

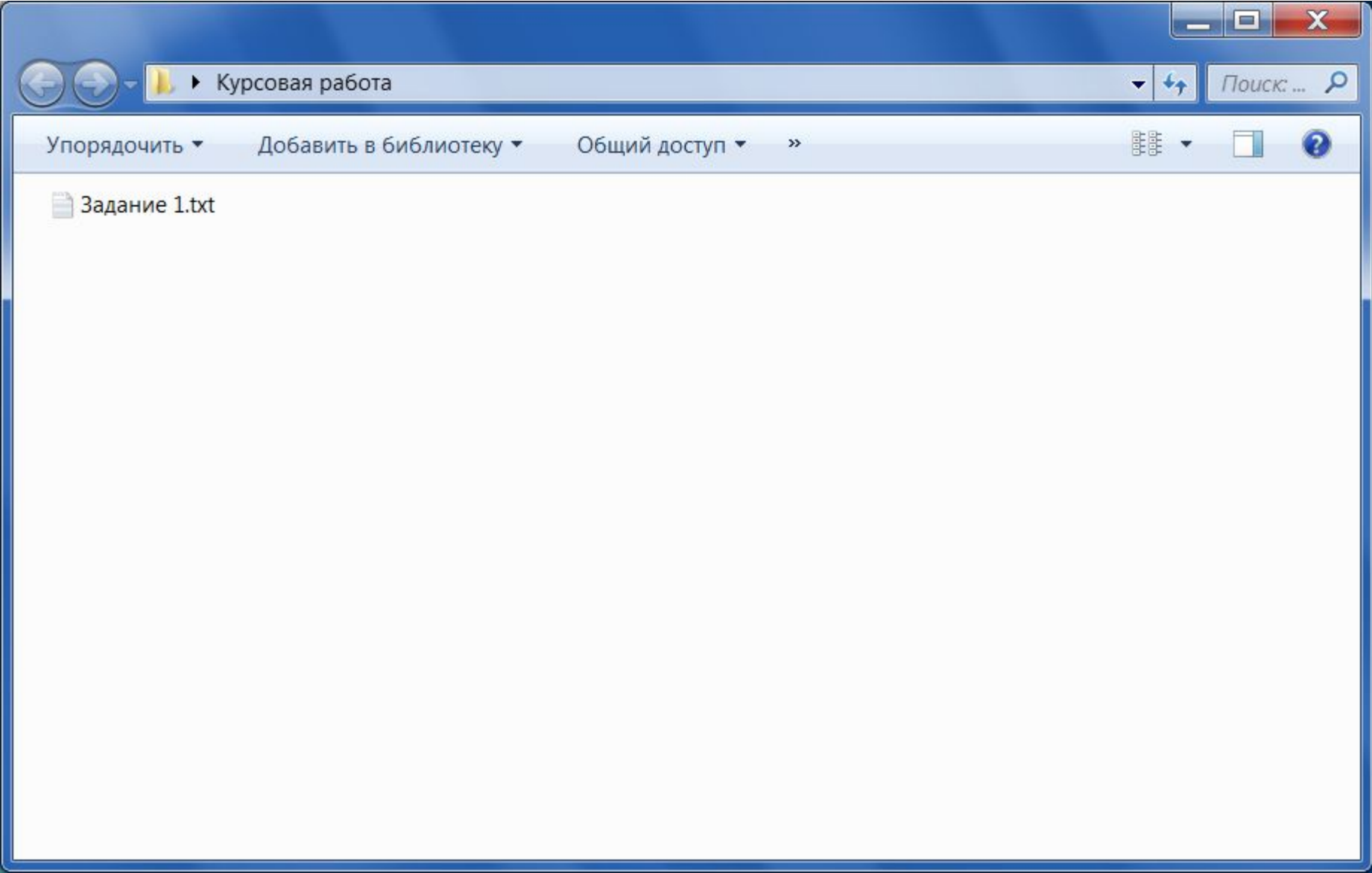


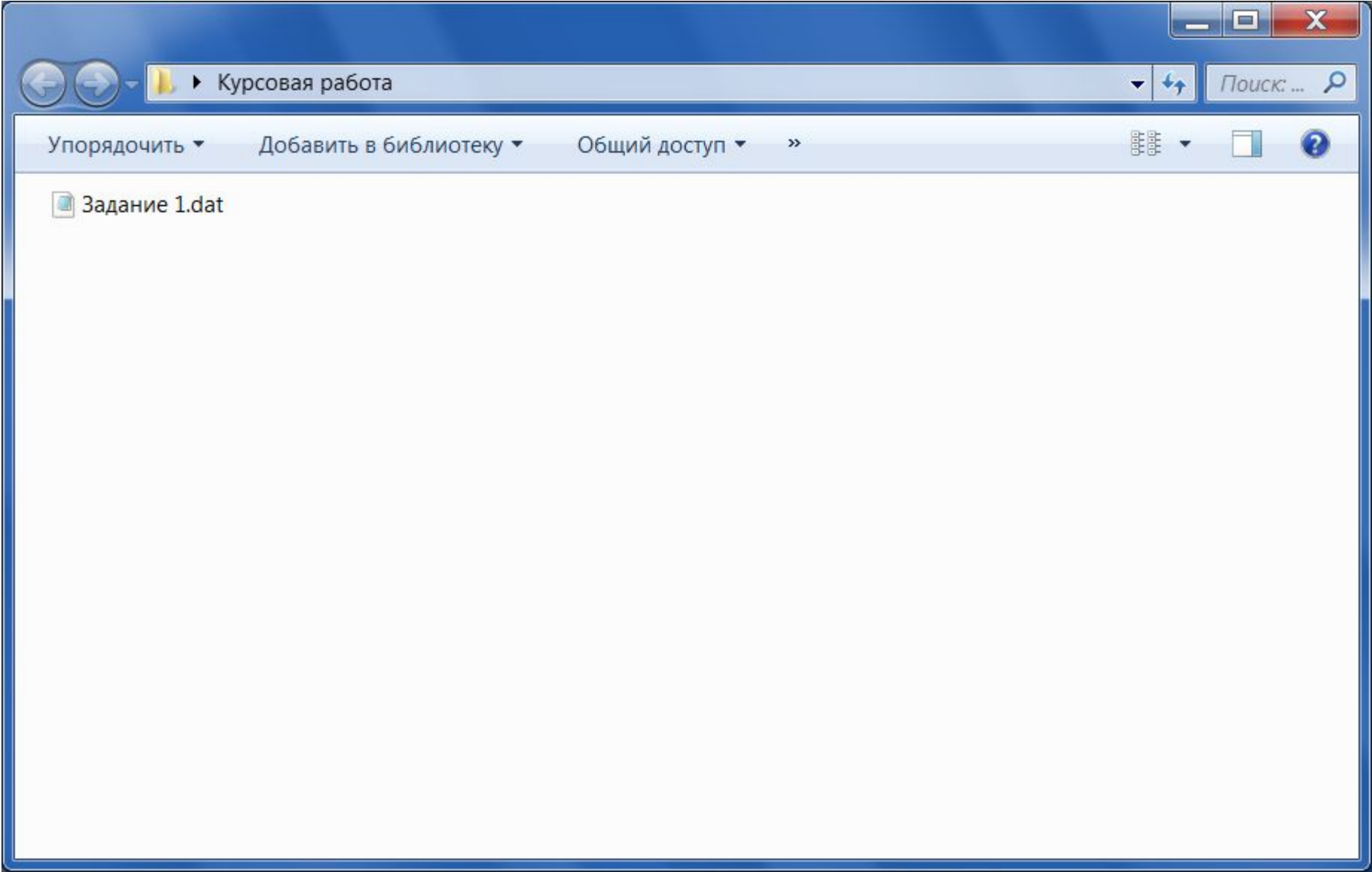
Тема 7

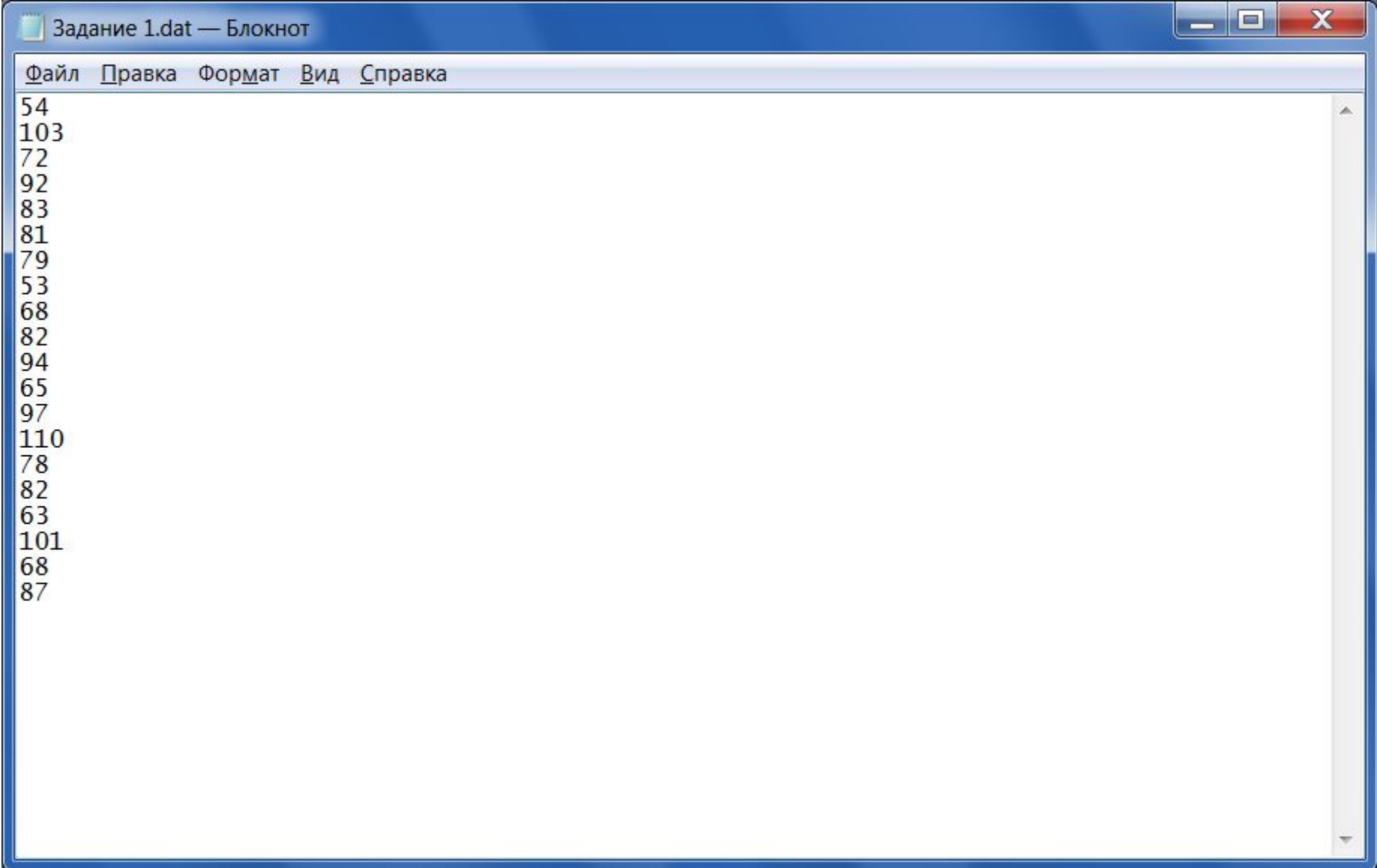
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПИСАТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИКИ В MATHCAD

Доцент кафедры ТАМ, к.т.н.

Шипулин Леонид Викторович



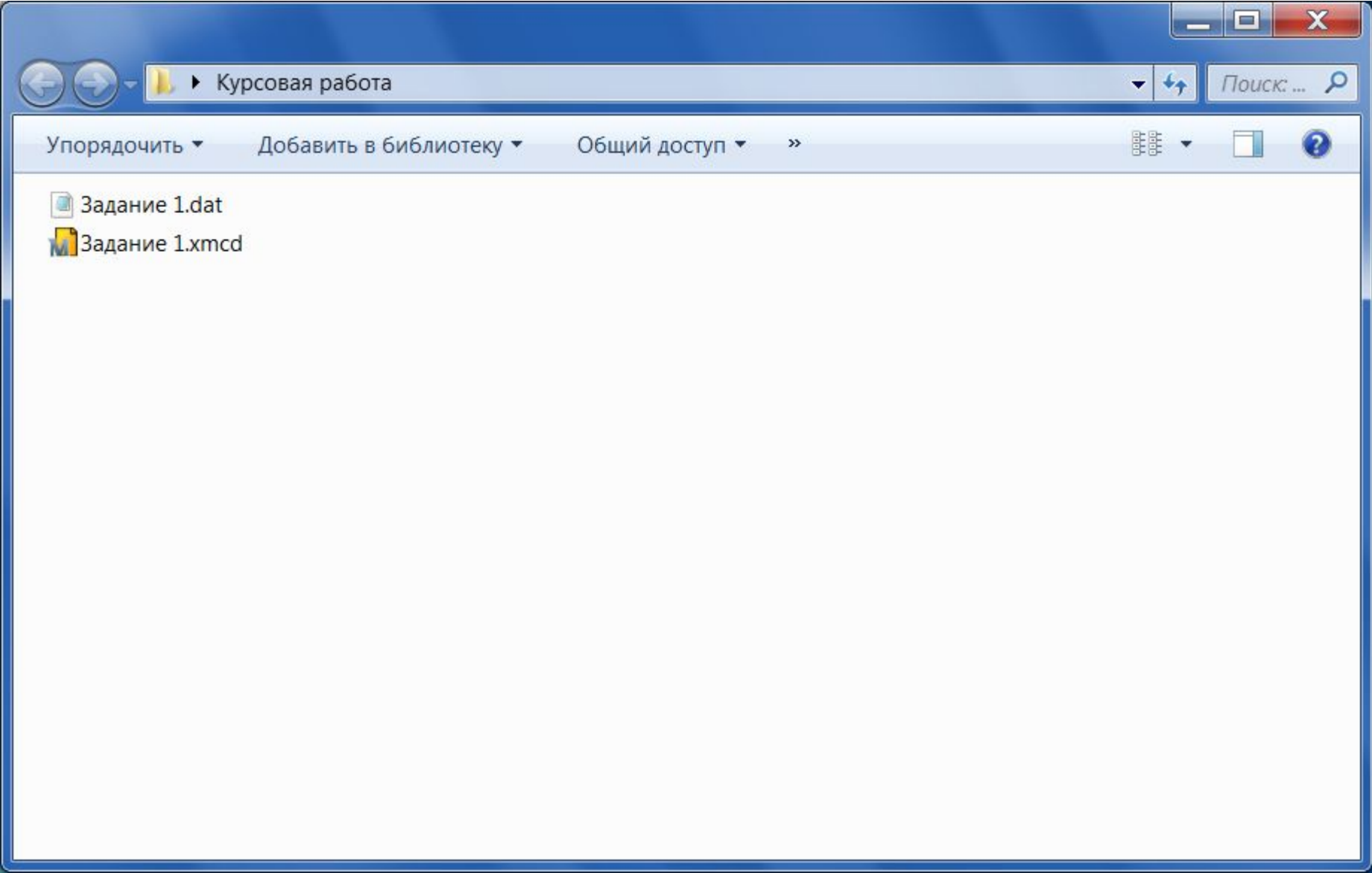




Задание 1.dat — Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
54
103
72
92
83
81
79
53
68
82
94
65
97
110
78
82
63
101
68
87
```



Считывание данных в вектор

