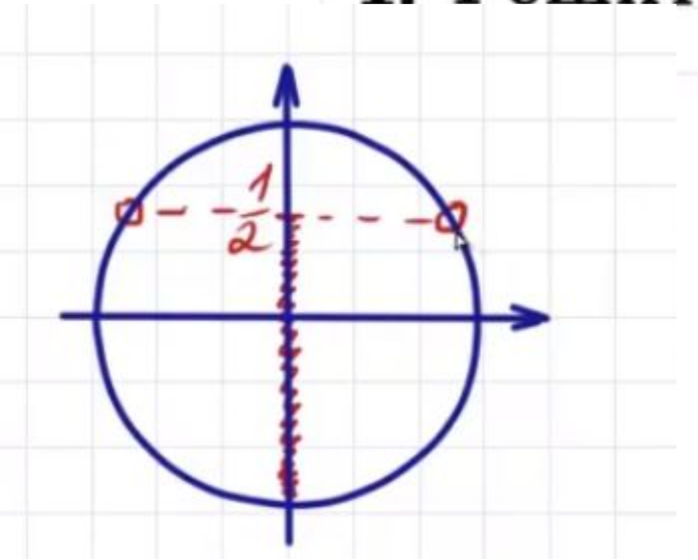
г) $\operatorname{ctg} x > a \qquad x \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n)$,

$\operatorname{ctg} x < a \qquad x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n)$.

Как решать тригонометрические неравенства



1. Решите неравенство $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

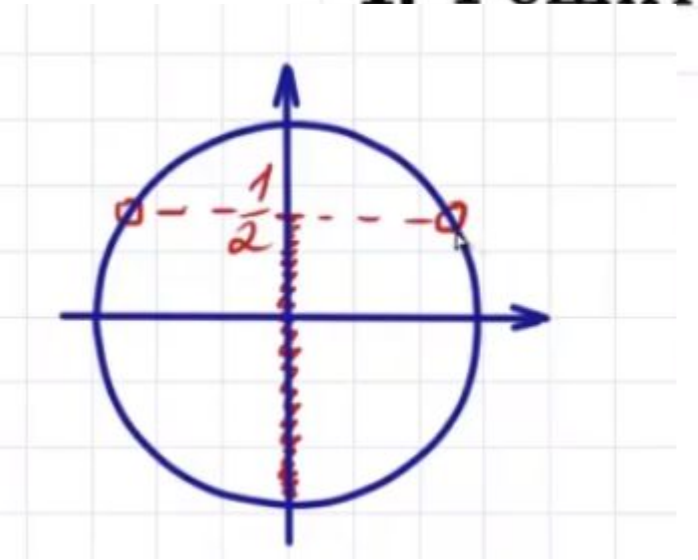


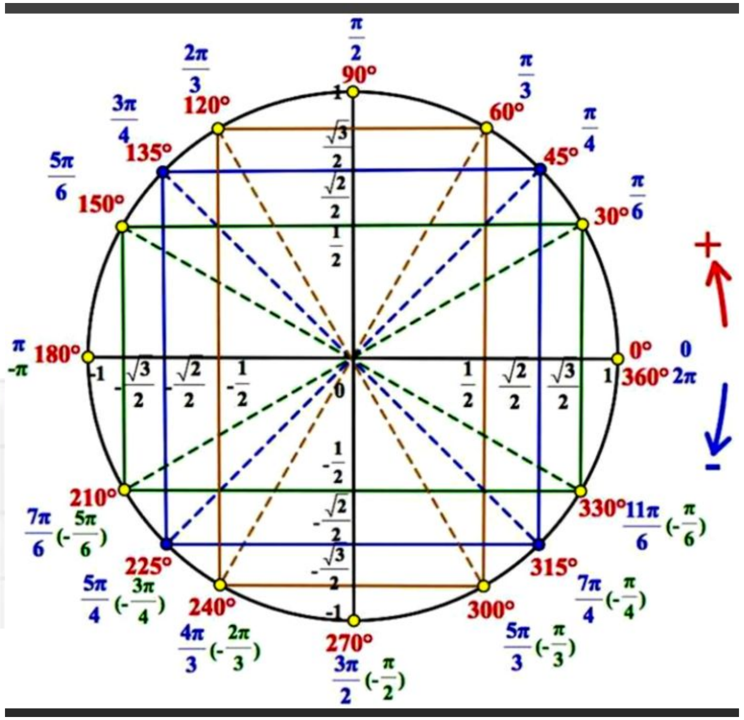
$$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n).$$

$$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n).$$

Как решать тригонометрические неравенства

1. Решите неравенство $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

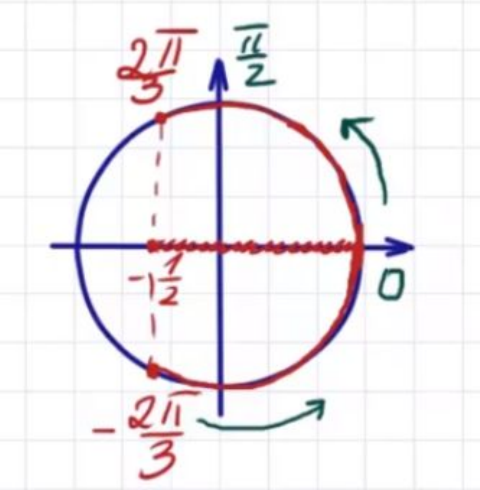


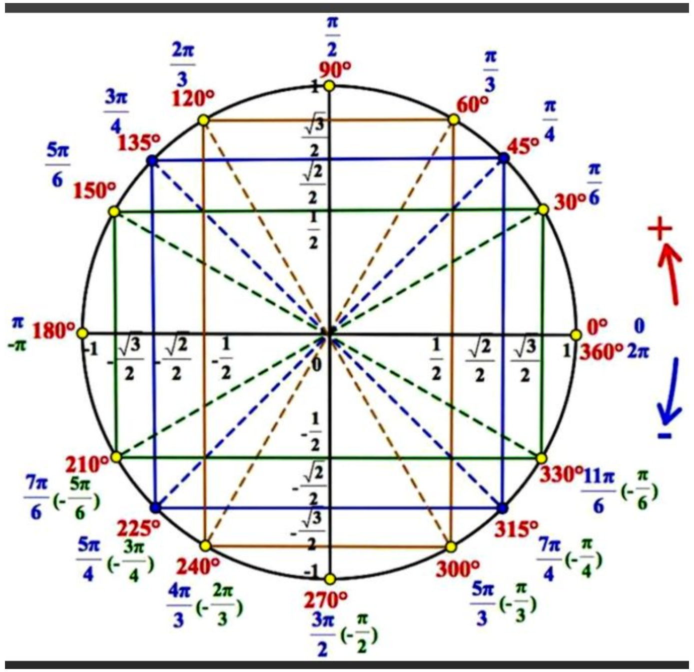


$$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n).$$

$$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n).$$

2. Решите неравенство $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$.



