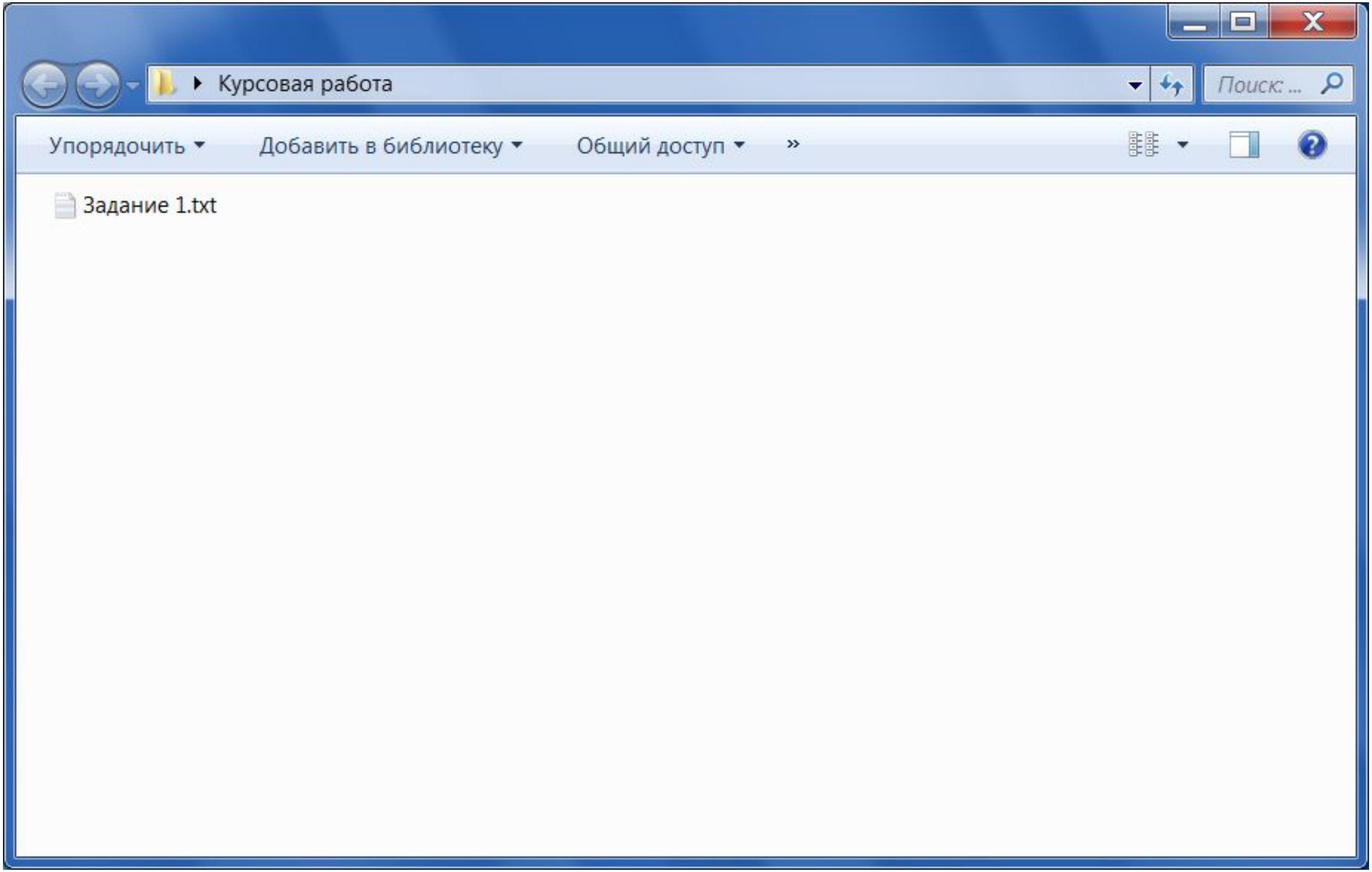
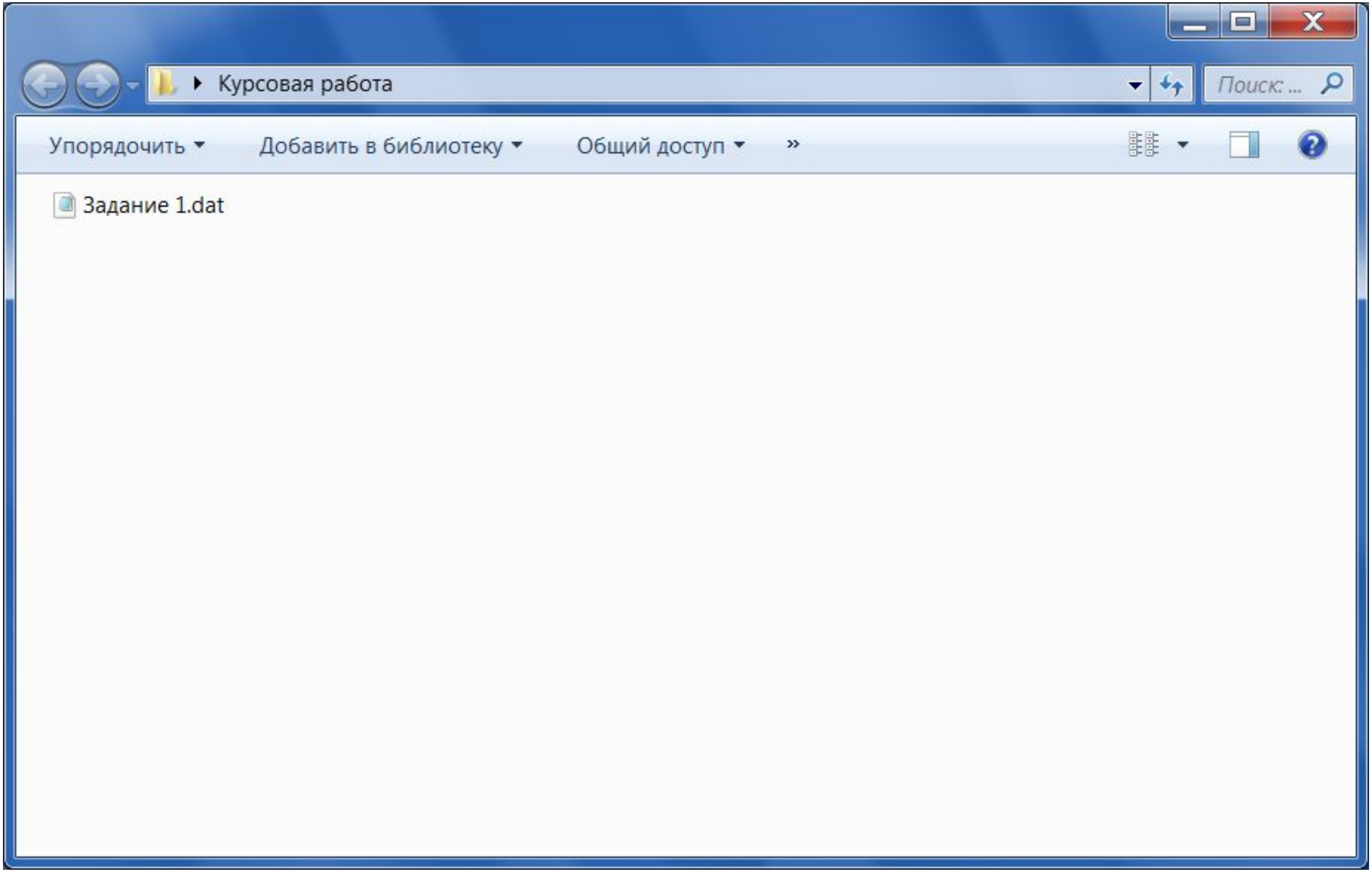
Тема 7
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПИСАТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИКИ В MATHCAD