Mathcad - [Задание 1.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

ORIGIN := 1

Задаем вектор-столбец X и считываем его из файла "Задание 1.dat"

$X := \text{READPRN}(\text{"Задание 1.dat"})$

	1
1	54
2	103
3	72
4	92
5	83
6	81
7	79
8	53
9	...

$X^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54	103	72	92	83	81	79	53	...

$X^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54	103	72	92	83	81	79	53	68

Matrix

$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
 x_n
 x^{-1}
 $|x|$
 $f(M)$
 $M^{\langle \rangle}$
 M^T
 $m..n$
 $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\vec{a} \times \vec{b}$
 $\sum u$

Среднее арифметическое. Среднеквадратичное отклонение выборки

06

Mathcad - [Задание 1.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

$X := \text{READPRN}(\text{"Задание 1.dat"})$

	1
1	54
2	103
3	72
4	92
5	83
6	81
7	79
8	53
9	...

$X^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54	103	72	92	83	81	79	53	...

$X^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54	103	72	92	83	81	79	53	...

Рассчитаем среднее арифметическое и среднеквадратичное отклонение выборки

$X_{cp} := \text{mean}(X)$ $S := \text{Stdev}(X)$

$X_{cp} = 80.6$ $S = 15.952$

Matrix

$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ \times_n \times^{-1} $| \times |$

$\vec{f}(M)$ $M^{<>}$ M^T $m..n$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\vec{a} \times \vec{b}$ $\sum u$ $\frac{d}{dx}$

Mathcad - [Задание 1.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Рассчитаем модуль отклонения каждого результата от среднего значения

$i := 1 \dots \text{last}(X)$

$\Delta X_i := |X_i - X_{cp}|$

$\Delta X_i =$

26.6
22.4
8.6
11.4
2.4
0.4
1.6
27.6
12.6
...

