

**Равносильность
уравнений.
Линейные уравнения.**

● Основные определения

- **Уравнением** называется два алгебраических выражения, соединенные знаком равенства (=).
- **Корнем уравнения** называется такое значение переменной, при котором это равенство достигается.
- **Решить уравнение** – значит найти все его корни или **показать, что корней нет.**

Линейное уравнение с одним неизвестным (общий вид)

$$ax + b = 0$$

a, b – любые действительные числа

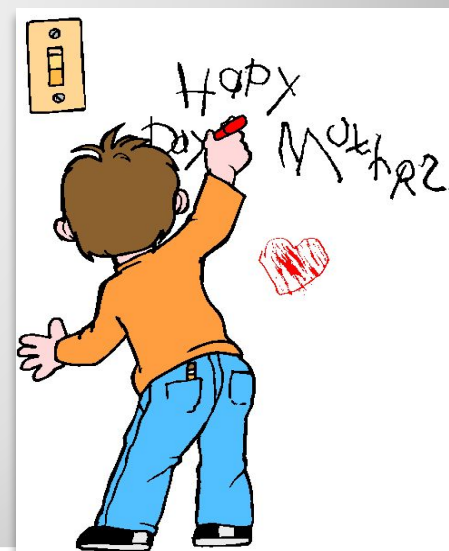
Линейные уравнения - не самая сложная тема школьной математики. Но есть там свои фишки, которые могут озадачить даже подготовленного ученика. Разберёмся?

$2x + 7 = 0$. Здесь $a=2, b=7$

$0,1x - 2,3 = 0$ Здесь $a=0,1, b=-2,3$

$12x + 1/2 = 0$ Здесь $a=12, b=1/2$

И так далее.



$$ax + b = 0$$

Ничего сложного, правда? Особенно, если не замечать слова: **"где a и b – любые действительные числа"**... А если заметить, да неосторожно задуматься? Ведь, если $a=0$, $b=0$ (любые же числа можно?), то получается забавное выражение:

$$0=0$$

Но и это ещё не всё! Если, скажем, $a=0$, а $b=5$, получается совсем уж что-то несусветное:

$$5=0$$



А ведь из этих странных выражений ещё и x найти надо! Которого нету вообще. И, что удивительно, этот x очень просто находится. Мы научимся это делать.

Всё решение линейных уравнений
СОСТОИТ ИЗ
тождественных преобразований
уравнений.

Кстати, эти преобразования (целых два!) лежат в основе решений **всех уравнений математики**. Другими словами, решение **любого** уравнения начинается с этих самых преобразований. В случае линейных уравнений, оно (решение) на этих преобразованиях и заканчивается полноценным ответом.

Найди уравнения

$y = 8$
 $5 + 7 = 12$
 $36 : y = 4$
 $5 + y = 15$
 $x : 2$
 $x : 5 = 7$

Найди уравнения

$y = 8$
 $5 + 7 = 12$
 $36 : y = 4$
 $5 + y = 15$
 $x : 2$
 $x : 5 = 7$

При решении уравнений используют теоремы о равносильности, которые мы рассмотрим на примере линейных уравнений.

Равносильными называются уравнения, множества корней которых совпадают. *Равносильными также считаются уравнения, которые не имеют корней.*

*Другими словами, два **уравнения равносильны, если корни одного уравнения являются корнями второго и наоборот.***

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то полученное уравнение будет равносильно исходному.

$$ax + b = 0$$

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$$

$$ax = -b$$

Прибавим к обеим частям уравнения число $(-b)$

В левой части уравнения $b + (-b)$ сократятся.

Получили следствие, которым вы всегда пользовались:

Если в уравнении перенести любой член из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, не равное нулю, то полученное уравнение будет равносильно исходному.

$$ax = -b$$

$$ax \cdot \frac{1}{a} = -b \cdot \frac{1}{a}$$


$$x = -b/a$$

Умножим обе части уравнения на $1/a$ ($a \neq 0$)


В левой части $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, поэтому получим

Для решения линейных уравнений надо:

1. Слагаемые, зависящие от x , перенести в одну часть уравнения, числа – в другую часть.
2. Привести подобные члены в каждой части уравнения.
3. Найти неизвестную (переменную) x .



Найдите и исправьте ошибки в решении уравнения:

$$5x - 8 = 4 - 8x$$
$$5x + 8x = 4 + 8$$
$$13x = 12$$
$$x = 12(-3)$$
$$x = \frac{12}{13}$$


SPRAY

Для начала рассмотрим самый простой пример.

$$x - 3 = 2 - 4x$$

Это линейное уравнение. Схема тут простая. Собрать всё, что с *иксами* в левой части равенства, всё, что без *иксов* (числа) - в правой.

Для этого нужно перенести $-4x$ в левую часть, со сменой знака, разумеется, а -3 в правую. Это и есть *применение теоремы 1 (вернее, следствия из неё)*. Получим:

$$x + 4x = 2 + 3$$

Приводим подобные, считаем:

$$5x = 5$$

Что нам не хватает для полного счастья? Пятёрка перед x в левой части мешает. Избавляемся от пятёрки с помощью *второй теоремы о равносильности*. А именно - делим обе части уравнения на 5. Получаем готовый ответ:

$$x = 1$$

Решим что-нибудь посолиднее.

$$\frac{x+2}{3} + x = 1 - \frac{3}{4}x$$

Что вам больше всего не нравится в этом уравнении?

95 человек из 100 ответят: **дроби!** Ответ правильный. Вот и давайте от них избавимся, если, конечно, в вашем арсенале имеется

теорема 2 о равносильности уравнений.