Доцент кафедры ТАМ, к.т.н. Шипулин Леонид Викторович

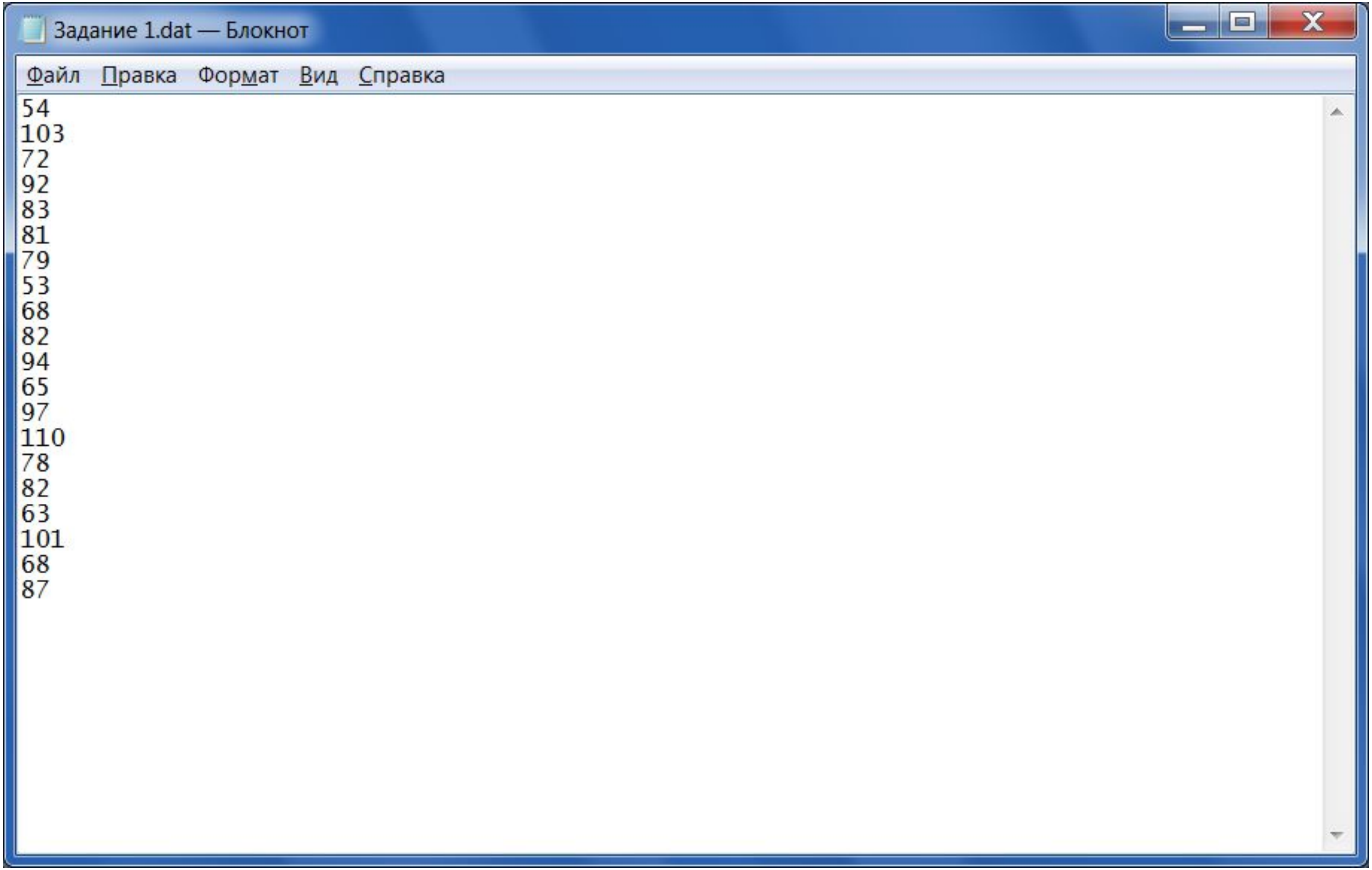
Ввод исходных данных для расчета



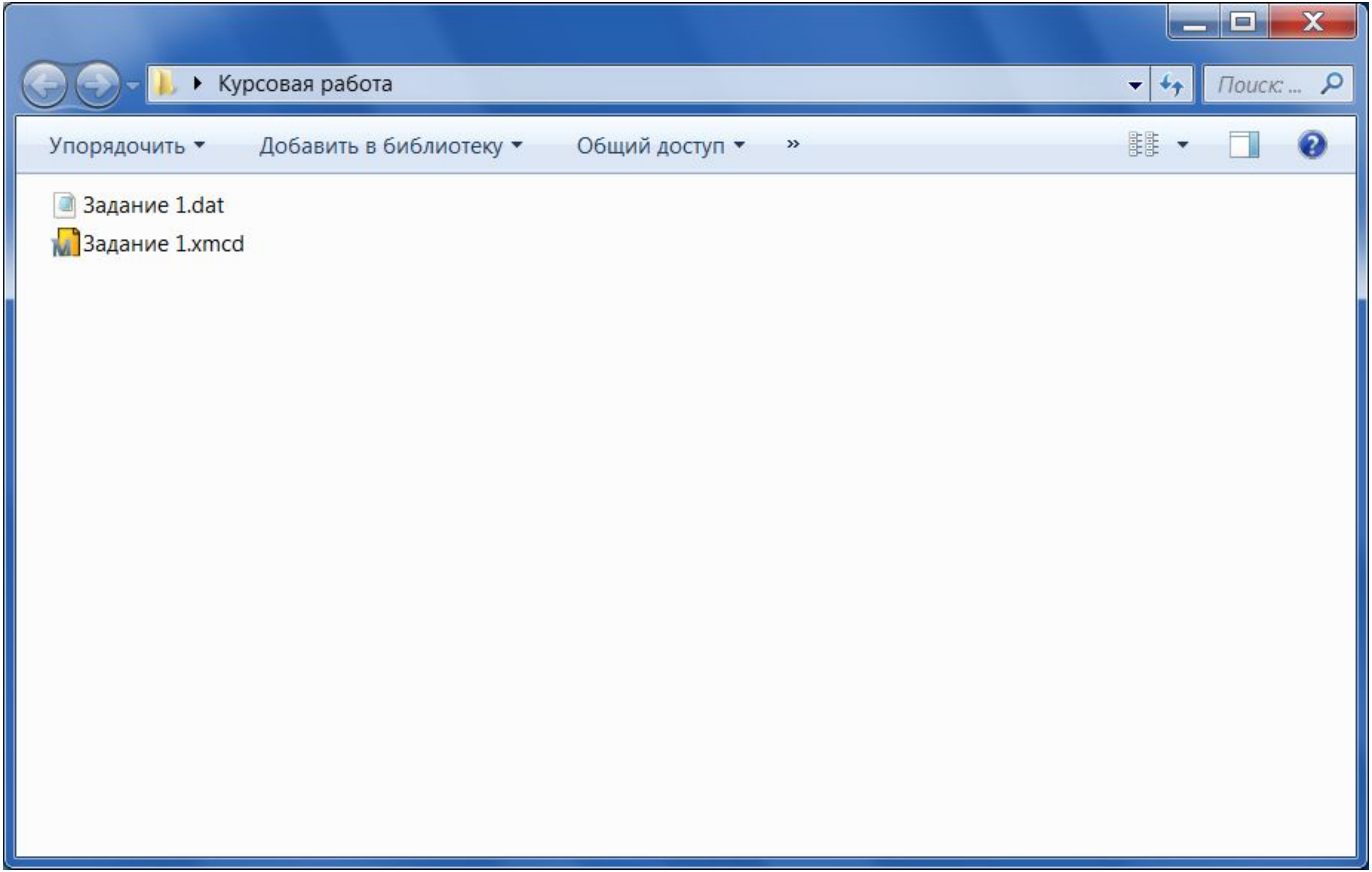
Ввод исходных данных для расчета



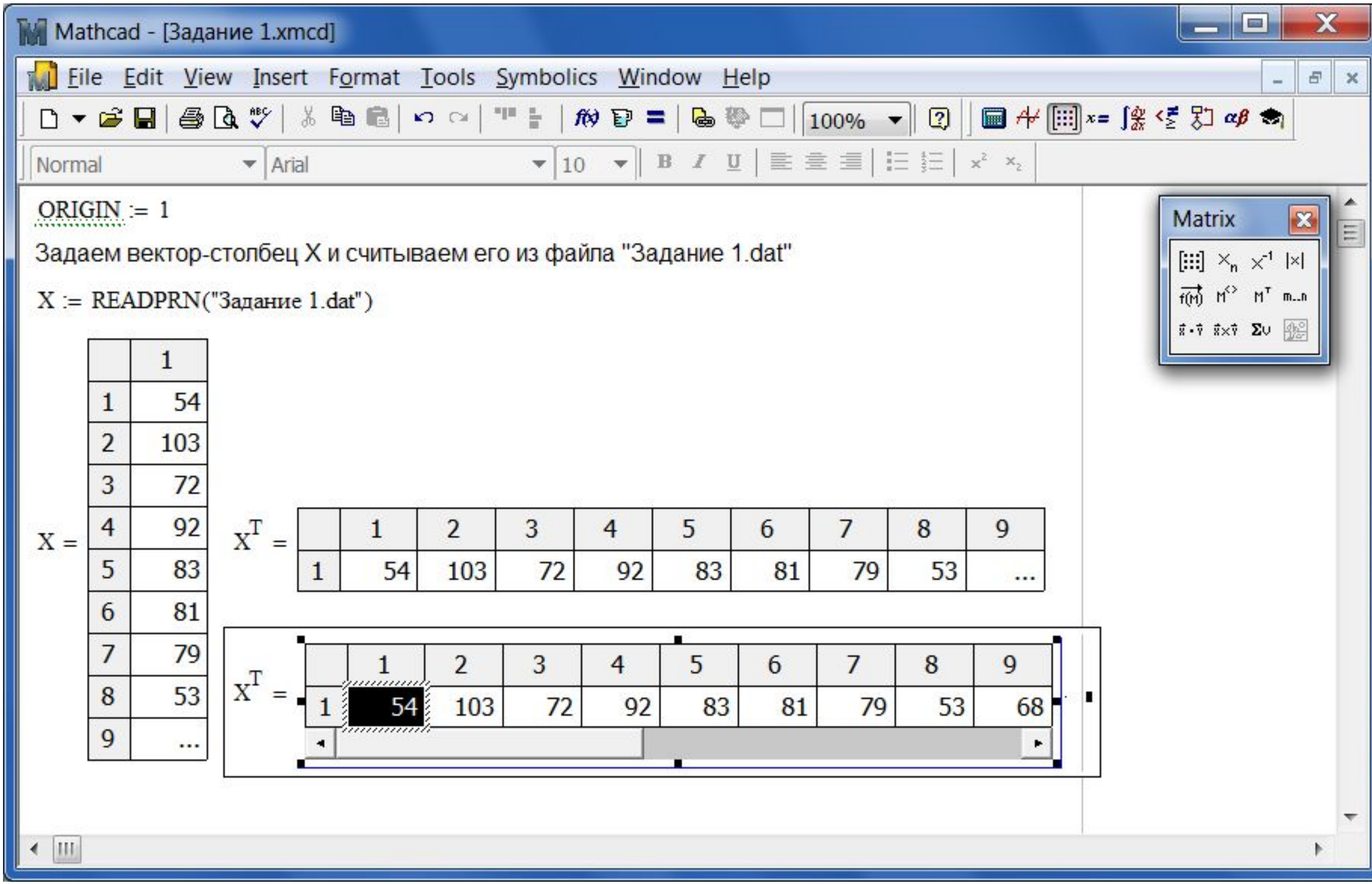
