

## *Планы второго порядка*

Для оценки (расчета) коэффициентов в уравнении регрессии, содержащих квадратичные эффекты, независимая переменная в плане должна принимать, по крайней мере, три различных значения, то есть должна изменяться как минимум на трех уровнях. Напомним, что при постановке планов ПФЭ факторы варьировали только на двух уровнях.

*Планы второго порядка реализуются в двух случаях:*

1) Если в результате ПФЭ были получены неадекватные (недостаточно описывающие технологический процесс) уравнения.

2) Если заведомо известно, что в выбранной области определения факторов технологический процесс не может быть описан линейными уравнениями.

Рассмотри наиболее часто употребляемые планы второго порядка.

Они отличаются:

- *количеством опытов*;
- *расположением точек в факторном пространстве.*

Чем больше точек в плане эксперименте, тем информативнее результаты и точнее уравнения регрессии, которые описывают объект исследований, но при этом существенно увеличивается объем экспериментальной работы.

## ***Планы Бокса-Хантера (ВН)***

Планы Бокса-Хантера (ВН) включают:

- вершины гиперкуба;
- точки в центре области планирования;
- ***«звездные точки»*** – точки на осях факторов на расстоянии  $\alpha$  от центра области планирования.

Число звездных точек определяется как  $2 \cdot k$ .  
Величина ***звездного плеча  $\alpha$***  определяется как  $\alpha = 2^{k/4}$ ,  
где  $k$  – количество факторов.

Опыты в центре плана  $n_0$  повторяются многократно, т.к. при составлении плана, в том числе при выборе значений нулевых уровней (середин области определения факторов) предполагается, что эти нулевые уровни приблизительно соответствуют ***оптимальному сочетанию значений факторов.***

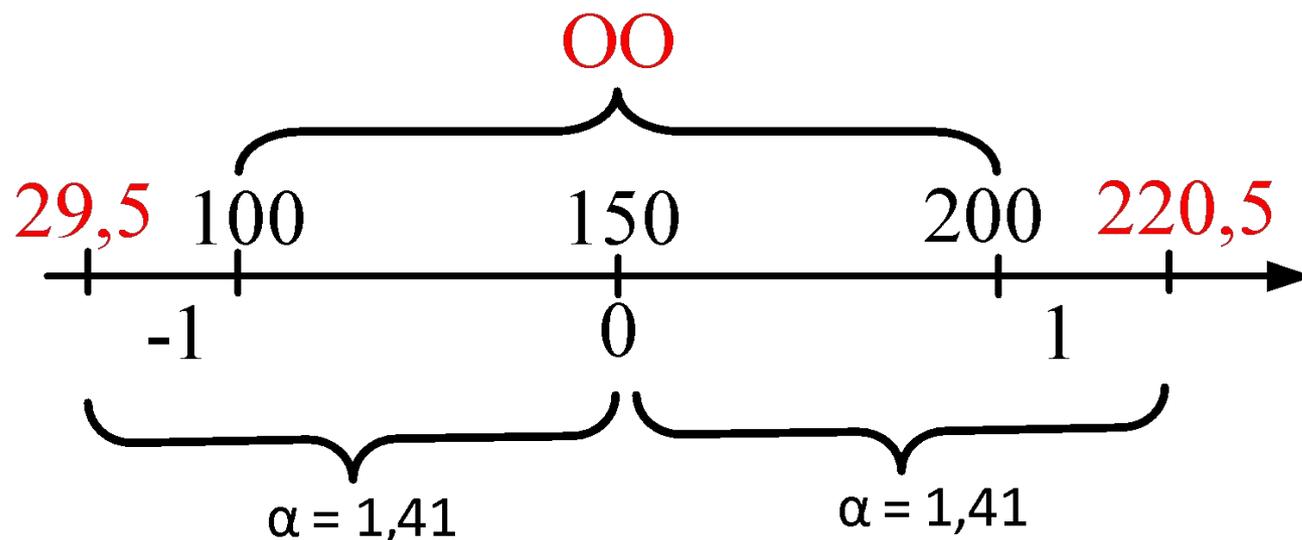
## *Исходные данные для составления планов экспериментов Бокса-Хантера*

Число факторов	Точки ПФЭ	Число «звездных точек»	Число нулевых точек $n_0$	Величина звездного плеча $\alpha$	Общее число опытов
2	4	4	5	1,41	13
3	8	6	6	1,68	20
4	16	8	7	2,0	31
5	32	10	10	2,38	52

Величина звездного плеча приведена в *кодированном* выражении фактора.