Matrix

$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ x_n x^{-1} $|x|$
 $f(M)$ $M^{<>}$ M^T $m..n$
 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\vec{a} \times \vec{b}$ $\sum u$ $\frac{d}{dx}$

Greek

α β γ δ ε ζ
 η θ ι κ λ μ
 ν ξ \omicron π ρ σ
 τ υ ϕ χ ψ ω
 Λ \Bbbk Γ Δ E Z
 H Θ I K Λ M
 N Ξ O Π P Σ
 T Y Φ X Ψ Ω

Выбор значения t -критерия (для $\alpha=0,05$)

Количество испытаний n	$T_{\text{крит}}$	Количество испытаний n	$T_{\text{крит}}$	Количество испытаний n	$T_{\text{крит}}$
3	1.15	11	2.23	19	2.53
4	1.46	12	2.29	20	2.56
5	1.67	13	2.33	21	2.58
6	1.82	14	2.37	22	2.60
7	1.94	15	2.41	23	2.62
8	2.03	16	2.44	24	2.64
9	2.11	17	2.48	25	2.66
10	2.18	18	2.50		

Mathcad - [Задание 1.xmcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Рассчитаем модуль отклонения каждого результата от среднего значения

$i := 1 \dots \text{last}(X)$

$\Delta X_i := |X_i - X_{\text{ср}}|$

$\Delta X_i =$

26.6
22.4
8.6
11.4
2.4
0.4
1.6
27.6
12.6
...

Критерий т для уровня значимости $\alpha = 0,05$

$\tau_{\text{кр}} := 2.56$

$\Delta X_{\text{кр}} := \tau_{\text{кр}} \cdot S = 40.837 +$

Matrix

Greek

Проверка на критическое отклонение случайной величины от среднеарифметического

10