Ввод исходных данных для расчета



Ввод исходных данных для расчета



Считывание данных в вектор



Среднее арифметическое. Среднеквадратичное отклонение выборки

Mathcad - [Задание 1.xmcd]

X := READPRN("Задание 1.dat")

X =

	1
1	54
2	103
3	72
4	92
5	83
6	81
7	79
8	53
9	...

X^T =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54	103	72	92	83	81	79	53	...

X^T =

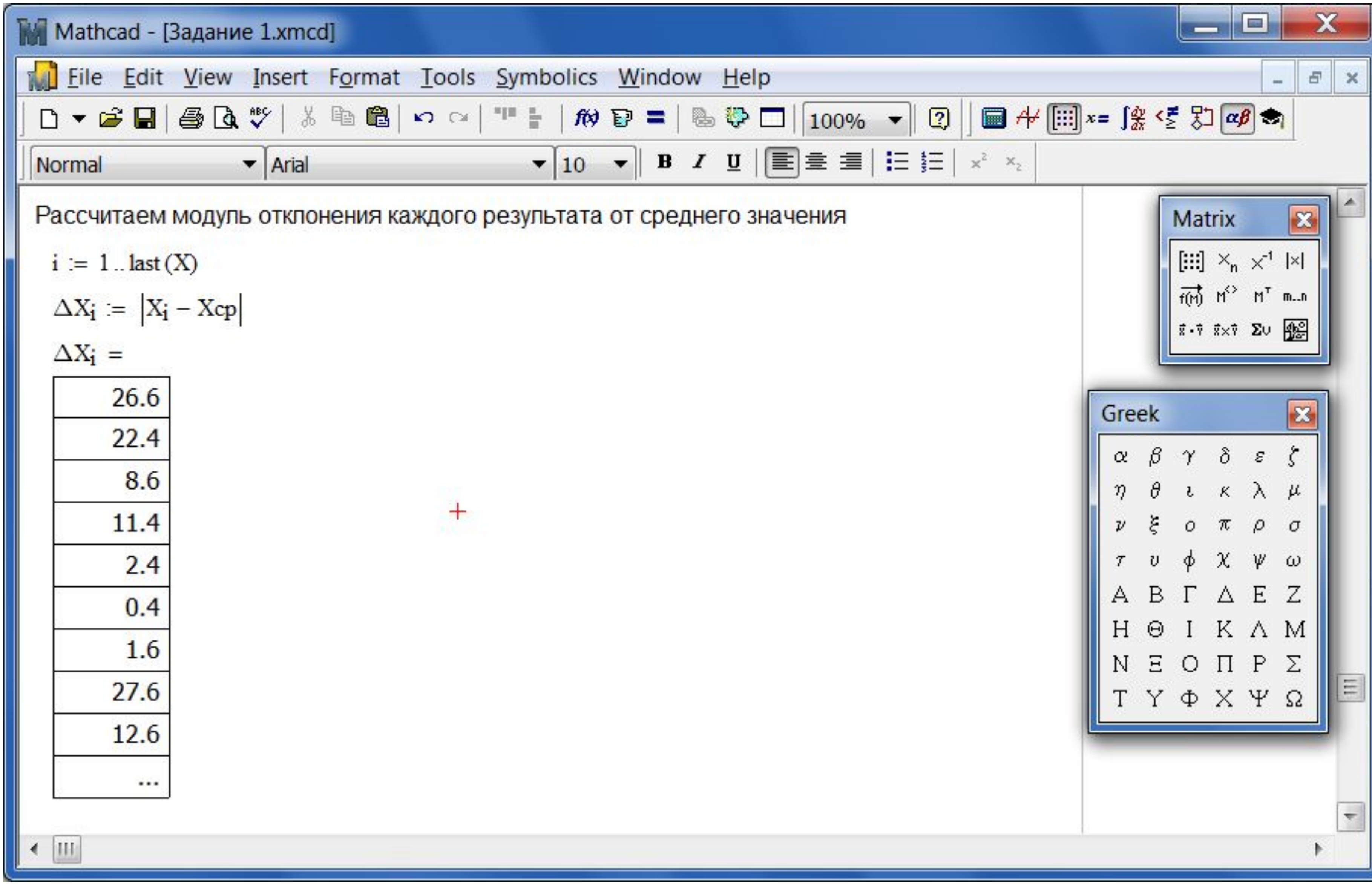
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	54	103	72	92	83	81	79	53	...