При расчете *величины «звездного плеча»* необходимо интервал варьирования (ИВ) фактора в натуральном выражении умножить на величину *«звездного плеча»* в кодированном выражении.

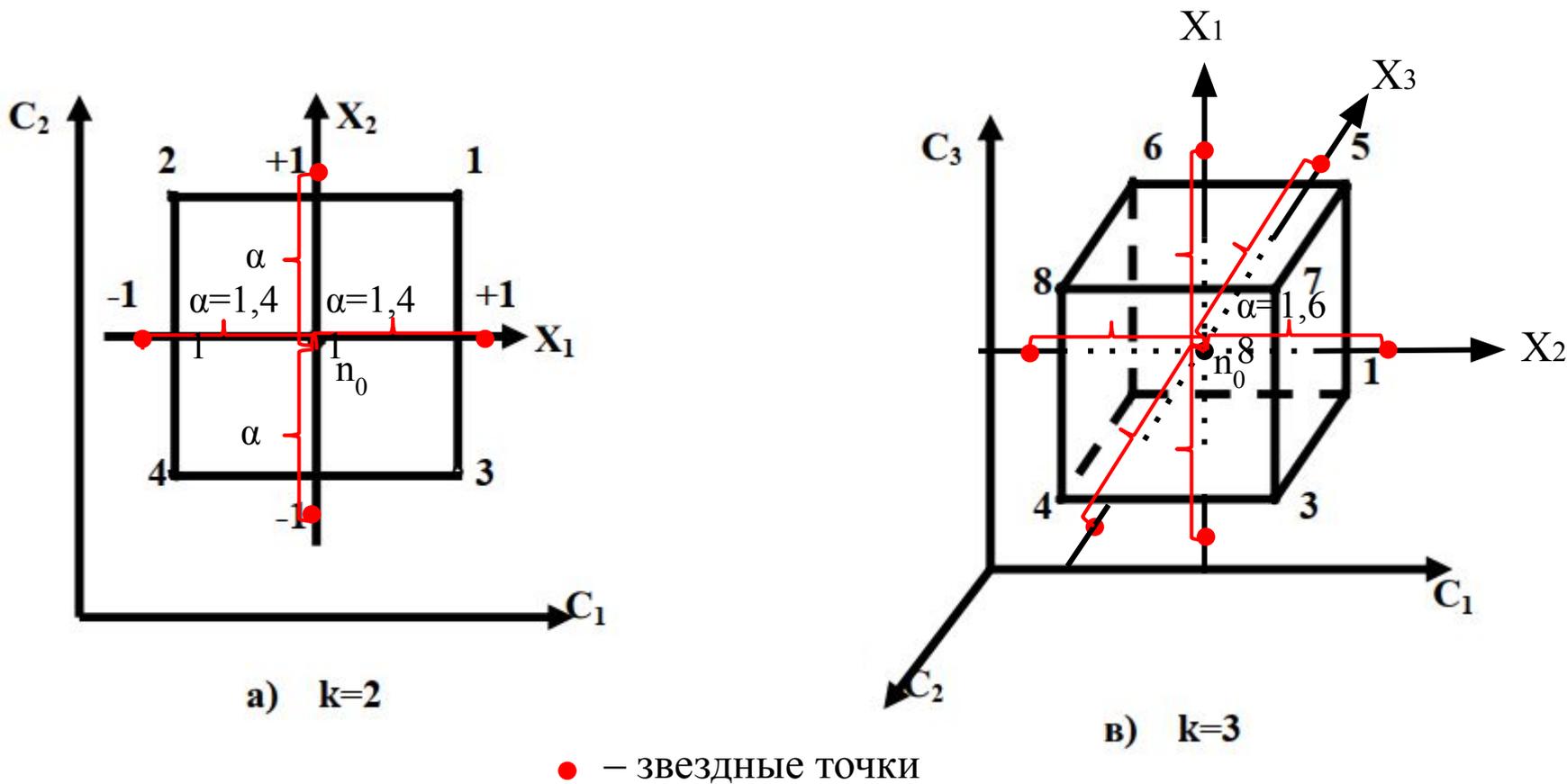
Пример: температура изменяется от 100 до 200°C (область определения) с шагом 50°C (интервал варьирования), величина *«звездного плеча»*  $\alpha$  будет равна



$$\alpha = 1,41 \cdot 50 = 70,5^\circ\text{C}$$

Для всех планов *второго порядка* целесообразно в соответствии с определением плана расположить точки в факторном пространстве, а затем последовательно вписать координаты точек в матрицу плана эксперимента.

