Планы второго порядка

Для оценки (расчета) коэффициентов в уравнении регрессии, содержащих квадратичные эффекты, независимая переменная в плане должна принимать, по крайней мере, три различных значения, то есть должна изменяться как минимум на трех уровнях. Напомним, что при постановке планов ПФЭ факторы варьировали только на двух уровнях.

Планы второго порядка реализуются в двух случаях:

1) Если в результате ПФЭ были получены неадекватные (недостоверно описывающие технологический процесс) уравнения.

2) Если заведомо известно, что в выбранной области определения факторов технологический процесс не может быть описан линейными уравнениями.

Рассмотри наиболее часто употребляемые планы второго порядка.

Они отличаются:

– ***количеством опытов***;

– ***расположением точек в факторном пространстве***.

Чем больше точек в плане эксперименте, тем информативнее результаты и точнее уравнения регрессии, которые описывают объект исследований, но при этом существенно увеличивается объем экспериментальной работы.

Планы Бокса-Хантера (ВН)

Планы Бокса-Хантера (ВН) включают:

– вершины гиперкуба;

– точки в центре области планирования;

– ***«звездные точки»*** – точки на осях факторов на расстоянии α от цента области планирования.

Число звездных точек определяется как $2 \cdot k$. Величина ***звездного плеча α*** определяется как $\alpha = 2^{k/4}$, где k –количество факторов.

Опыты в центре плана n_0 повторяются многократно, т.к. при составлении плана, в том числе при выборе значений нулевых уровней (середин области определения факторов) предполагается, что эти нулевые уровни приблизительно соответствуют ***оптимальному сочетанию значений факторов***.

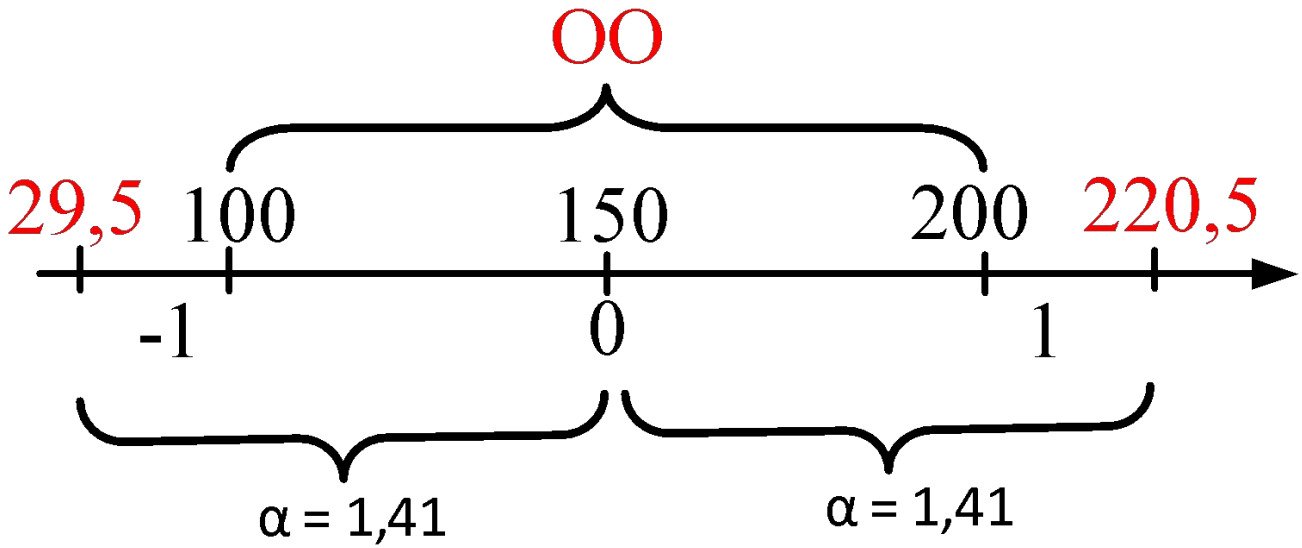
Исходные данные для составления планов экспериментов Бокса-Хантера

Число факторов	Точки ПФЭ	Число «звездных точек»	Число нулевых точек n_0	Величина звездного плеча α	Общее число опытов
2	4	4	5	1,41	**13**
3	8	6	6	1,68	**20**
4	16	8	7	2,0	**31**
5	32	10	10	2,38	**52**

Величина звездного плеча приведена в *кодированном* выражении фактора.

