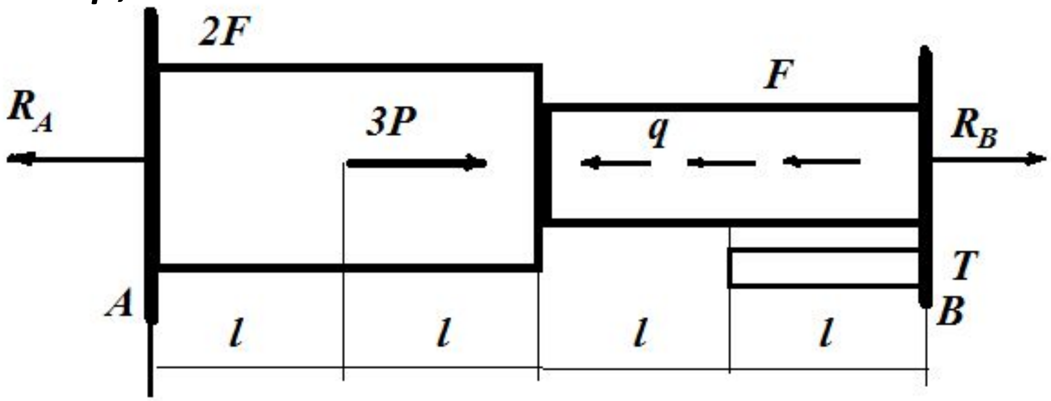
Растяжение-сжатие статически неопределимого прямого бруса

Статически неопределимый брус

Брус жестко защемлен в стенках *A* и *B*, нагружен сосредоточенной силой 3*P*, распределенной нагрузкой *q*, на конечном участке нагревается на *T*°К. Определить опорные реакции и построить эпюры нормальной силы N_x, напряжения σ_x, относительной деформации ε_x и перемещения сечений U_x при условии: $P=ql$, $\alpha TEF=P$



Составление расчетной схемы и запись уравнения равновесия

$$\sum X = 0 \quad -R_A + 3P - q2l + R_B = 0$$

Для бруса при растяжении или сжатии можно записать только одно уравнение равновесия из шести (пять остальных дают тождественный ноль). Таким образом, получили систему статически неопределимую, когда уравнений статики недостаточно для определения всех сил, действующих на брус.

Раскрытие статической неопределимости

Для раскрытия статической неопределимости осуществляется переход к статически определимому стержню, эквивалентному заданному, путем отбрасывания одной лишней связи, например, стенки *B*, замены действия ее неизвестной силой R_B и составление уравнения перемещения сечения *B* с учетом тех ограничений, которые накладывались на перемещение сечения *B* отброшенной связью.

В случае жесткой стенки $U_B=0$

Есть два подхода к записи уравнения перемещений U_B=0.

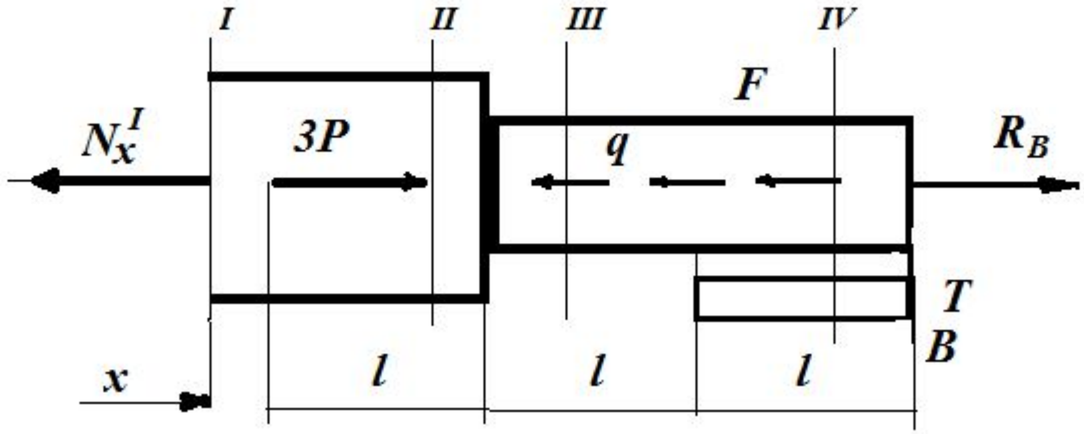
Первый рассматривает перемещение U_B как сумму накопленных деформаций отдельных участков на всей длине стержня.

$$U_B=\Delta l_1+\Delta l_2+\Delta l_3+\Delta l_4+\Delta l(\mathrm{T})=0$$

$$\Delta l_i = \int_0^{l_i} \frac{N_x^i dx}{EF} \qquad \Delta l(T) = \alpha T l_T$$