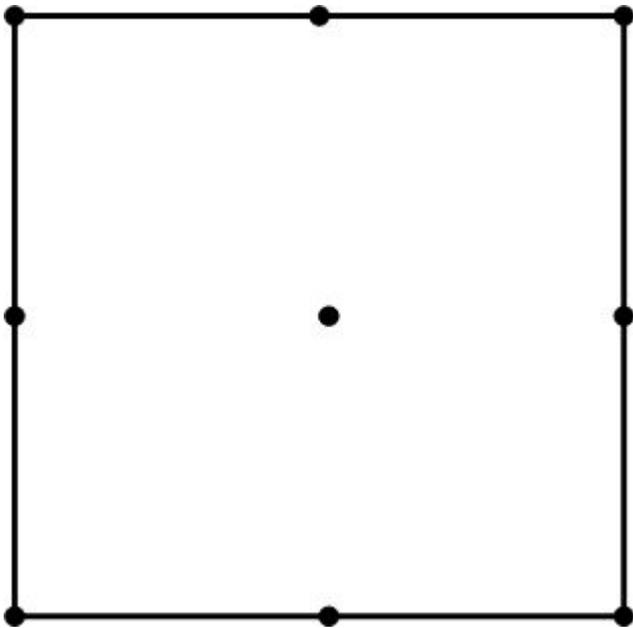
# Расположение точек в факторном пространстве для плана **Бокса-Хантера (ВН)**



При использовании плана Бокса-Хантера необходимо следить за *совместимостью* факторов, т. к. звездные точки расширяют область определения факторов, и в некоторых точках продукция может быть просто не произведена (см. требование к факторам по совместимости).

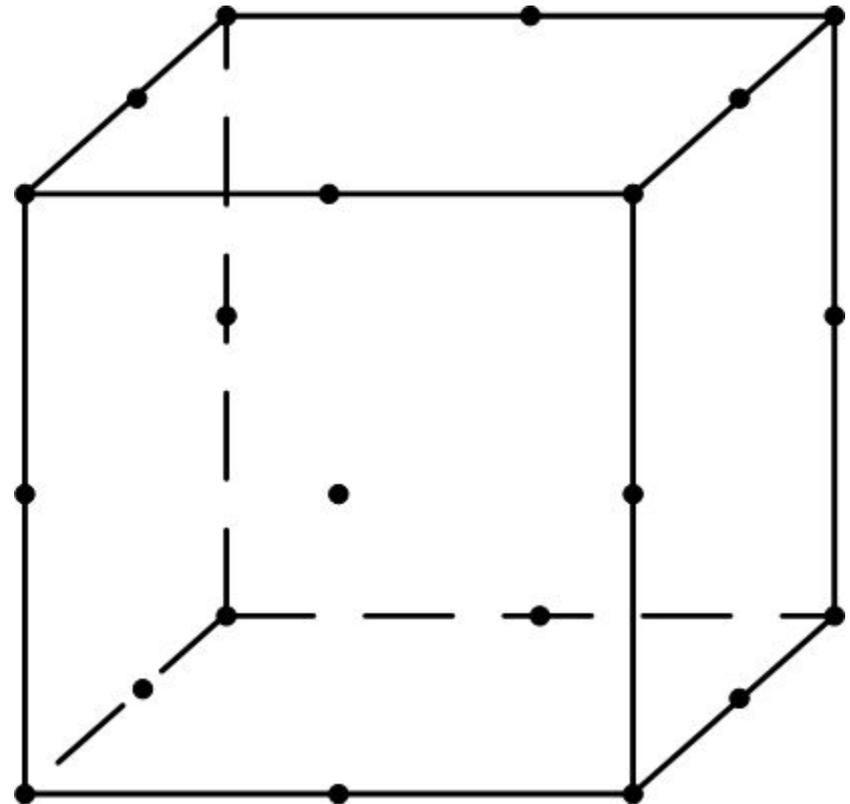
# *Расположение точек в факторном пространстве для плана Коно (Ko)*

План Коно включает вершины гиперкуба, середины ребер и центр области планирования.