При расчете ***величины «звездного плеча»*** необходимо интервал варьирования (ИВ) фактора в натуральном выражении умножить на величину ***«звездного плеча»*** в кодированном выражении.

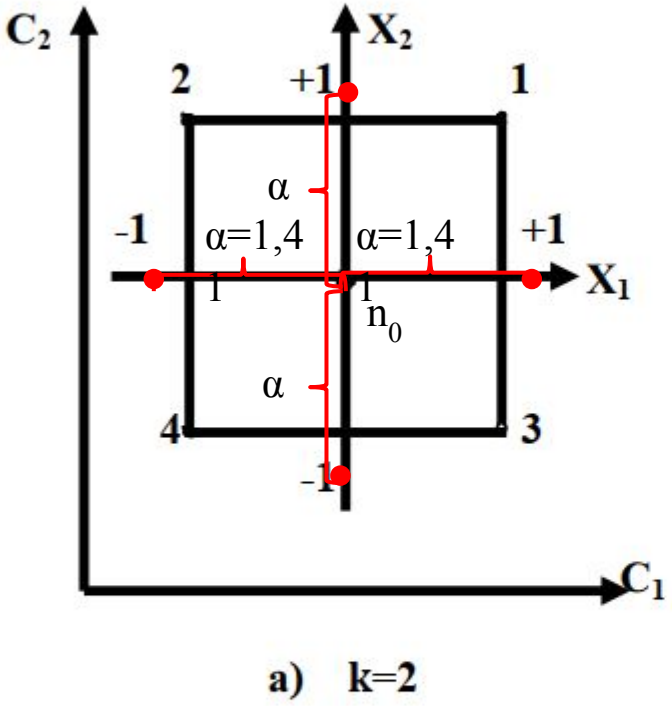
Пример: температура изменяется от 100 до 200ºС (область определения) с шагом 50ºС (интервал варьирования), величина «звездного плеча» α будет равна



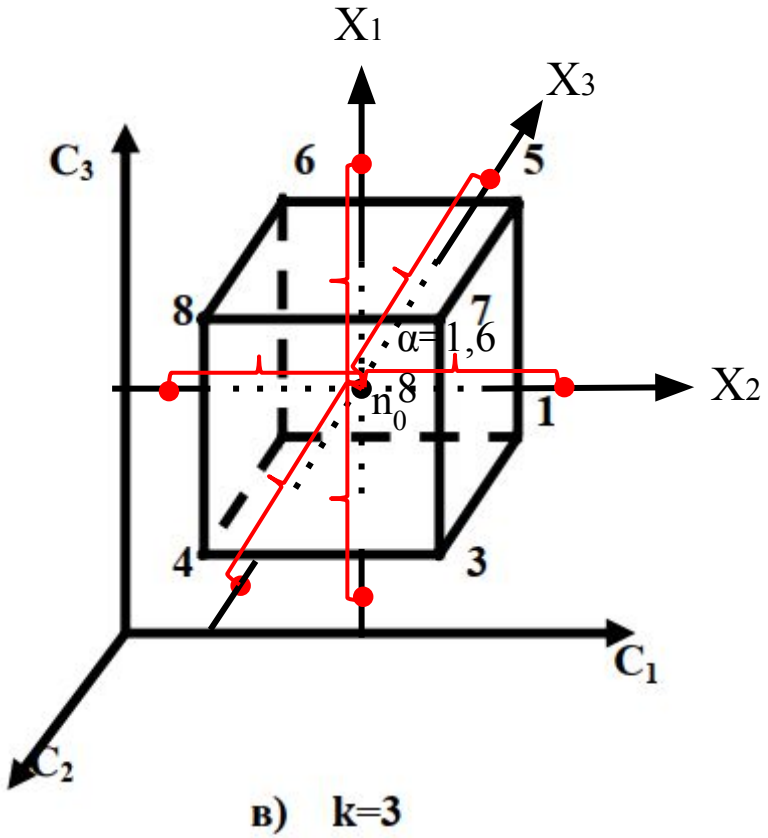
$$\alpha = 1{,}41 \cdot 50 = 70{,}5^{\circ}C$$

Для всех планов ***второго порядка*** целесообразно в соответствии с определением плана расположить точки в факторном пространстве, а затем последовательно вписать координаты точек в матрицу плана эксперимента.