Просматриваем вектор ΔX_i . Если некоторое значение превышает критическое значение $\Delta X_{кр}$, то это значение из первоначально заданной выборки следует выкинуть (в текстовом файле .dat) и пересчитать все заново, сменив значение τ -критерия для уровня значимости $\alpha = 0,05$.

В выборке, приведенной в примере, каждое значение вектора ΔX_i меньше, чем критическое $\Delta X_{кр}$. Поэтому никакие значения выкидывать не будем. Иными словами, **резко выделяющиеся значения отсутствуют**.

Можно приступить к дальнейшему исследованию выборки.

$\Delta X_i =$

26.6	✓
22.4	✓
8.6	✓
11.4	✓
2.4	✓
0.4	✓
1.6	✓
27.6	✓
12.6	✓
1.4	✓
13.4	✓
15.6	✓
16.4	✓
29.4	✓
2.6	✓
1.4	✓
17.6	✓
20.4	✓
12.6	✓
6.4	✓

Параметры выборки

Выборочное среднее значение $\text{mean}(X) = 80.6$

Смещенная дисперсия $\text{var}(X) = 241.74$

Несмещенная дисперсия $\text{Var}(X) = 254.463$

Стандартное отклонение на основе смещенной дисперсии $\text{stdev}(X) = 15.548$

Стандартное отклонение на основе несмещенной дисперсии $\text{Stdev}(X) = 15.952$

Коэффициент асимметрии $\text{kurt}(X) = -0.653$

Коэффициент эксцесса $\text{skew}(X) = -4.46 \times 10^{-4}$

Построение гистограммы

Количество интервалов $N := 8$

Автоматическое построение гистограммы

$H := \text{histogram}(N, X)$

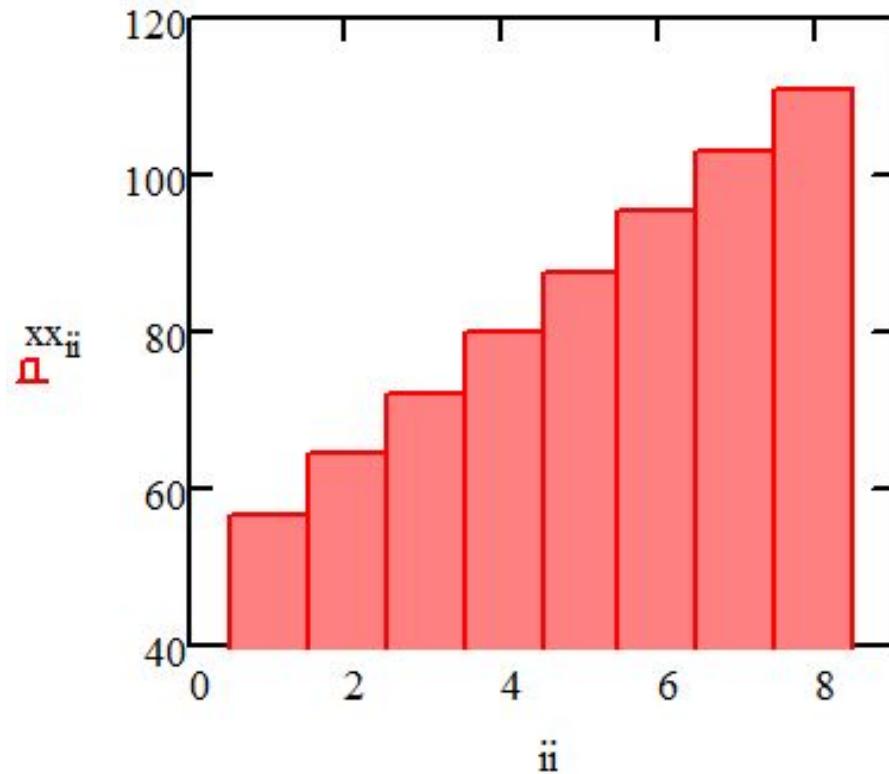
$H =$

56.562	2
63.687	2
70.813	3
77.938	3
85.063	4
92.188	2
99.313	2
106.438	2

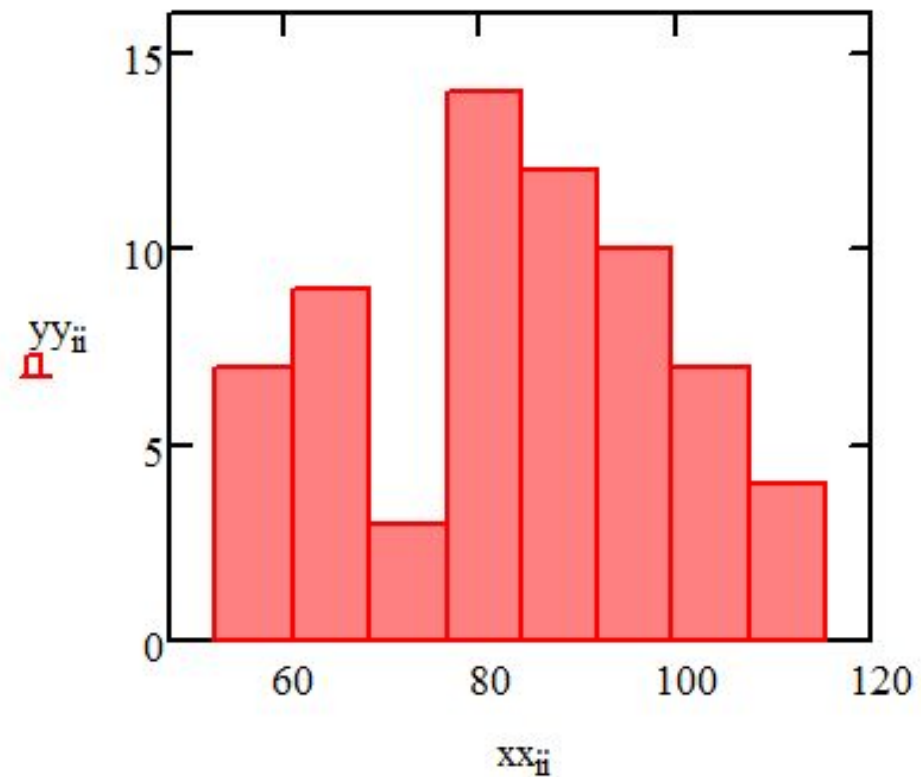