$k=2$

9 ОПЫТОВ

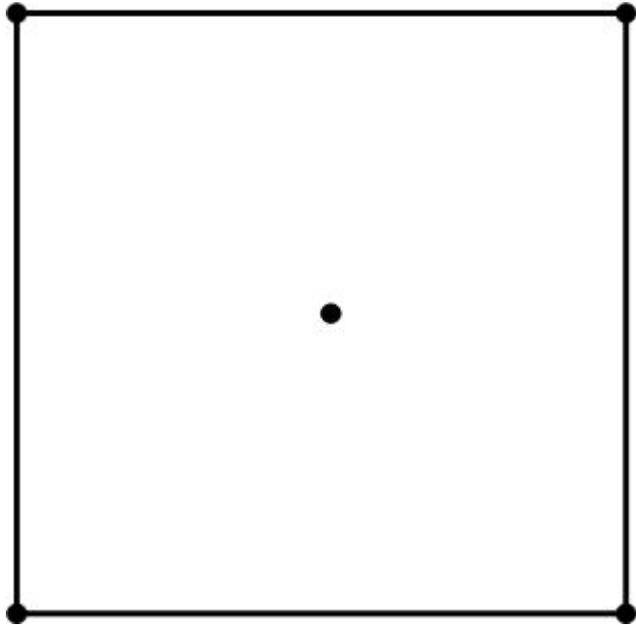


$k=3$

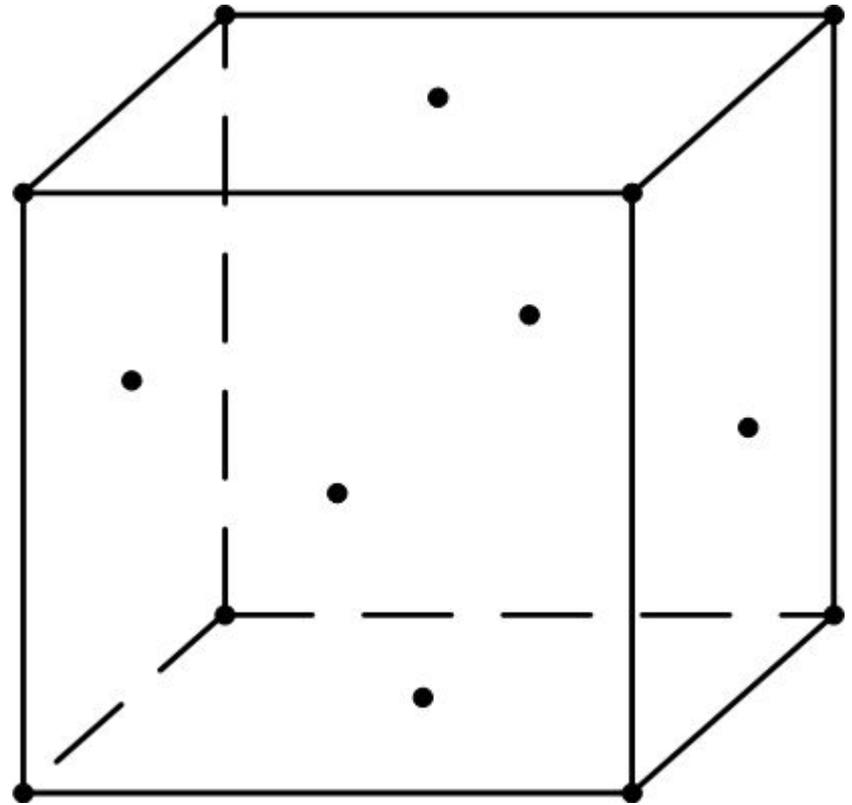
21 ОПЫТ

# *Расположение точек в факторном пространстве для плана **Бокса (BK)***

План Бокса включает вершины и середины  
двумерных граней гиперкуба.