Рассчитаем среднее арифметическое и среднеквадратичное отклонение выборки

Xcp := mean(X)   S := Stdev(X)

Xcp = 80.6   S = 15.952

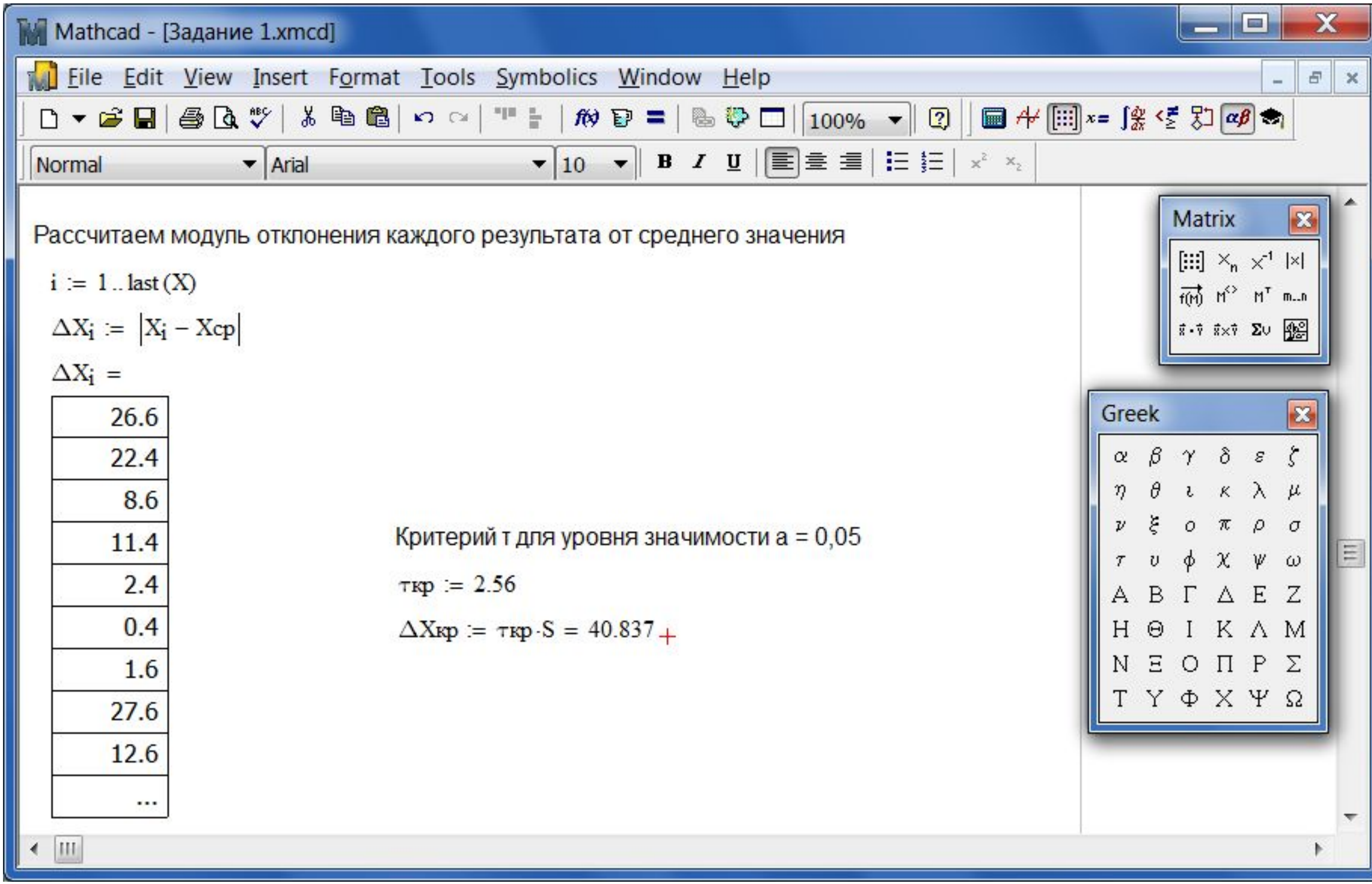
Отклонение результатов от среднего значения



Выбор значения τ-критерия (для α=0,05)

Количество испытаний n	$\tau_{крит}$	Количество испытаний n	$\tau_{крит}$	Количество испытаний n	$\tau_{крит}$
3	1.15	11	2.23	19	2.53
4	1.46	12	2.29	20	2.56
5	1.67	13	2.33	21	2.58
6	1.82	14	2.37	22	2.60
7	1.94	15	2.41	23	2.62
8	2.03	16	2.44	24	2.64
9	2.11	17	2.48	25	2.66
10	2.18	18	2.50		

τ-критерий и критическое отклонение величины



Проверка на критическое отклонение случайной величины от среднеарифметического

Просматриваем вектор ΔX_i. Если некоторое значение превышает критическое значение $\Delta X_{кр}$, то это значение из первоначально заданной выборки следует выкинуть (в текстовом файле .dat) и пересчитать все заново, сменив значение τ-критерия для уровня значимости α = 0,05.