Расположение точек в факторном пространстве для плана Бокса-Хантера (ВН)



а) k=2



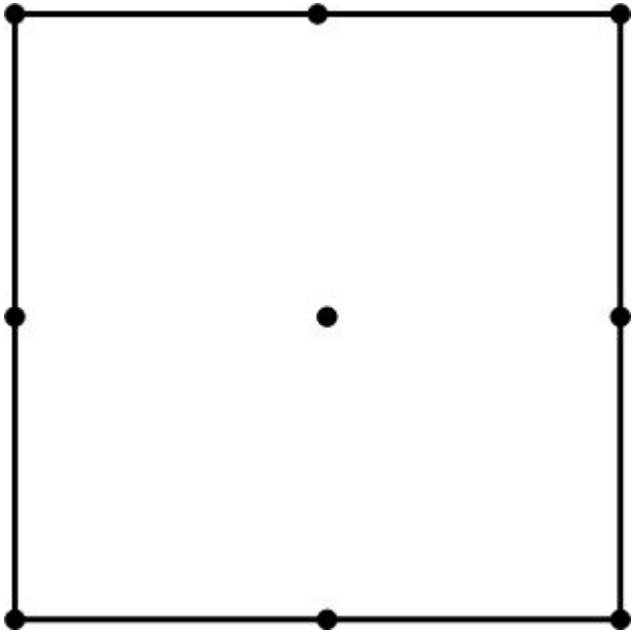
в) k=3

● – звездные точки

При использовании плана Бокса-Хантера необходимо следить за ***совместимостью*** факторов, т. к. звездные точки расширяют область определения факторов, и в некоторых точках продукция может быть просто не произведена (см. требование к факторам по совместимости).

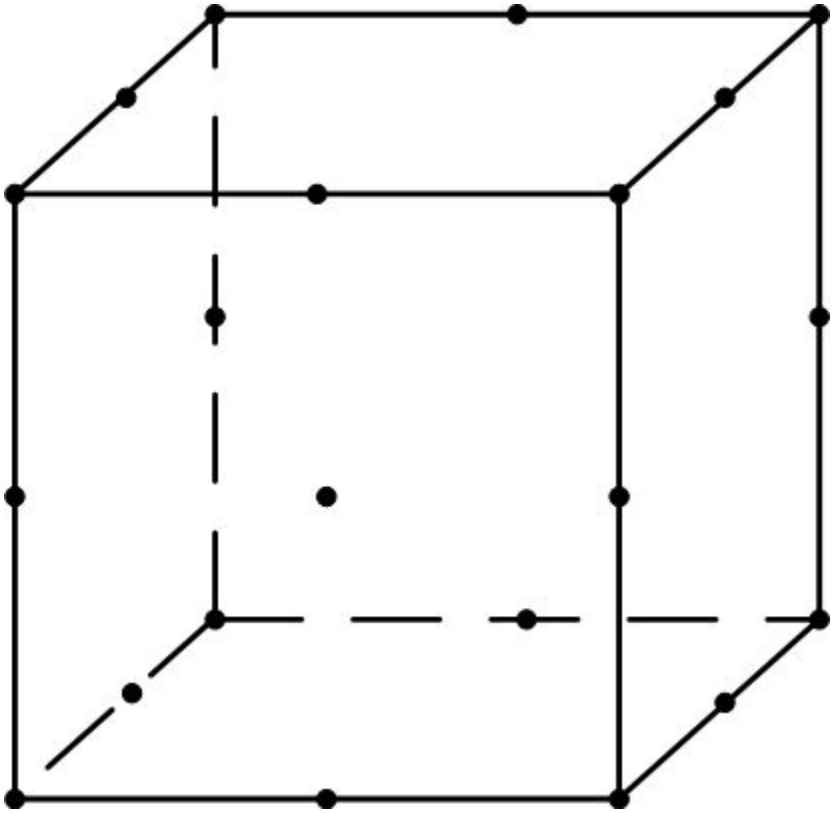
Расположение точек в факторном пространстве для плана Коно (Ко)

План Коно включает вершины гиперкуба, середины ребер и центр области планирования.