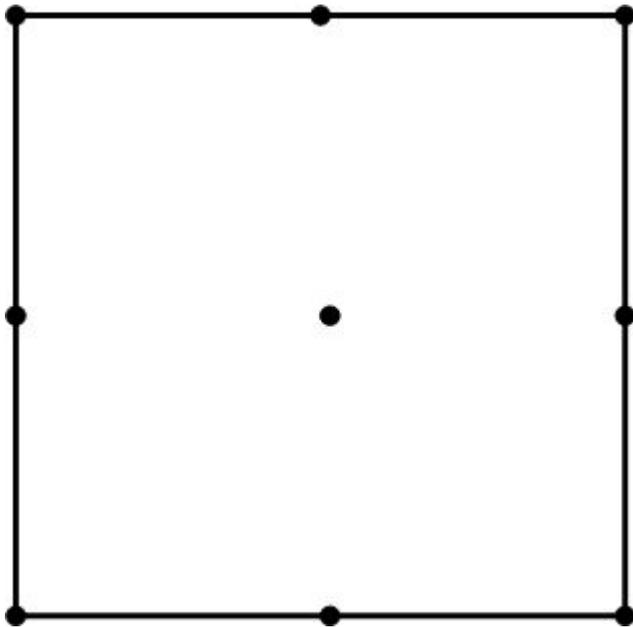
$k=2$   
5 опытов



$k=3$   
14 опытов

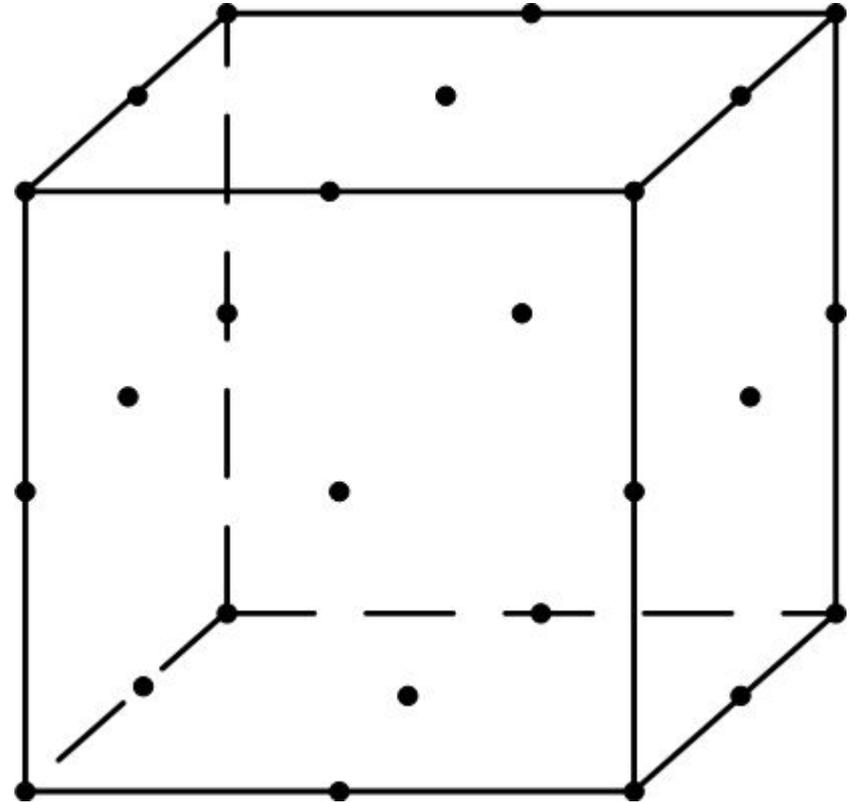
# *Расположение точек в факторном пространстве для плана **Кифера (Ki)***

План Кифера включает вершины гиперкуба, середины ребер и центры двумерных граней.



$k=2$

9 ОПЫТОВ



$k=3$

26 ОПЫТОВ

## Сопоставительный анализ планов

Наименование плана	Обозначени е	Количество опытов		Расположение точек
		2 фактор а	3 фактора	
Полный факторный эксперимент	ПФЭ	4	8	В
Бокса-Хантера	ВН	13	20	В, Ц, З
Коно	Ко	9	21	В, Р, Ц
Бокса	ВК	5	14	В, Г
Кифера	Ки	9	26	В, Р, Г

В – вершины гиперкуба;

Р – середины ребер;

Ц – центр области планирования; Г – середины двумерных

З – звездные точки;

граней.

## 1) *Полный факторный эксперимент (ПФЭ)*

применяется в тех случаях, где можно предположить с высокой степенью вероятности, что в исследуемой области, т.е. в области определения каждого фактора, все исследуемые показатели качества *линейно* зависят от факторов.

2) *Планы Бокса-Хантера* применяются в следующих случаях:

– если в результате ПФЭ были получены неадекватные (недостовечно описывающие технологический процесс) уравнения.

– если необходимо охватить достаточно широкую область факторного пространства, т.к. только в этих планах есть звездные точки. Но всегда следует оценивать в этих планах реализуемость сочетаний факторов в звездных точках, т.е. чтобы получение продукции вообще было возможным.

3) *Планы Коно* достаточно информативны и вместе с тем включают небольшое количество опытов, поэтому являются компромиссными с точки зрения затрат и информативности.

4) *Планы Бокса* наиболее экономичны среди планов 2-го порядка. Эти планы следует применять в тех случаях, когда экспериментальная работа очень трудоемка, требует много материальных и временных затрат.

5) *Планы Кифера* наиболее информативны, т.е. обеспечивают наиболее достоверную информацию об объекте исследования, но при этом наиболее трудоемкие.

При выборе вида плана 2-го порядка следует иметь в виду, что увеличение количества опытов всегда повышает информативность эксперимента, повышает точность математического описания объекта, **НО** одновременно увеличивается и объем экспериментальной работы. В соответствии с этими двумя критериями и выбирается план эксперимента.