В выборке, приведенной в примере, каждое значение вектора ΔX_i меньше, чем критическое $\Delta X_{кр}$. Поэтому никакие значения выкидывать не будем. Иными словами, **резко выделяющиеся значения** отсутствуют.

Можно приступать к дальнейшему исследованию выборки.

ΔX_i =

26.6
22.4
8.6
11.4
2.4
0.4
1.6
27.6
12.6
1.4
13.4
15.6
16.4
29.4
2.6
1.4
17.6
20.4
12.6
6.4

Параметры выборки

Выборочное среднее значение	$\mathrm{mean}(X) = 80.6$
Смещенная дисперсия	$\mathrm{var}(X) = 241.74$
Несмещенная дисперсия	$\mathrm{Var}(X) = 254.463$
Стандартное отклонение на основе смещенной дисперсии	$\mathrm{stdev}(X) = 15.548$
Стандартное отклонение на основе несмещенной дисперсии	$\mathrm{Stdev}(X) = 15.952$
Коэффициент асимметрии	$\mathrm{kurt}(X) = -0.653$
Коэффициент эксцесса	$\mathrm{skew}(X) = -4.46 \times 10^{-4}$

Построение гистограммы

Количество интервалов $N := 8$

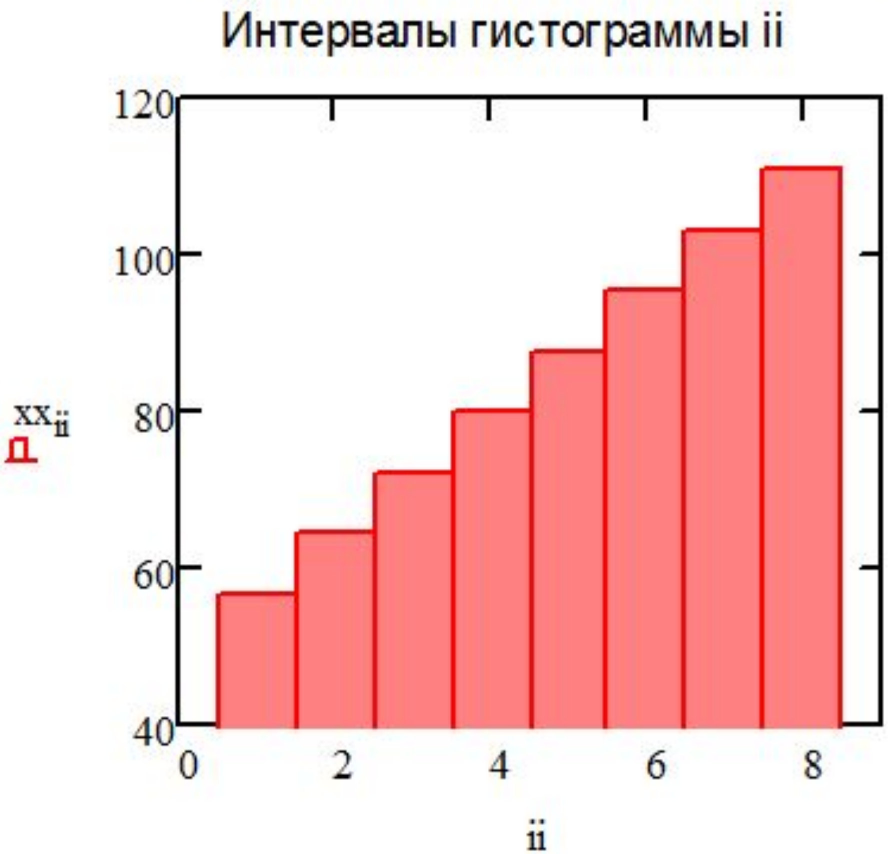
Автоматическое построение гистограммы

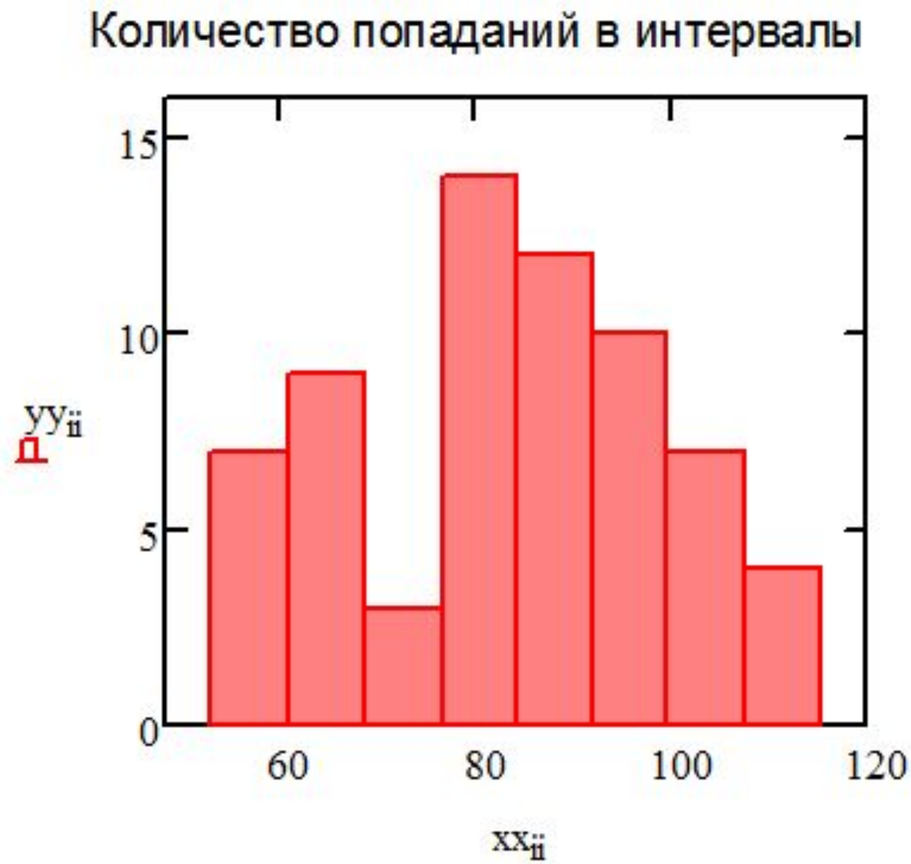
$$H := \mathrm{histogram}(N, X)$$

$$H = \begin{pmatrix} 56.562 & 2 \\ 63.687 & 2 \\ 70.813 & 3 \\ 77.938 & 3 \\ 85.063 & 4 \\ 92.188 & 2 \\ 99.313 & 2 \\ 106.438 & 2 \end{pmatrix}$$