Таким образом, достаточно найти внутреннюю силу на каждом участке, чтобы определить деформацию каждого участка, т.к. остальные исходные данные нам известны. Для этого удобно рассматривать ту отсеченную часть, где представлена неизвестная сила R_B

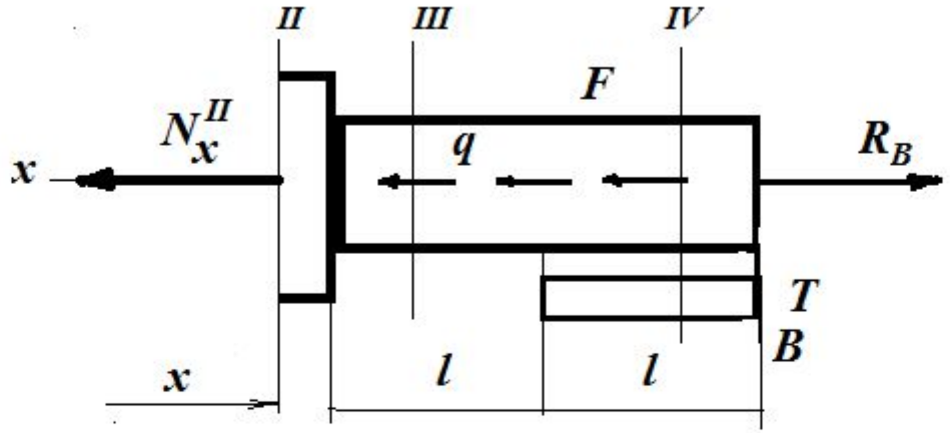
Определение нормальной силы на каждом участке



$$\sum X = 0 \quad N_x^I - 3P + 2P - R_B = 0$$

$$N_x^I = P + R_B$$

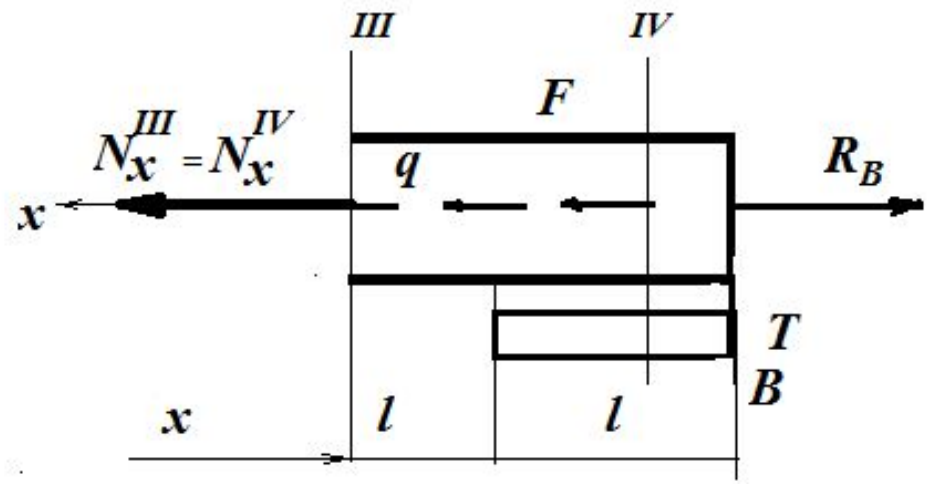
Определение нормальной силы на каждом участке (продолжение)



$$\sum X = 0 \qquad N_x^{II} + 2P - R_B = 0$$

$$N_x^{II} = -2P + R_B$$

Определение нормальной силы на каждом участке (продолжение)



$$\sum X = 0 \qquad N_x^{III} + q(4l - x) - R_B = 0$$

$$N_x^{III} = N_x^{IV} = -q(4l - x) + R_B$$

Определение деформации каждого участка и запись уравнения перемещения сечения *B*

$$\Delta l_1 = \frac{Pl}{2EF} + \frac{R_B l}{2EF} \qquad \Delta l_2 = -\frac{Pl}{EF} + \frac{R_B l}{2EF}$$

$$\Delta l_3 + \Delta l_4 = -\frac{2Pl}{EF} + \frac{R_B 2l}{EF} + \alpha T l$$

$$U_B = -\frac{2{,}5Pl}{EF} + \frac{R_B 3l}{EF} + \alpha T l = 0$$

откуда $R_B = \frac{2{,}5P - \alpha TEF}{3} = \frac{P}{2}$ $\quad R_A = 1{,}5P$

Второй подход к записи уравнения перемещений U_B=0.