Построение гистограммы

$ii := 1 \dots N$ $xx := H^{(1)}$ $yy := H^{(2)}$

Интервалы гистограммы ii



Количество попаданий в интервалы



Построение гистограммы

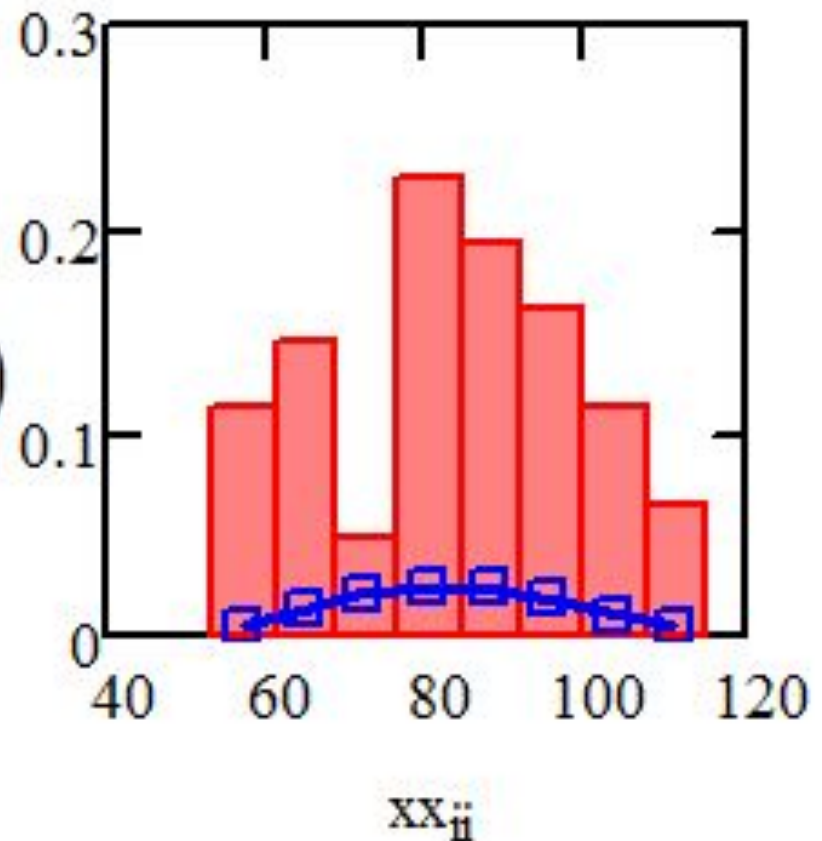
$$p := \frac{yy}{N \cdot (xx_2 - xx_1)}$$

нормированные высоты столбцов

P_{ii}

$\text{dnorm}(xx_{ii}, \text{mean}(X), \text{stdev}(X))$

$\square\square\square$



Гипотеза о нормальном распределении

Выдвигается гипотеза о том, что теоретический закон распределения случайной величины имеет вид нормального распределения. Воспользуемся критерием Пирсена для того, чтобы проверить это.

Значения средин интервалов:

$$x := H^{(1)}$$

Значения функции распределения:

$$\phi_{ii} := \frac{1}{\text{stdev}(X) \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x_{ii} - \text{mean}(X))^2}{\text{stdev}(X)^2 \cdot 2}}$$

Шаг между серединами интервалов:

$$h_{21} := x_2 - x_1 = 7.75 \qquad h_{32} := x_3 - x_2 = 7.75$$

$$h := h_{21} = 7.75$$

Гипотеза о нормальном распределении

Значения теоретических частот:

$$n0_{ii} := \text{last}(X) \cdot h \cdot \phi_{ii}$$

Значения фактических частот:

$$n := H^{\langle 2 \rangle}$$

Вычисление слагаемых для критерия χ^2 :

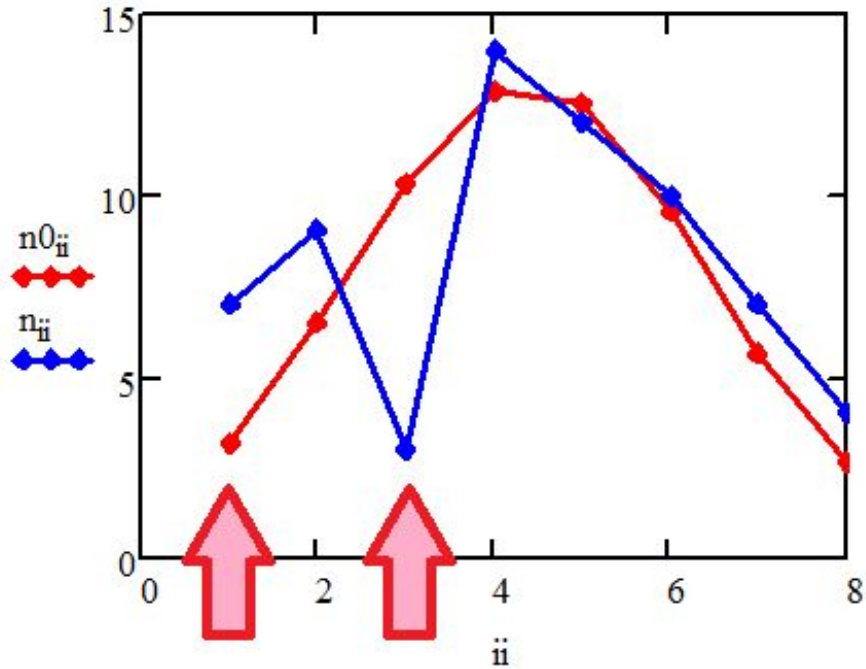
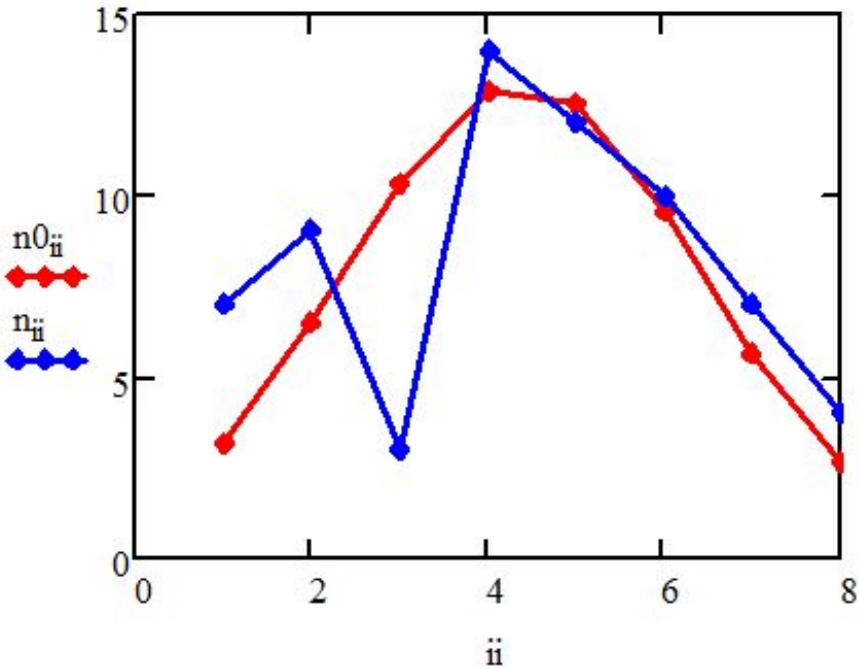
$$\chi_{ii} := \frac{(n_{ii} - n0_{ii})^2}{n0_{ii}}$$