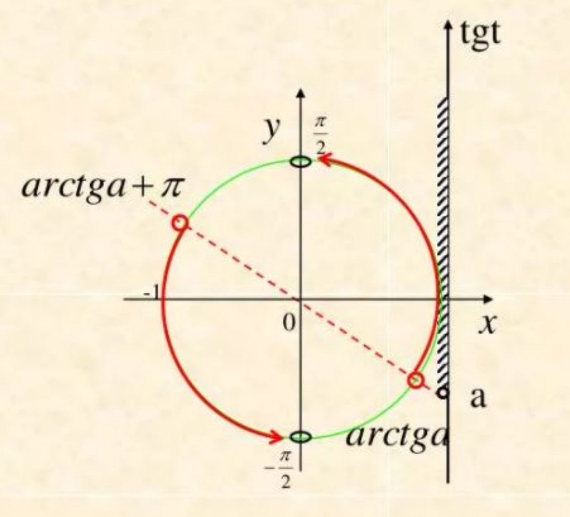


Тригонометрическая таблица

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{П}{6}$	$\frac{П}{4}$	$\frac{П}{3}$	$\frac{П}{2}$	$\frac{2П}{3}$	$\frac{3П}{4}$	$\frac{5П}{6}$	П	$\frac{3П}{2}$	2П
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

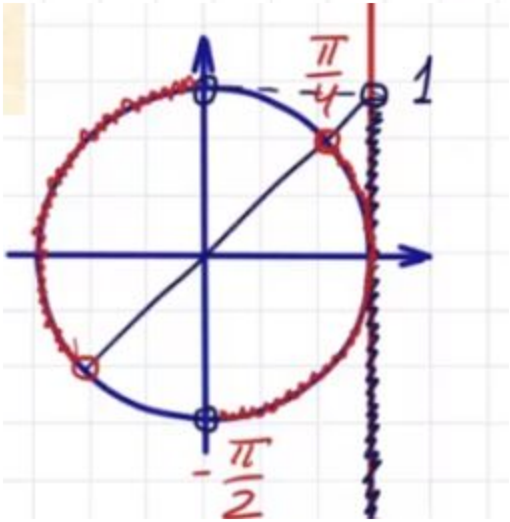
$$\cos x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n),$$

$$\cos x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n).$$



3. Решите неравенство $tgx < 1$.

$$tg(\pi+\tfrac{x}{3})+1\geq 0$$

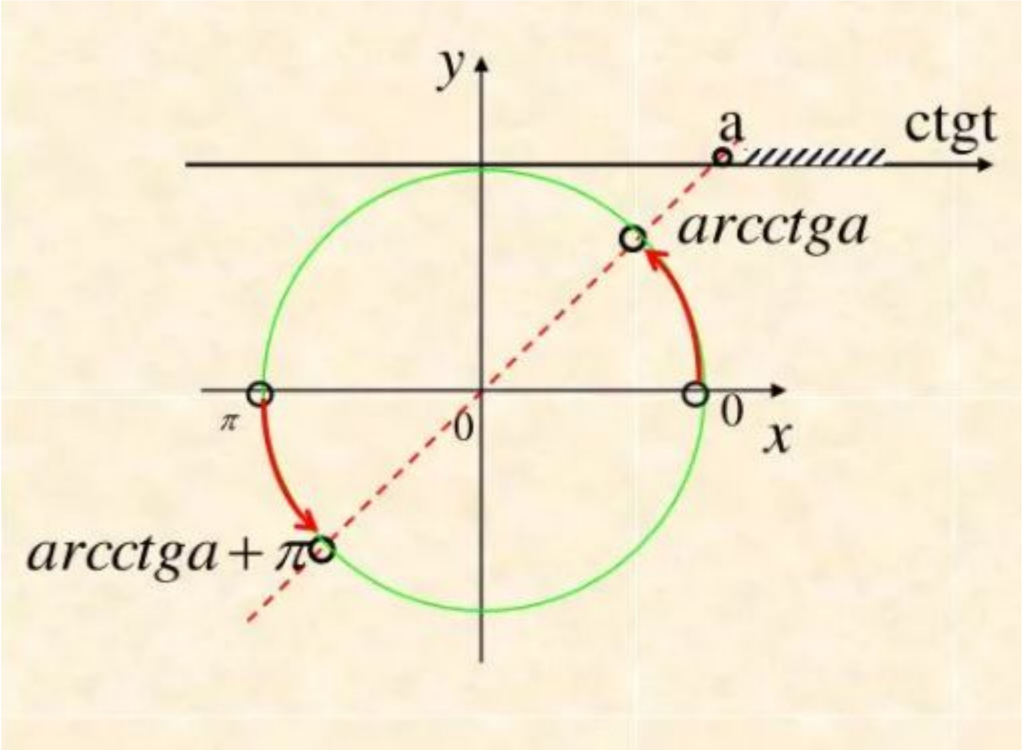


Тригонометрическая таблица

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

$\operatorname{tg} x > a$ $\qquad x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$

$\operatorname{tg} x < a$ $\qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right).$

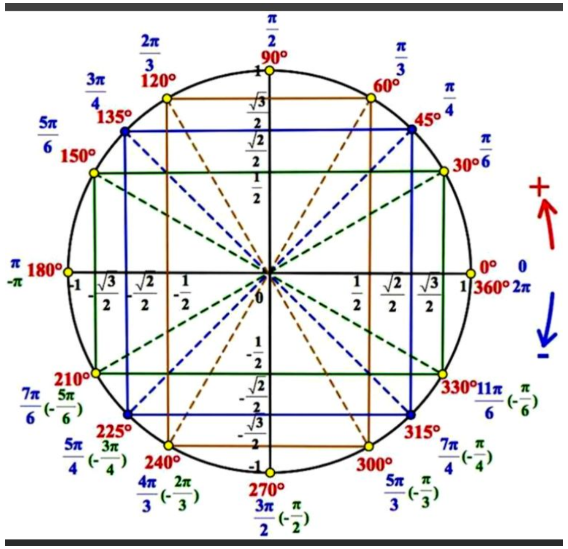


Тригонометрическая таблица

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

$\operatorname{ctg} x > a \qquad x \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n)$

$\operatorname{ctg} x < a \qquad x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n)$



Тригонометрическая таблица

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{П}{6}$	$\frac{П}{4}$	$\frac{П}{3}$	$\frac{П}{2}$	$\frac{2П}{3}$	$\frac{3П}{4}$	$\frac{5П}{6}$	П	$\frac{3П}{2}$	2П
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

Решить неравенство (648—654).

648 1) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

649 1) $\cos x \leqslant \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -2$; 3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$

650 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

651 1) $\sin x \geqslant -\sqrt{2}$; 2) $\sin x > 1$;

3) $\sin x \leqslant -1$; 4) $\sin x \geqslant 1$.

652 1) $\sqrt{2}\cos 2x \leqslant 1$; 2) $2\sin 3x > -1$;

3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

653 1) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

654 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$; 2) $\cos^2 x - \cos x < 0$.

$\cos\left(2x - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$;

3. $\boxed{7}$ $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 \leqslant 0$.

$\sin x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n)$

$\sin x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n)$.