Построение гистограммы

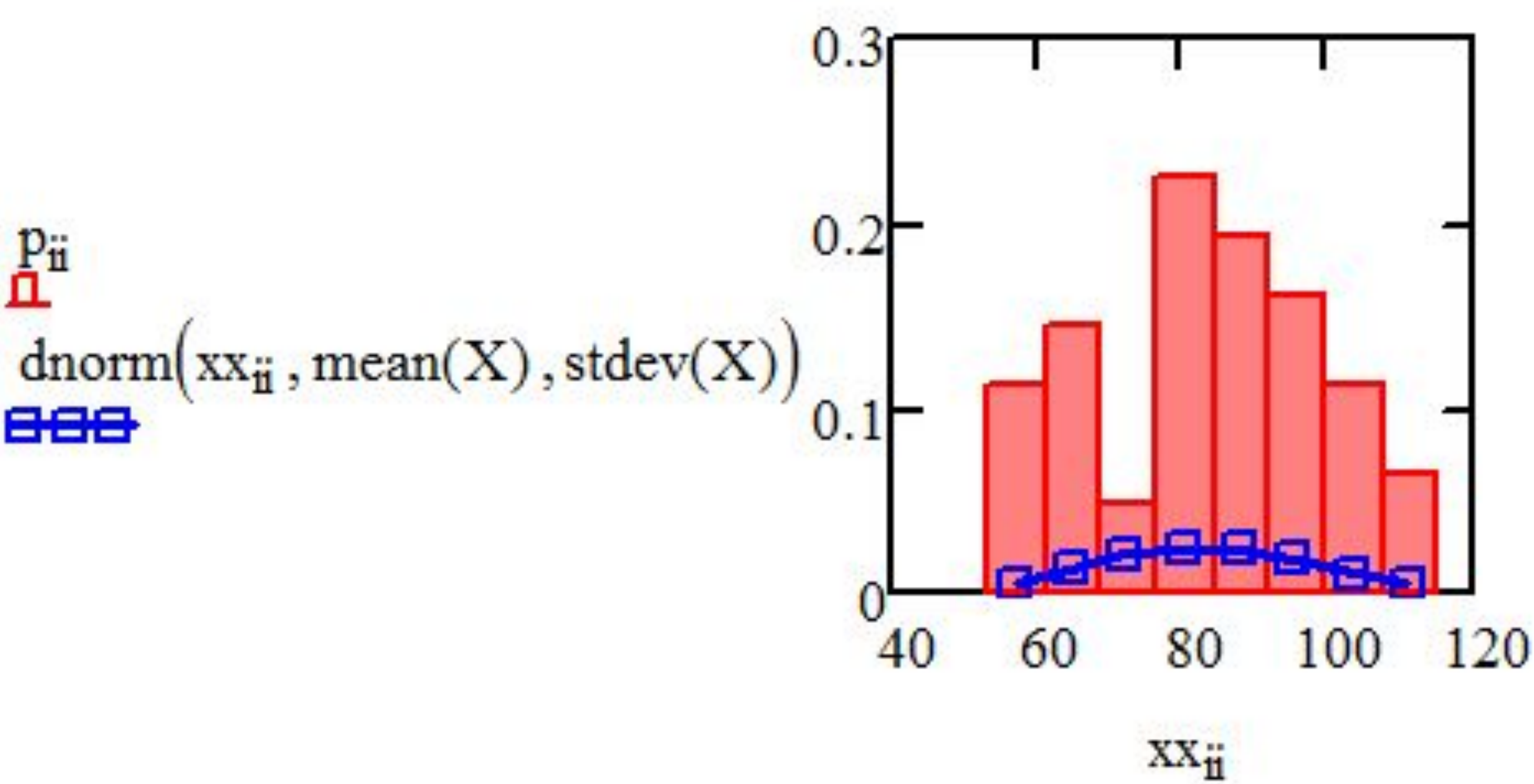
$ii := 1..N \qquad xx := H^{\langle 1 \rangle} \qquad yy := H^{\langle 2 \rangle}$





Построение гистограммы

$$p := \frac{yy}{N \cdot (xx_2 - xx_1)}$$ нормированные высоты столбцов



Гипотеза о нормальном распределении

Выдвигается гипотеза о том, что теоретический закон распределения случайной величины имеет вид нормального распределения. Воспользуемся критерием Пирсена для того, чтобы проверить это.