k=2

9 опытов

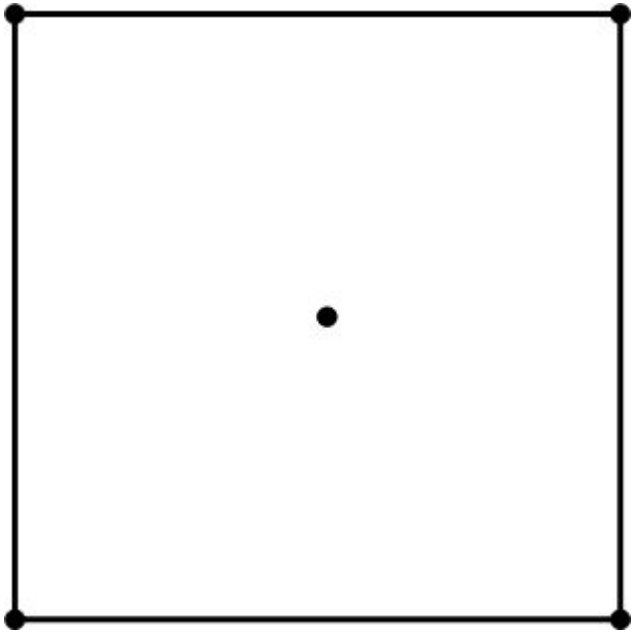


k=3

21 опыт

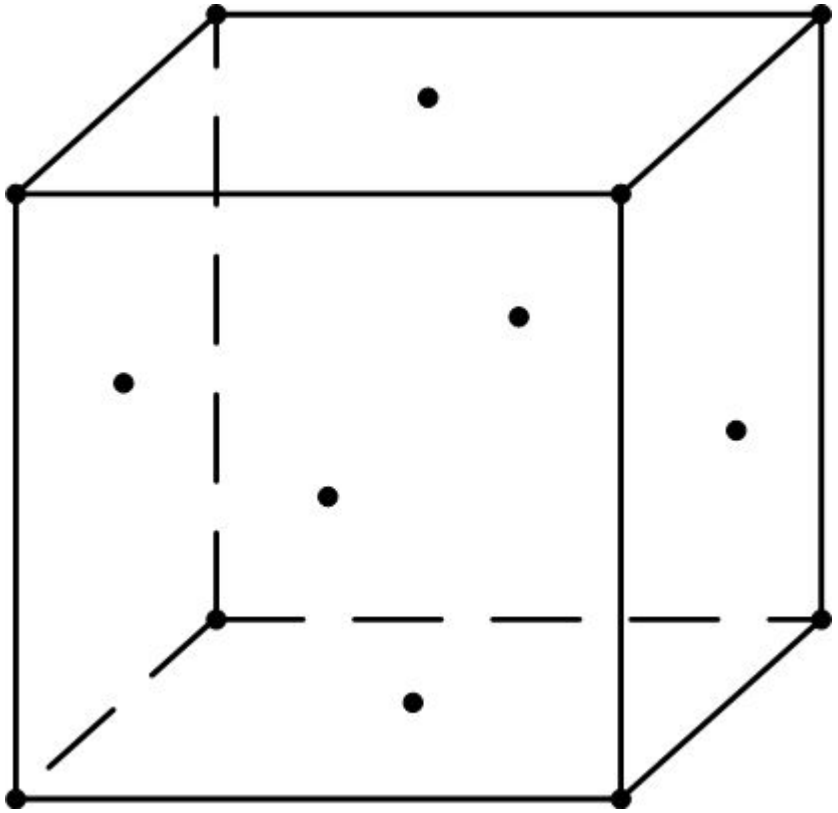
Расположение точек в факторном пространстве для плана Бокса (BK)

План Бокса включает вершины и середины двумерных граней гиперкуба.