$\cos x > a \quad (|a| < 1) \quad x \in (-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n)$,

$\cos x < a \quad (|a| < 1) \quad x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$.

Задания для самостоятельной работы

а) $3\cos^2 t - 4\cos t \geqslant 4$; в) $3\cos^2 t - 4\cos t < 4$;

б) $6\cos^2 t + 1 > 5\cos t$; г) $6\cos^2 t + 1 \leqslant 5\cos t$.

Вариант I

Решить неравенство

$$\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1;$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1;$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 3 < 0.$$

Вариант II

Решить неравенство

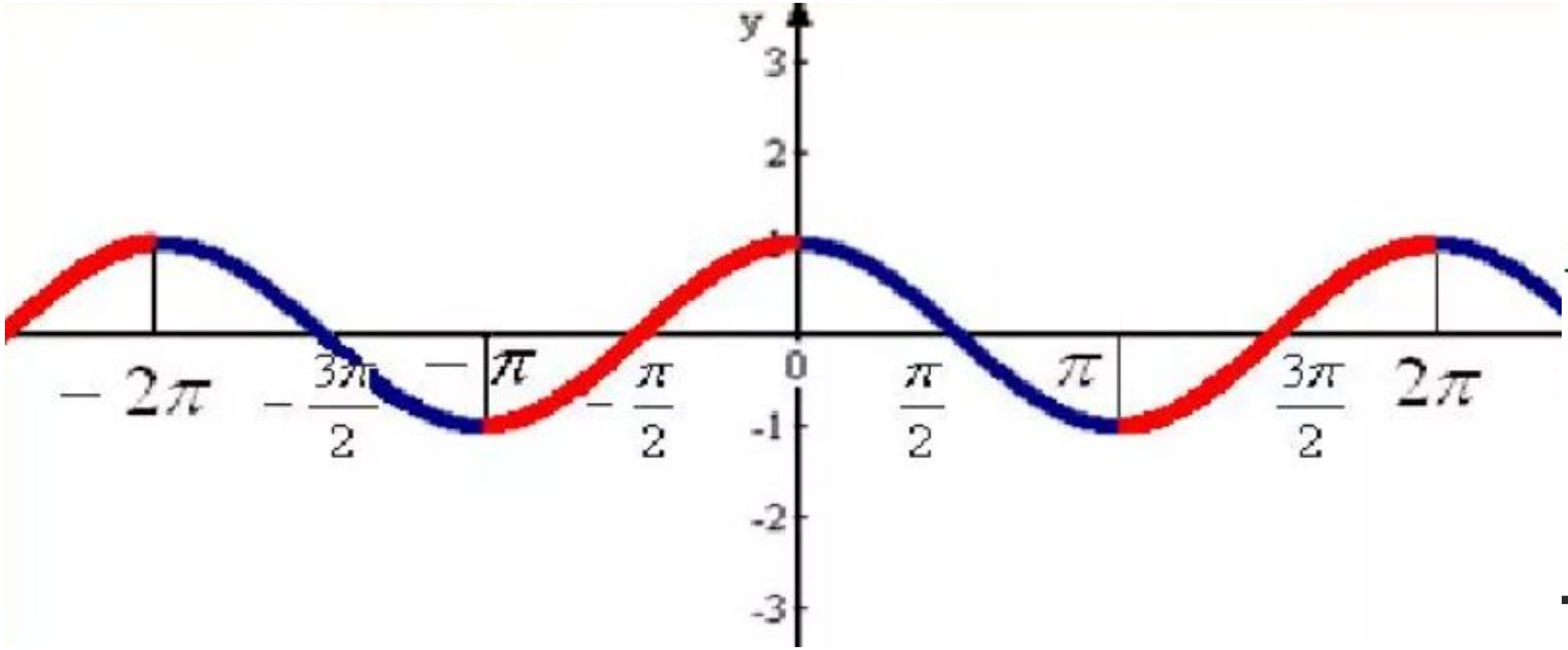
$$\cos\frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2};$$

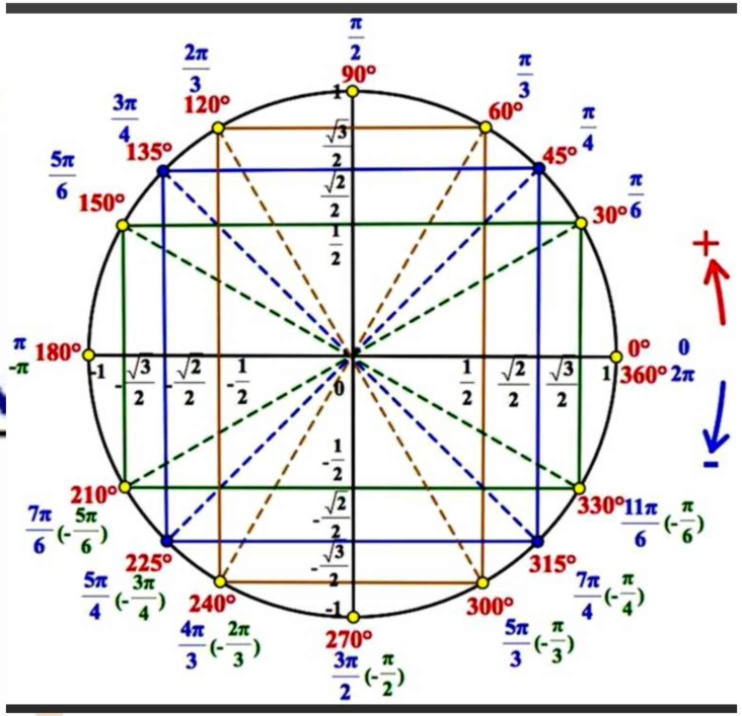
$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 3;$$

$$2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 > 0.$$

График функции $y = \cos x$





Упражнения

Пользуясь графиком функции $y = \cos x$, выполнить упражнения (708—713).

708 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает:
1) значение, равное 0, 1, −1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

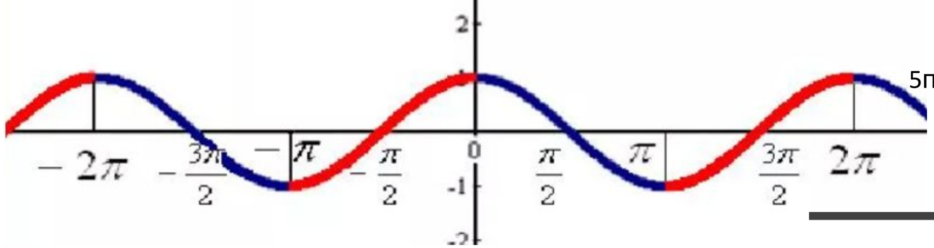
709 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \cos x$ на отрезке:
1) $[3\pi; 4\pi]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;
4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 5) $[1; 3]$; 6) $[-2; -1]$.