Умножим обе части на 12, т.е. на общий знаменатель. Не забываем, что умножать надо каждую часть *целиком*. Вот как выглядит первый шаг:

Раскрываем скобки:

$$12\left(\frac{x+2}{3} + x\right) = 12\left(1 - \frac{3}{4}x\right)$$

$$\frac{12(x+2)}{3} + 12 \cdot x = 12 - \frac{12 \cdot 3}{4}x$$

$$4x + 8 + 12x = 12 - 9x$$

Не пример, а сплошное удовольствие! Вот теперь вспоминаем заклинание из младших классов: *с иксом – влево, без икса – вправо* (но мы-то помним, что это следствие из **теоремы 1!**)

Приводим подобные:

$$\begin{aligned} 4x + 12x + 9x &= 12 - 8 \\ 25x &= 4 \end{aligned}$$

И делим обе части на 25, т.е. снова применяем **теорему 2**

Вот и всё. Ответ: $x=0,16$

Берём на заметку: чтобы привести исходное замороченное уравнение к приятному виду, мы использовали две (всего две!) *теоремы о равносильности* – перенос влево-вправо со сменой знака и умножение-деление уравнения на одно и то же число. **Это универсальный способ!** Работать таким образом мы будем с **любыми** уравнениями!

Как видим, принцип решения линейных уравнений простой. Берём уравнение и упрощаем его с помощью теорем о равносильности до получения ответа. Основные проблемы здесь в вычислениях, а не в принципе решения.

Но... Встречаются в процессе решения самых элементарных линейных уравнений такие сюрпризы, что могут и в сильный ступор вогнать...) К счастью, таких сюрпризов может быть только два. Назовём их особыми случаями.

Особые случаи при решении линейных уравнений.

Сюрприз первый.

Предположим, попалось вам элементарнейшее уравнение: $2x+3=5x+5 - 3x - 2$

Слегка скучая, переносим с иксом влево, без икса - вправо. $2x-5x+3x=5-2-3$

Считаем, и... опа!! Получаем: $0=0$

Само по себе это равенство не вызывает возражений. Нуль действительно равен нулю. Но икс-то пропал! А мы обязаны записать в ответе, **чему равен икс**. Иначе, решение не считается, да...) Тупик? Спокойствие! В таких сомнительных случаях спасают самые общие правила. **Что значит решить уравнение?** Это значит, **найти все значения икс, которые при подстановке в исходное уравнение, дадут нам верное равенство.**

Но верное равенство у нас **уже** получилось! $0=0$, куда уж вернее?! Остаётся сообразить, при каких **икс** это получается. Какие значения икс можно подставлять в **исходное** уравнение, если эти иксы **всё равно сокращаются в полный ноль?** Ну же?

Да!!! Иксы можно подставлять **любые!** Какие хотите. Хоть 5, хоть 0,05, хоть -220. Они всё равно сократятся. Если не верите - можете проверить. Подставляйте любые значения икс в **исходное** уравнение и посчитайте. Всё время будет получаться чистая правда: $0=0$, $2=2$, $-7,1=-7,1$ и так далее.

Вот вам и ответ: **x - любое число.**

Сюрприз второй.

Возьмём то же линейное уравнение и изменим в нём всего одно число. Вот такое будем решать:

$$2x + 1 = 5x + 5 - 3x - 2$$

После тех же самых преобразований мы получим нечто интригующее: $0 = 2$

Вот так: решали линейное уравнение, получили странное равенство. Говоря математическим языком, мы получили *неверное равенство*. А говоря простым языком, неправда это. Бред. Но тем, не менее, этот бред - вполне веское основание для правильного решения уравнения.)

Какие значения x при подстановке в исходное уравнение дадут нам **верное** равенство? Да никакие! Нет таких x . Чего ни подставляй, всё сократится, останется бред.

Вот вам и ответ: **решений нет.**

Теперь, когда мы разобрались со всеми подводными камнями в линейных уравнениях, имеет смысл их порешать.

$$3\frac{1}{2} - \left(3x + \frac{2}{5}\right) = x - \frac{37 - x}{5}$$

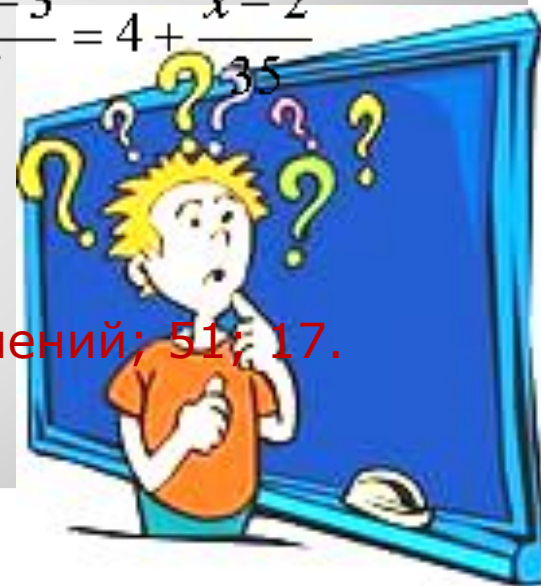
$$\frac{7}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{x-1}{4}$$

$$\frac{x-3}{8} + 3 = \frac{3x+127}{20} - \frac{x+9}{12}$$

$$\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-3}{7} = 4 + \frac{x-2}{35}$$

Ответы даны в беспорядке: 2,5; нет решений; 51; 17.

Получилось?! Поздравляю!



- Задание для тех, кому предыдущие примеры не по зубам:
- $2(5x+6)-7=4-9(6x-9)$
- $12-4(3x-7)=3+5(4x+1)$
- $5,7-3,5(2x-1)=10,2$
- $7,9(x-0,2)+4,2=6,4x+5$