k=2

5 опытов

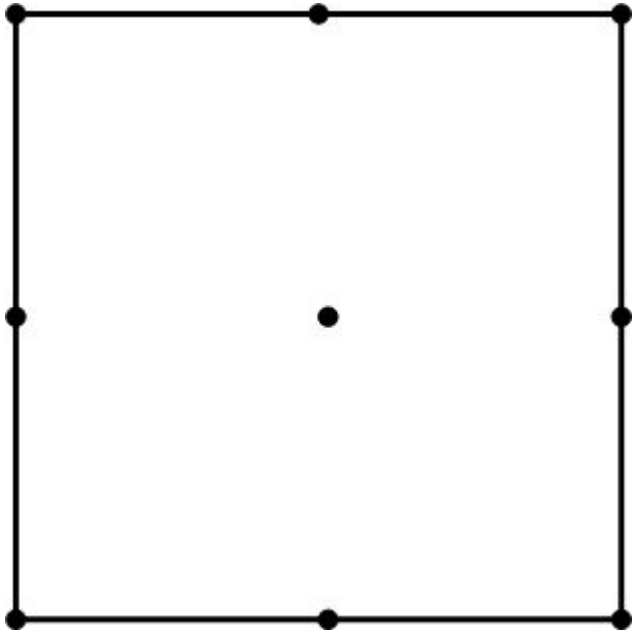


k=3

14 опытов

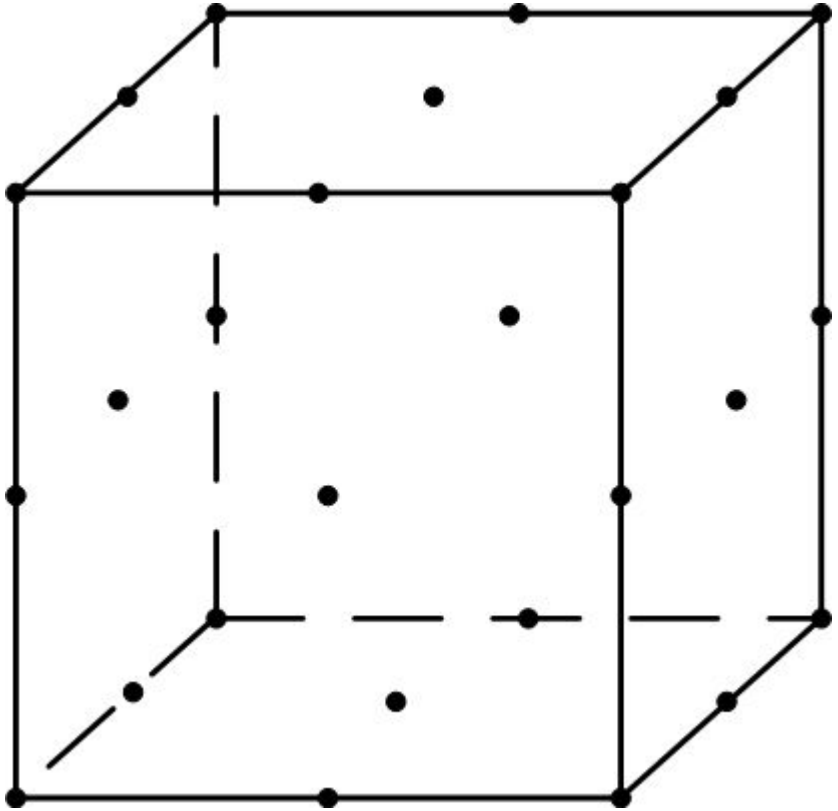
Расположение точек в факторном пространстве для плана Кифера (Ki)

План Кифера включает вершины гиперкуба, середины ребер и центры двумерных граней.



k=2

9 опытов



k=3

26 опытов

Сопоставительный анализ планов

Наименование плана	Обозначение	Количество опытов		Расположение точек
		2 фактора	3 фактора	
Полный факторный эксперимент	ПФЭ	4	8	В
Бокса-Хантера	ВН	13	20	В, Ц, З
Коно	Ко	9	21	В, Р, Ц
Бокса	ВК	5	14	В, Г
Кифера	Кi	9	26	В, Р, Г

В – вершины гиперкуба; Р – середины ребер;

Ц – центр области планирования; Г – середины двумерных

З – звездные точки; граней.

1) ***Полный факторный эксперимент (ПФЭ)*** применяется в тех случаях, где можно предположить с высокой степенью вероятности, что в исследуемой области, т.е. в области определения каждого фактора, все исследуемые показатели качества *линейно* зависят от факторов.

2) ***Планы Бокса-Хантера*** применяются в следующих случаях:

− если в результате ПФЭ были получены неадекватные (недостоверно описывающие технологический процесс) уравнения.

− если необходимо охватить достаточно широкую область факторного пространства, т.к. только в этих планах есть звездные точки. Но всегда следует оценивать в этих планах реализуемость сочетаний факторов в звездных точках, т.е. чтобы получение продукции вообще было возможным.

3) ***Планы Коно*** достаточно информативны и вместе с тем включают небольшое количество опытов, поэтому являются компромиссными с точки зрения затрат и информативности.

4) ***Планы Бокса*** наиболее экономичны среди планов 2-го порядка. Эти планы следует применять в тех случаях, когда экспериментальная работа очень трудоемка, требует много материальных и временных затрат.

5) ***Планы Кифера*** наиболее информативны, т.е. обеспечивают наиболее достоверную информацию об объекте исследования, но при этом наиболее трудоемкие.

При выборе вида плана 2-го порядка следует иметь в виду, что увеличение количества опытов всегда повышает информативность эксперимента, повышает точность математического описания объекта, ***НО*** одновременно увеличивается и объем экспериментальной работы. В соответствии с этими двумя критериями и выбирается план эксперимента.