710 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \cos x$ возрастала, а на другом убывала:
1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

711 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \cos x$, сравнить числа:
1) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$;
3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;
5) $\cos 1$ и $\cos 3$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

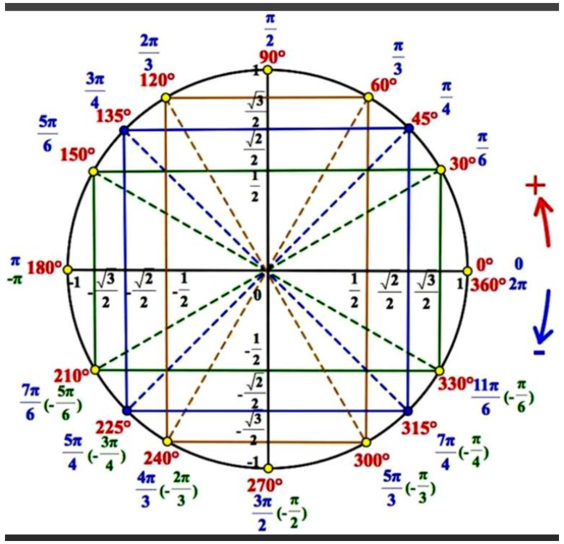
712 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:
1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$.

717 Построить график функции и выяснить её свойства:
1) $y = 1 + \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = 3\cos x$.

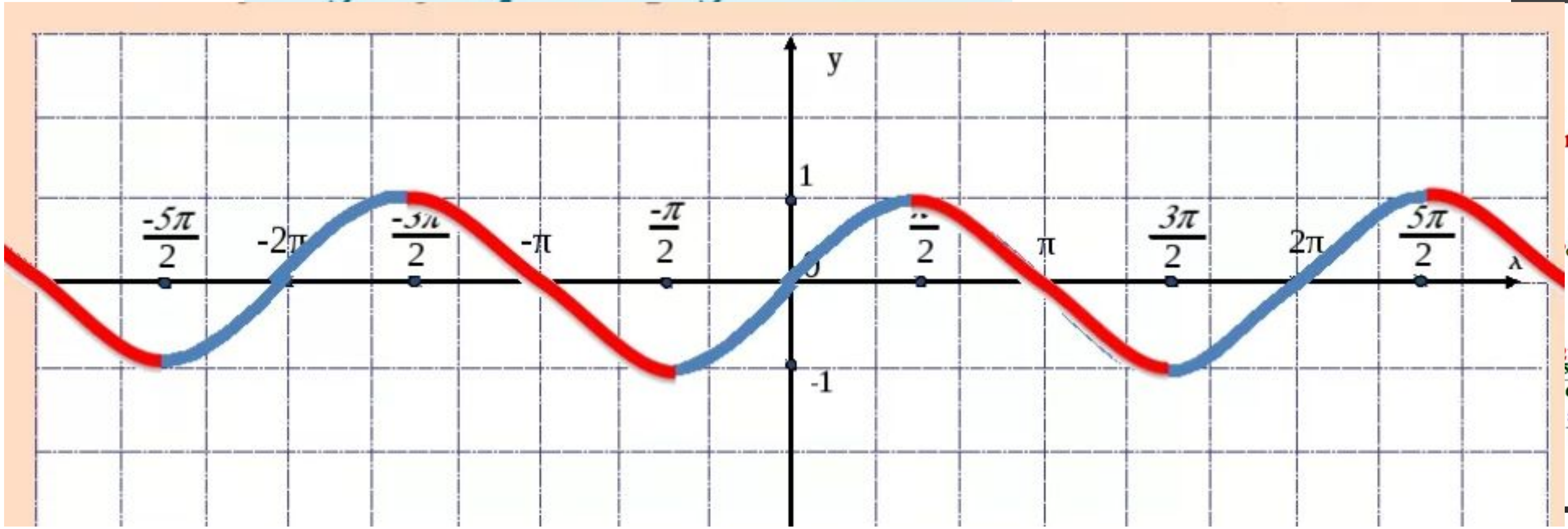


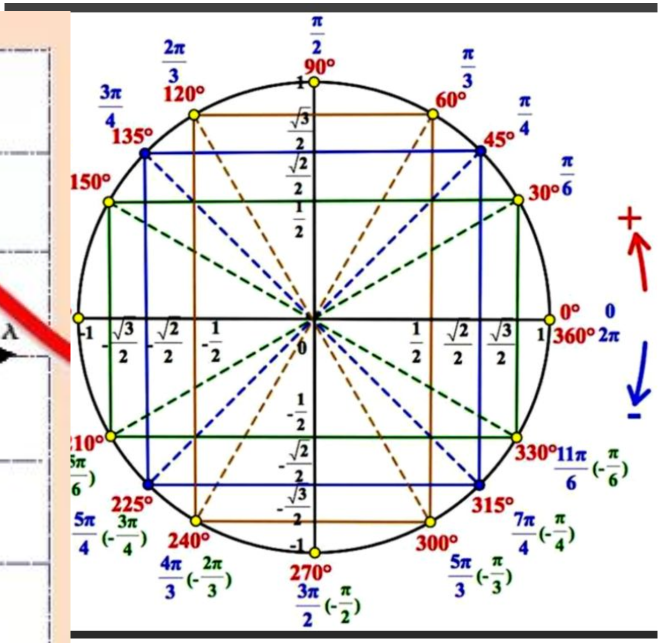
5п\2

3П



Функция y = sin x





Пользуясь графиком функции $y = \sin x$, выполнить упражнения (720—725).

720 (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает:

1) значение, равное 0, 1, –1;
2) положительные значения;
3) отрицательные значения.

721 (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:

1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

722 Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

723 Используя свойство возрастания или убывания функции $y = \sin x$, сравнить числа:

1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$;

3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\sin 7$ и $\sin 6$.

724 Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$:

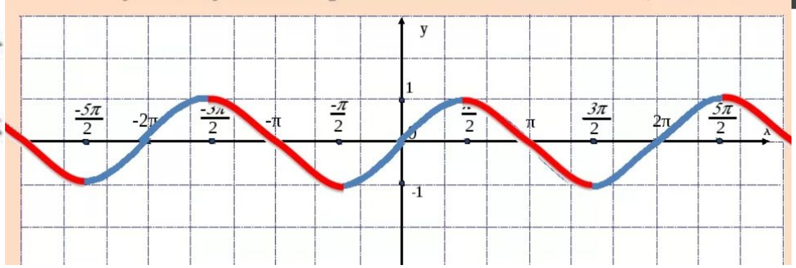
1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

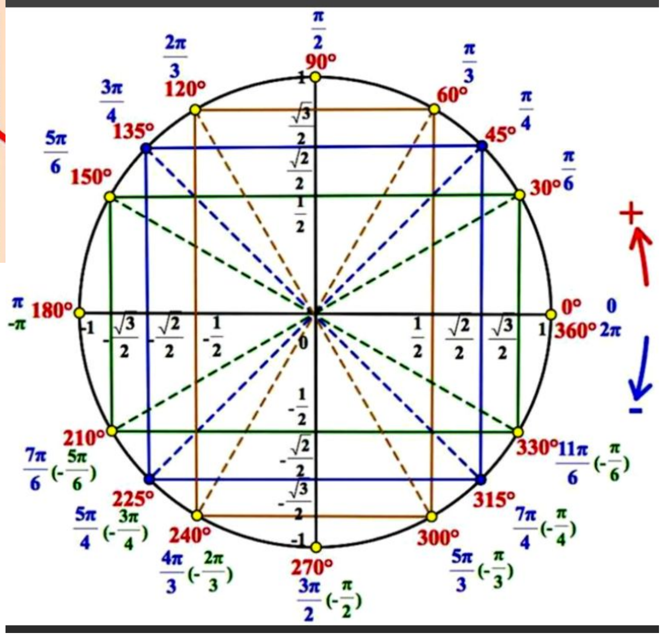
3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