Значения середин интервалов:

$$x := H^{\langle 1 \rangle}$$

Значения функции распределения:

$$\phi_{ii} := \frac{1}{\mathrm{stdev}(X)\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-\left(x_{ii}-\mathrm{mean}(X)\right)^2}{\mathrm{stdev}(X)^2\cdot 2}}$$

Шаг между серединами интервалов:

$$h21 := x_2 - x_1 = 7.75 \qquad h32 := x_3 - x_2 = 7.75$$

$$h := h21 = 7.75$$

Гипотеза о нормальном распределении

Значения теоретических частот:

$$n0_{ii} := \mathrm{last}(X) \cdot h \cdot \phi_{ii}$$

Значения фактических частот:

$$n := H^{\langle 2 \rangle}$$

Вычисление слагаемых для критерия χ^2:

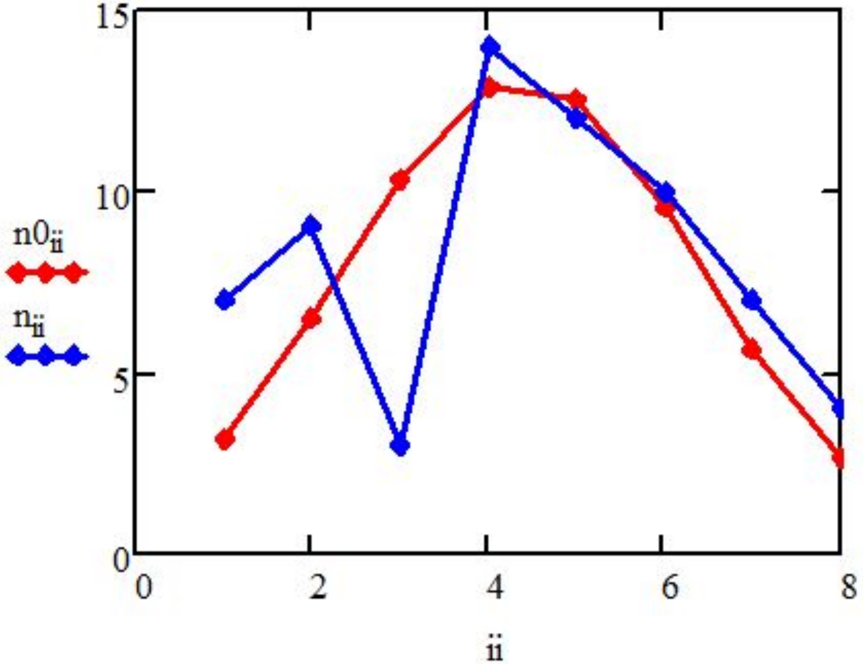
$$\chi_{ii} := \frac{\left(n_{ii} - n0_{ii}\right)^2}{n0_{ii}}$$

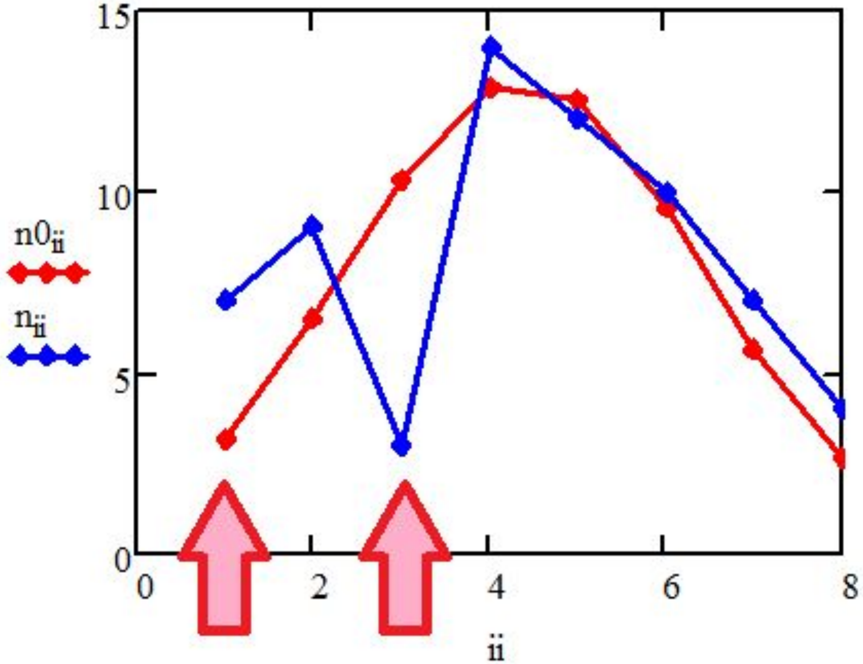
Гипотеза о нормальном распределении

Вывод результатов:

$x_{ii} =$	$\phi_{ii} =$	$n0_{ii} =$	$n_{ii} =$	$\chi_{ii} =$
56.875	$6.131 \cdot 10^{-3}$	3.136	7	4.762
64.625	0.013	6.443	9	1.015
72.375	0.02	10.32	3	5.192
80.125	0.025	12.888	14	0.096
87.875	0.025	12.548	12	0.024
95.625	0.019	9.524	10	0.024
103.375	0.011	5.636	7	0.33
111.125	$5.083 \cdot 10^{-3}$	2.6	4	0.754

Гипотеза о нормальном распределении





Гипотеза о нормальном распределении

Расчет критерия χ^2:

$$\chi 2n := \sum_{k=1}^{N} \chi_k = 12.197$$

Табличное значение χ^2 для количества степеней свободы К = 8 - 1 = 7 и для уровня значимости $\alpha = 0.05$:

$$\chi 2t := 14.1$$

Поскольку $\chi^2 n = 12.2$ меньше, чем $\chi^2 n$, то нулевая гипотеза о нормальном распределении принимается для данного уровня значимости.

Доверительный интервал генеральной выборки

Построение доверительного интервала для математического ожидания генеральной совокупности

Критерий Стьюдента для количества степеней свободы К = 7 и вероятности ошибки $\alpha = 0.05$:

$$t := 2.37$$

Максимальное отклонение от среднего в доверительном интервале:

$$\varepsilon := \frac{t \cdot \mathrm{stdev}(X)}{\sqrt{N}} = 13.015$$

Границы доверительного коридора:

$$\left(\mathrm{mean}(X) - \varepsilon \quad \mathrm{mean}(X) + \varepsilon \right) = \left(70.152 \quad 96.182 \right)$$

С вероятностью 0.95 можно утверждать, что среднее значение при выборке большего объема не выйдет за пределы интервала (70.152   96.182).