Первая теорема сравнения

Разберемся, что такое первая теорема сравнения и как ее применять на практике.

Теорема звучит следующим образом:

Есть два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

1. Если $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Если $a_n \geq b_n$, то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Как применить теорему на практике

1. Проверяем исходный пример на условия сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. Если первое условие выполнено, проверяем $a_n > 0$? Если да, то применяем первую теорему сравнения.
3. Устанавливаем справедливость одной из двух гипотез теоремы: исходный ряд — сходится или исходный ряд расходится.
4. Делаем выводы и записываем ответ.

Немного примеров для закрепления

№1. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$ на сходимость.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+n+2} = 0$.
2. $a_n > 0$.
3. Находим похожий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ряд сходится по правилу.
4. Для всех n = 1, 2, 3… справедливо $n^2 + n + 2 > n^2$
5. $\frac{1}{n^2+n+2} \leq \frac{1}{n^2}$
6. Делаем вывод: исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$ сходится, потому что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ тоже сходится.

№2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4}$ на сходимость.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^4} = 0.$

2. $a_n > 0.$

3. Находим похожий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ряд сходится по правилу.

4. $\frac{n^2-1}{n^4} < \frac{n^2}{n^4}$ для всех натуральных n.

5. Делаем вывод, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4}$ сходится, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ тоже сходится и является обобщенным гармоническим рядом для исходного ряда.

Спасибо за внимание

Презентацию выполнил студен группы ЭР-11-20
Иванов Михаил