729 Построить график функции и выяснить её свойства:

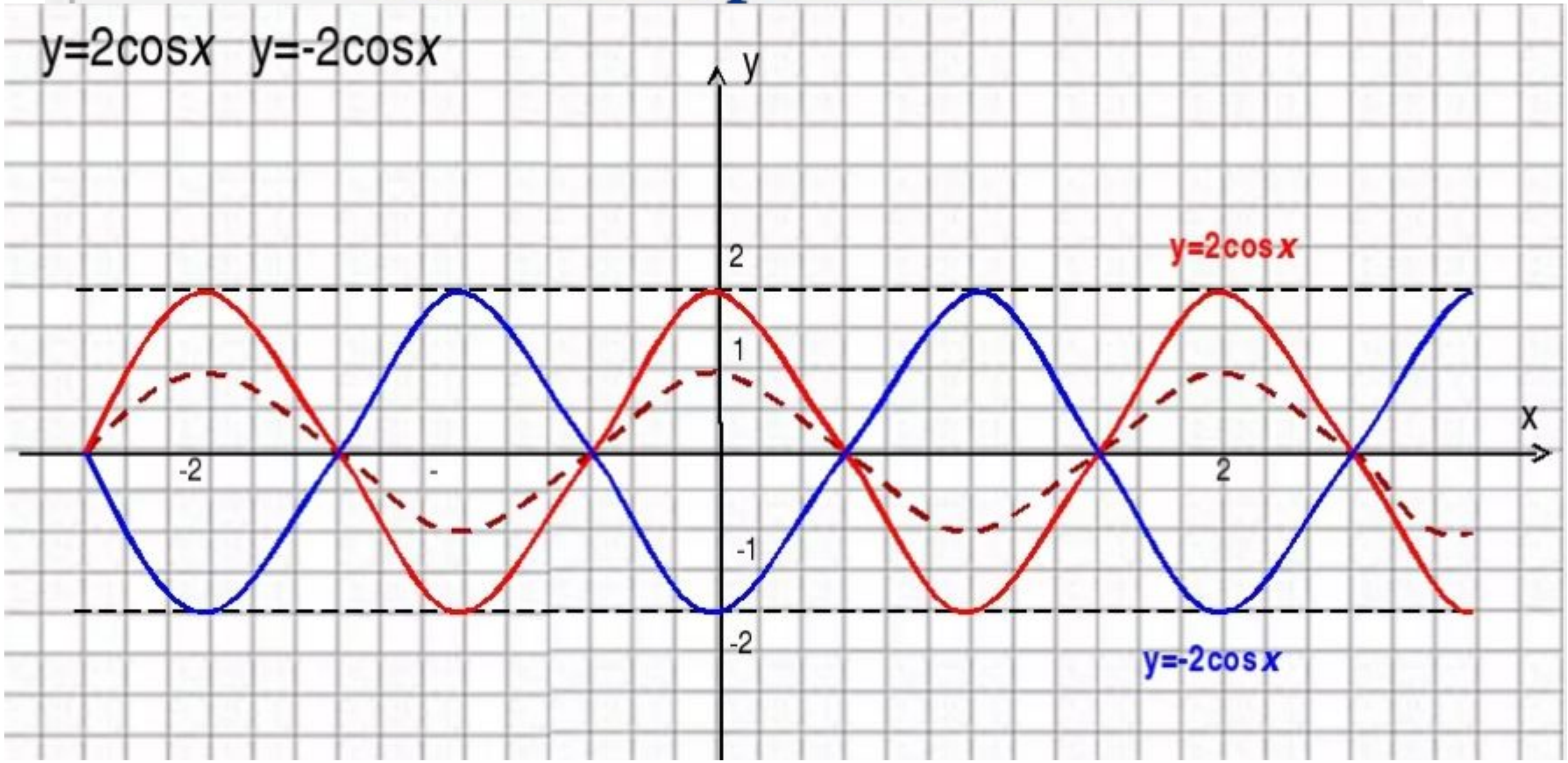
1) $y = 1 - \sin x$; 2) $y = 2 + \sin x$;

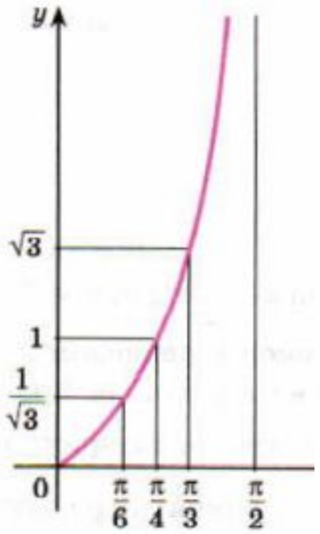
3) $y = \sin 3x$; 4) $y = 2 \sin x$.