Гипотеза о нормальном распределении

Вывод результатов:

$x_{ii} =$	$\phi_{ii} =$	$n0_{ii} =$	$n_{ii} =$	$\chi_{ii} =$
56.875	$6.131 \cdot 10^{-3}$	3.136	7	4.762
64.625	0.013	6.443	9	1.015
72.375	0.02	10.32	3	5.192
80.125	0.025	12.888	14	0.096
87.875	0.025	12.548	12	0.024
95.625	0.019	9.524	10	0.024
103.375	0.011	5.636	7	0.33
111.125	$5.083 \cdot 10^{-3}$	2.6	4	0.754





Расчет критерия χ^2 :

$$\chi^2_n := \sum_{k=1}^N \chi_k = 12.197$$

Табличное значение χ^2 для количества степеней свободы $K = 8 - 1 = 7$ и для уровня значимости $\alpha = 0.05$:

$$\chi^2_t := 14.1$$

Поскольку $\chi^2_n = 12.2$ меньше, чем χ^2_t , то нулевая гипотеза о нормальном распределении принимается для данного уровня значимости.

Построение доверительного интервала для математического ожидания генеральной совокупности

Критерий Стюдента для количества степеней свободы $K = 7$ и вероятности ошибки $\alpha = 0.05$:

$$t := 2.37$$

Максимальное отклонение от среднего в доверительном интервале:

$$\varepsilon := \frac{t \cdot \text{stdev}(X)}{\sqrt{N}} = 13.015$$

Границы доверительного коридора:

$$(\text{mean}(X) - \varepsilon \quad \text{mean}(X) + \varepsilon) = (70.152 \quad 96.182)$$

С вероятностью 0.95 можно утверждать, что среднее значение при выборке большего объема не выйдет за пределы интервала (70.152 96.182).