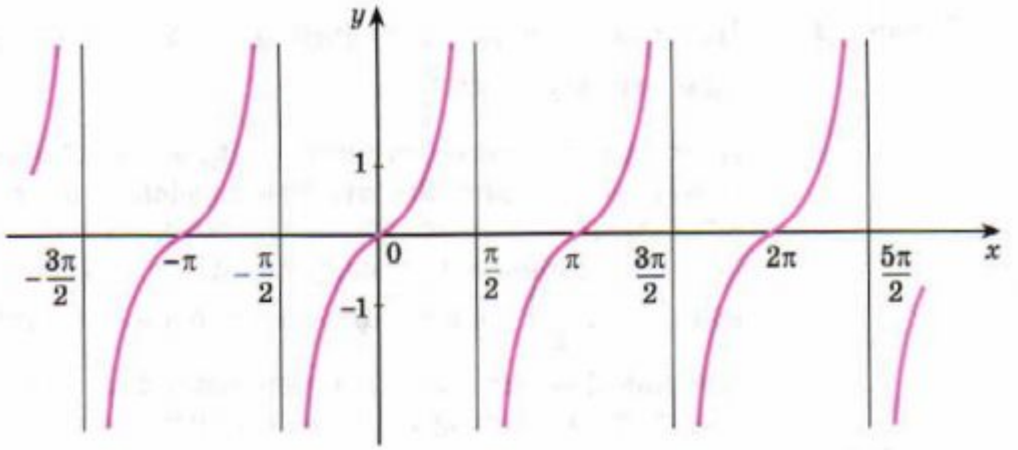




Преобразование графиков тригонометрических функций путем сжатия и растяжения

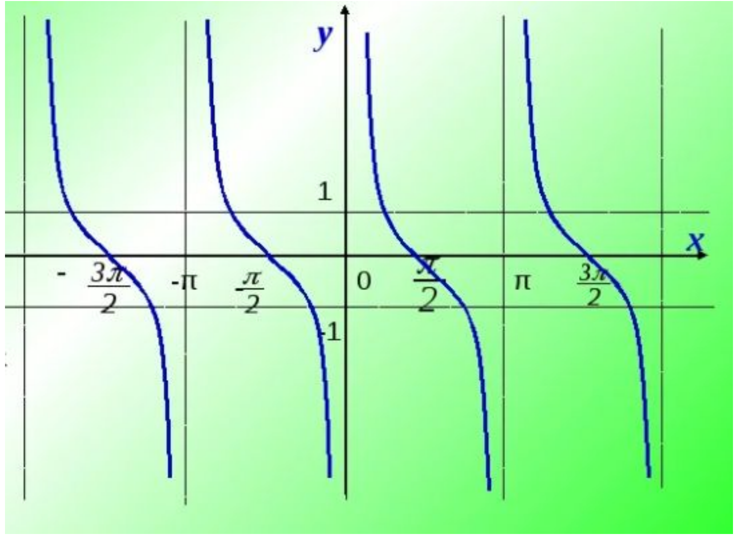




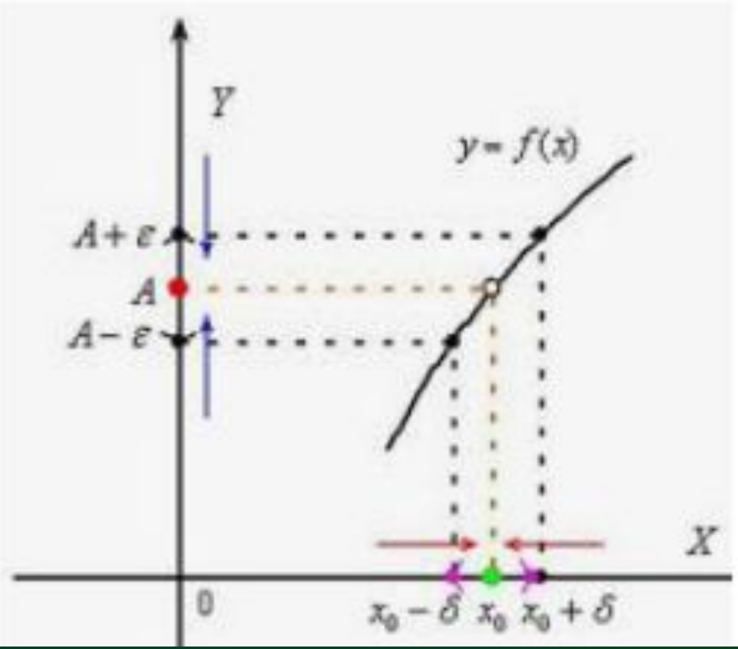


Тригонометрическая таблица

градусы	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	270^0	360^0
радианы	0	$\frac{П}{6}$	$\frac{П}{4}$	$\frac{П}{3}$	$\frac{П}{2}$	$\frac{2П}{3}$	$\frac{3П}{4}$	$\frac{5П}{6}$	П	$\frac{3П}{2}$	2П
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0
ctg x	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$	–	0	–



Понятие производной



Производная функции y=f(x) в точке x_0 – это скорость изменения функции f(x) в точке x_0.

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение

Производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел разностного отношения при $h \to 0$, т. е.

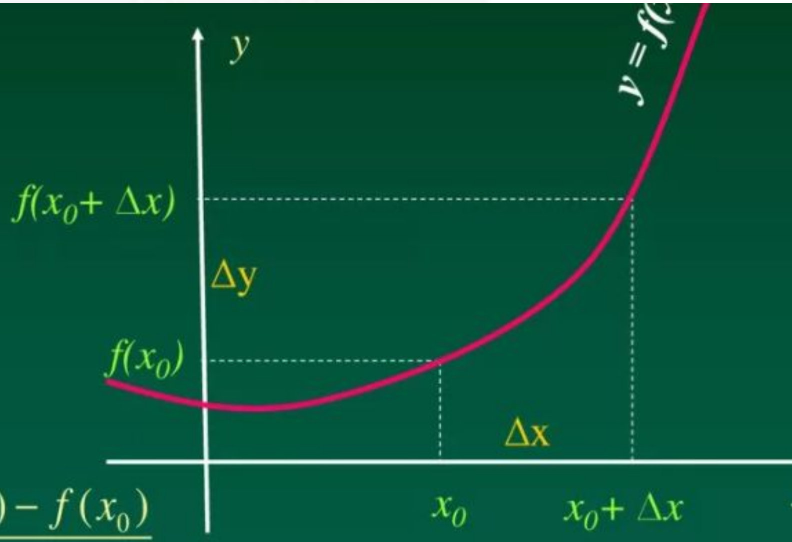
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \qquad (2)$$

Если существует $f'(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, а если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема на этом промежутке.*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



- понятие производной
- физический смысл производной
- формулы для нахождения производной
- геометрический смысл производной
- уравнение касательной к графику функции
- Применение производной к построению графиков функций

Понятие "производная" возникло в связи с необходимостью решения ряда задач физики, механики и математики.

Честь открытия основных законов математического анализа принадлежит английскому ученому Ньютону и немецкому математику Лейбницу.

Лейбниц рассматривал задачу о проведении касательной к произвольной кривой.

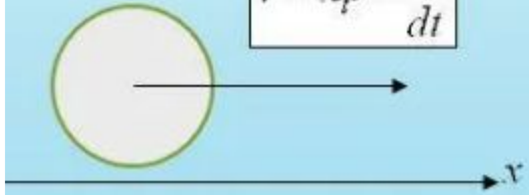
Понятие производной функции

- *Исаак Ньютон*

(физическое толкование):

Производная – это скорость движущегося тела в данный момент времени

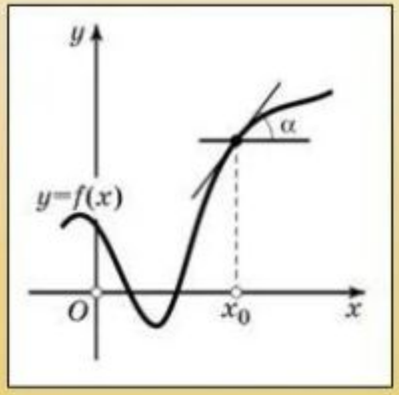
$$v = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$



- *Готфрид Вильгельм Лейбниц*

(геометрическое толкование):

Производная функции в точке – это тангенс угла наклона касательной к графику этой функции в данной точке



$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$$

Уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- *Огюстен Луи Коши*

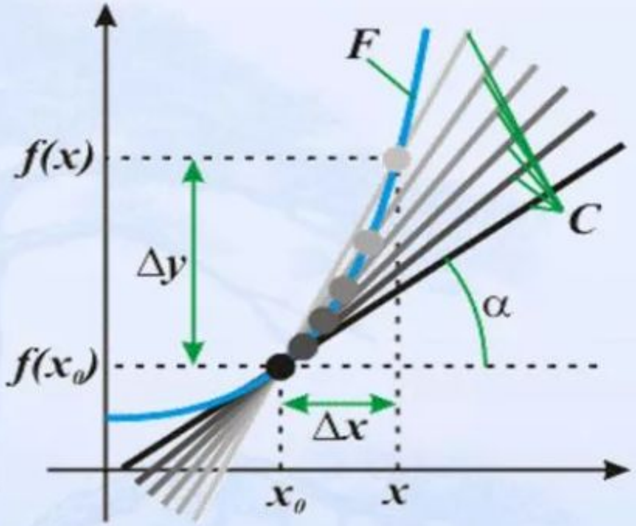
(аналитическое толкование):

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Понятие производной

$\Delta f = (x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



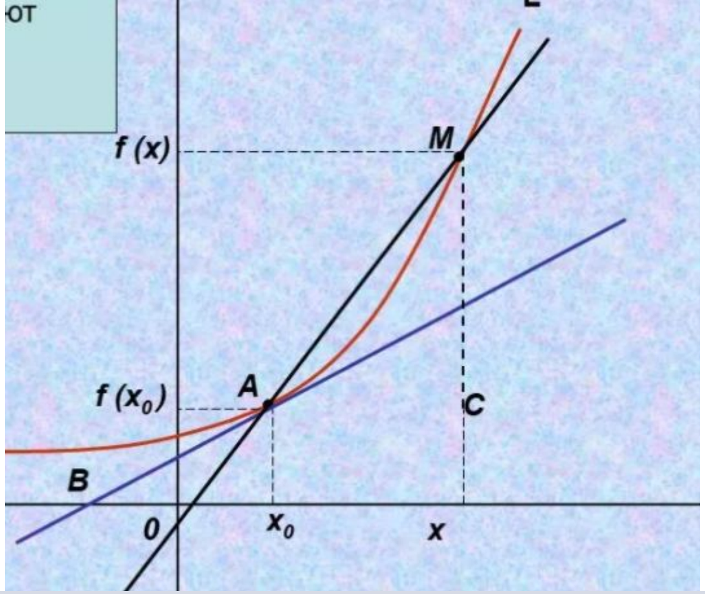
Определение.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

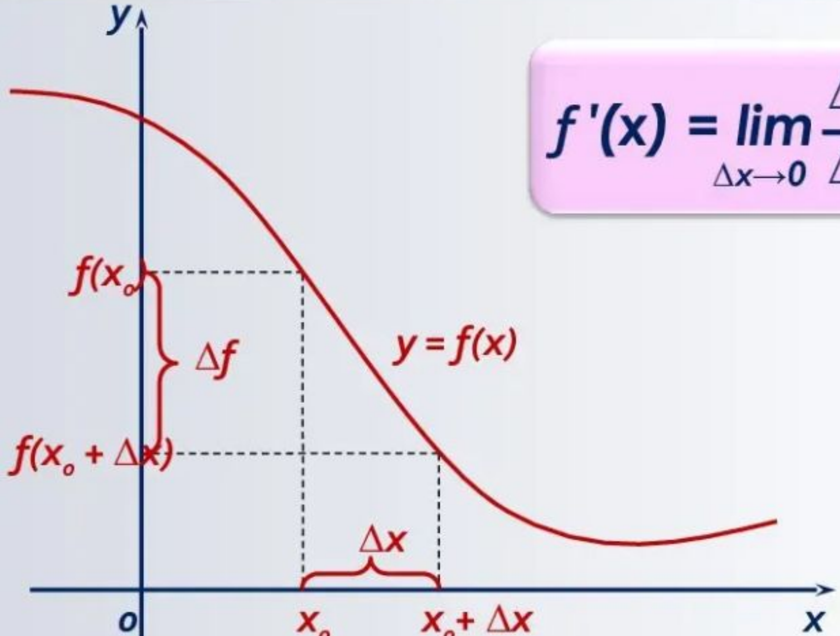
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке)

Производная- предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует



Понятие производной



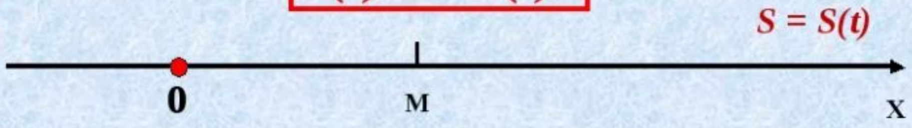
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Физический смысл производной

Производная функции y=f(x) в точке x_0 – это скорость изменения функции f(x) в точке x_0.

Производная выражает мгновенную скорость в момент времени t.

Если при прямолинейном движении путь S, пройденный точкой, есть функция от времени t, т.е. S = S(t), то мгновенная скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $\boxed{v(t) = S'(t)}$



$$V_{cp} = \frac{S(t+h) - S(t)}{h}$$ -разностное отношение

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} V_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Надитие производную

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 2x$
3. $f(x) = x^{-7}$
4. $f(x) = 5{,}2$
5. $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x - 10$
6. $(x^3 - 4)' =$
7. $f(x) = (x - 3)^2$
8. $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$
9. $\left(\frac{1}{2}x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)' =$
10. $\left(5x^5 - \sqrt{x}\right)' =$

Упражнения

776 Точка движется по закону $s(t) = 1 + 3t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t = 1$ до $t = 4$; 2) от $t = 0{,}8$ до $t = 1$.

777 Найти среднюю скорость движения точки на отрезке [1; 1,2], если закон её движения $s = s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = 2t$; 2) $s(t) = t^2$.

778 Найти мгновенную скорость движения точки, если:
1) $s(t) = 2t + 1$; 2) $s(t) = 2 - 3t$.

779 Закон движения задан формулой $s(t) = 0{,}25t + 2$. Найти:
1) среднюю скорость движения от $t = 4$ до $t = 8$;
2) скорость движения в моменты $t = 4$ и $t = 8$.

780 Используя определение производной, найти $f'(x)$, если:
1) $f(x) = 3x + 2$; 2) $f(x) = 5x + 7$;
3) $f(x) = 3x^2 - 5x$; 4) $f(x) = -3x^2 + 2$.

781 С помощью формулы $(kx + b)' = k$ найти производную функции:
1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = -7x + 5$; 3) $f(x) = -5x - 7$.

782 Найти мгновенную скорость движения точки, если закон её движения $s(t)$ задан формулой:
1) $s(t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t) = 5t^2$.

783 Определить скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 + 2$, в момент времени:
1) $t = 5$; 2) $t = 10$.

Составить разностное отношение, если:

1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = x - 1$; 3) $f(x) = 4x^2$;
4) $f(x) = x^2 + 2$; 5) $f(x) = x^3 - x^2$; 6) $f(x) = 2x^3 + x$.

Производная степенной функции

Функция	Производная	

Упражнения

Найти производную функции (787—792).

787 1) x^6; 2) x^7; 3) x^{11}; 4) x^{13}.

788 1) x^{-2}; 2) x^{-3}; 3) x^{-4}; 4) x^{-7}.

789 1) $x^{\frac{1}{2}}$; 2) $x^{\frac{2}{3}}$; 3) $x^{-\frac{2}{7}}$; 4) $x^{\sqrt{3}}$.

790 1) $\frac{1}{x^5}$; 2) $\frac{1}{x^9}$; 3) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

791 1) $(4x-3)^2$; 2) $(5x+2)^{-3}$; 3) $(1-2x)^{-6}$;
4) $(2-5x)^4$; 5) $(2x)^3$; 6) $(-5x)^4$.

792 1) $\sqrt[3]{2x+7}$; 2) $\sqrt[4]{7-3x}$; 3) $\sqrt[4]{3x}$; 4) $\sqrt[3]{5x}$.

793 Найти $f'(x_0)$, если:
1) $f(x)=x^6$, $x_0=\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=x^{-2}$, $x_0=3$;
3) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$;
5) $f(x)=\sqrt{5-4x}$, $x_0=1$; 6) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, $x_0=1$.

5) $\frac{2}{5\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$;

794 Построить график функции $y=x^4$ и график функции, являющейся её производной.

795 На рисунке 107 изображён график функции, являющейся производной одной из функций $y=x^2$, $y=x^3$ или $y=x^{\frac{1}{2}}$. Установить функцию.

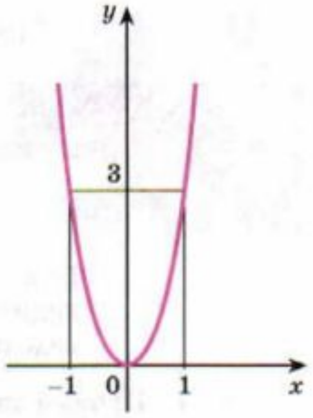


Рис. 107

796 Найти производную функции:
1) $\frac{1}{(2+3x)^2}$; 2) $\frac{1}{(3-2x)^3}$;
3) $\sqrt[3]{(3x-2)^2}$; 4) $\sqrt[7]{(3-14x)^2}$;
5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3x-7}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}$.

797 При каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 1, если:
1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$?

798 Найти мгновенную скорость тела, движущегося по закону $s(t)=\sqrt{t+1}$, в момент времени $t=3$.

799 При каких значениях x выполняется равенство $f'(x)=f(x)$, если:
1) $f(x)=(2x-1)^2$; 2) $f(x)=(3x+2)^3$?

§ 46

Правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x). \qquad (1)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))'=cf'(x). \qquad (2)$$

3. Производная произведения:

$$(f(x)\,g(x))'=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x).$$

4. Производная частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}. \qquad (4)$$

5. Производная сложной функции.

$$5.\ (f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

39. С помощью формулы (8) найти производную функции:

1) $(2x-1)^3$; 2) $(x+3)^2$; 3) $(3x^2-2x)^2$; 4) $(x^3-x^2)^3$.

1) $f(x)=(3x^3-4x^2+2x-1)^2$;

Найти производную функции (802—803).

802 1) $x^2 + x$; 2) $x^2 - x$; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$; 5) $-4x^3$; 6) $0{,}5x^3$; 7) $13x^2 + 26$; 8) $8x^2 - 16$.

803 1) $3x^2 - 5x + 5$; 2) $5x^2 + 6x - 7$; 3) $x^4 + 2x^2$; 4) $x^5 - 3x^2$; 5) $x^3 + 5x$; 6) $-2x^3 + 18x$; 7) $2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$; 8) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$.

804 Построить график функции $y = 3(x-2)^2 + 1$ и график функции, являющейся её производной.

805 Найти производную функции:

1) $x^2 + \frac{1}{x^3}$; 2) $x^3 + \frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x} + 7\sqrt[14]{x}$.

806 Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$; 3) $f(x) = -x^3 + x^2$; 4) $f(x) = x^2 + x + 1$.

807 Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$;

3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$; 4) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$.

808 Дифференцируема ли функция $y = f(x)$ в точке x, если:

1) $y = \frac{2}{x-1}$, $x = 1$; 2) $y = \frac{3x-5}{(x-3)^2}$, $x = 3$;

3) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$; 4) $y = \sqrt{5-x}$, $x = 4$?

809 Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = x^3 - 2x$;
2) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$;
4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$;
5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$;
6) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$.

810 Найти производную функции:

1) $(x^2 - x)(x^3 + x)$; 2) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 3) $(x-1)\sqrt{x}$.

811 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = (x-1)^6(2-x)^7$; 2) $f(x) = (2x-1)^5(1+x)^4$;

3) $f(x) = \sqrt{2-x}\,(3-2x)^8$; 4) $f(x) = (5x-4)^6\sqrt{3x-2}$.

6) $2x\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x\sqrt[4]{x^3}}$.

812 Пересекается ли график функции, являющейся производной функции $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, с графиком функции $y = 3x + 1$?

813 При каких значениях x значение производной функции $y = (x - 3)^5 (2 + 5x)^6$ равно 0?

814 Найти производную функции:

1) $\frac{x^5 + x^3 + x}{x+1}$; 2) $\frac{\sqrt{x} + x^2 + 1}{x-1}$.

815 Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; 2) $f(x) = \frac{2x^2}{1-7x}$.

816 Найти функцию $f(g(x))$, если:

1) $g(x) = 1 - x$, $f(g) = g^{\frac{3}{2}}$; 2) $g(x) = \ln x$, $f(g) = \sqrt{g}$.

817 Представить в виде сложной функции:

1) $F(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$; 2) $F(x) = \sin(x^2 + 1)$.

Найти производную функции (**818—821**).

818 1) $\frac{x^3 + x^2 + 16}{x}$; 2) $\frac{x\sqrt[3]{x} + 3x + 18}{\sqrt[3]{x}}$.

819 1) $\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$; 2) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

820 1) $(2x-3)^5(3x^2+2x+1)$; 2) $(x-1)^4(x+1)^7$;
3) $\sqrt[4]{3x+2}\,(3x-1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x+1}\cdot(2x-3)^3$.

821 1) $\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$; 2) $\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}$; 3) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$.

822 При каких значениях x значение производной функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ равно 0?

823 При каких значениях x значение производной функции $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ равно 3?

824 При каких значениях x значение производной функции $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ равно 11?

825 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает положительные значения:
1) $f(x)=x^4-4x^2+1$; 2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$;
3) $f(x)=(x+2)^2\sqrt{x}$; 4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

826 Выяснить, при каких значениях x производная функции принимает отрицательные значения:
1) $y=(5-3x)^4(3x-1)^3$; 2) $y=(2x-3)^2(3-2x)^3$;
3) $y=\frac{3x^2-1}{1-2x}$; 4) $y=\frac{3x^3}{1-3x}$.

827 Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2$. Найти угловую скорость (в рад/с) вращения тела в момент времени $t=20$ с.

828 Тело, масса которого $m=5$ кг, движется прямолинейно по закону $s=1-t+t^2$ (где s измеряется в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.