- Используется принцип независимости действия сил

$$U_B = U_B(3P) + U_B(q) + U_B(R_B) + U_B(T)$$

гд
е

$$U_B(3P) = \frac{3Pl}{2EF} \qquad U_B(q) = \frac{-2ql2l}{2EF} + \frac{-2ql^2}{EF}$$

$$U_B(R_B) = \frac{R_B 2l}{2EF} + \frac{R_B 2l}{EF} \qquad U_B(T) = \alpha Tl$$

Определение нормальной силы, напряжения, относительной деформации и перемещения в сечениях бруса (стержня)

- Нормальную силу в каждом сечении определяем с помощью метода сечений, рассматривая в равновесии правую отсекаемую часть и $R_B = {}^{P}\!/_{2}$ ая, что

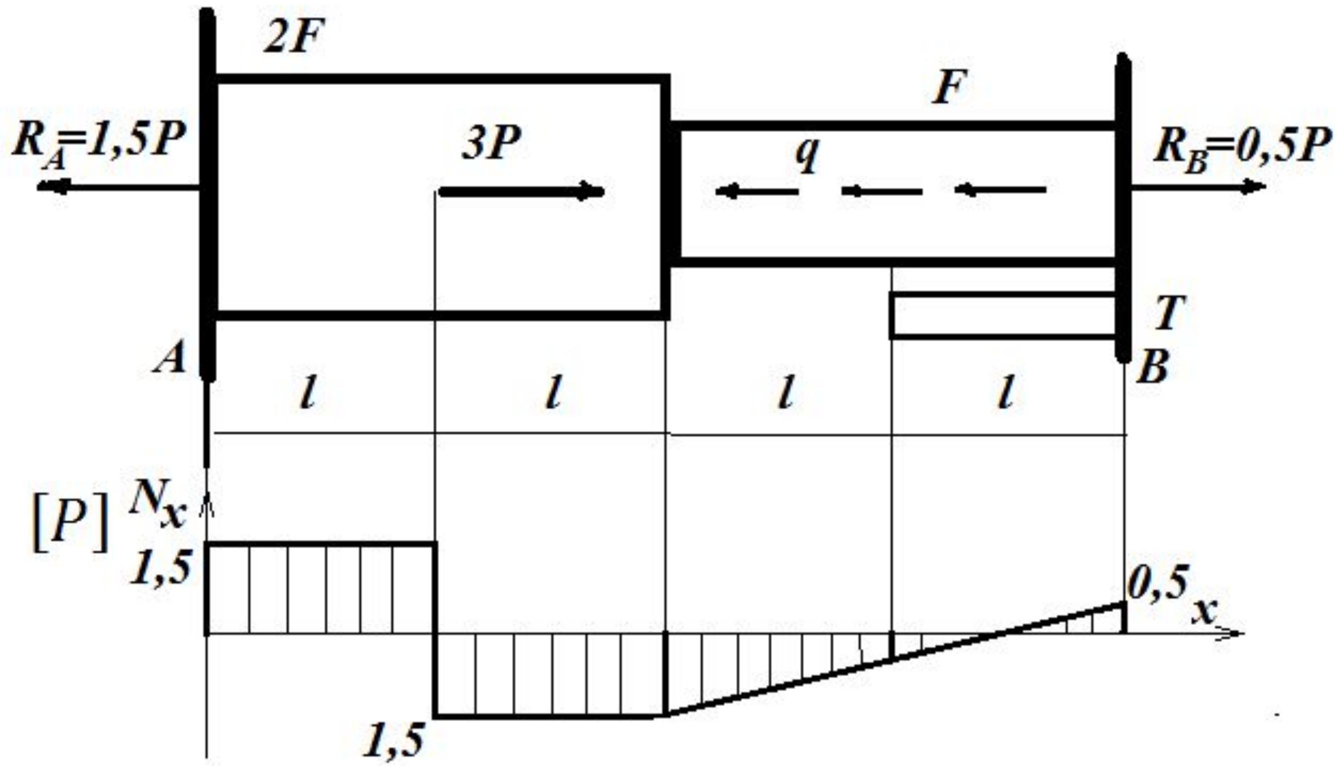
$$N_x^{I} = 1{,}5P \qquad N_x^{II} = -1{,}5P$$

$$N_x^{III} = N_x^{IV} = -q(4l - x) + \frac{P}{2}$$

-

Определение нормальной силы, напряжения, относительной деформации и перемещения в сечениях бруса (стержня)

- Построение эпюры нормальной силы



Определение напряжения, относительной деформации и перемещения в сечениях бруса (стержня)

- Определение напряжений

$$\sigma_x^{I} = \frac{1,5P}{2F}$$

$$\sigma_x^{II} = -\frac{1,5P}{2F} \quad \sigma_x^{III} = \sigma_x^{IV} = \frac{-q(4l-x)}{F} + \frac{P}{2F}$$

- Определение деформаций

$$\varepsilon_x^{I} = \frac{0,75P}{EF}$$

$$\varepsilon_x^{II} = -\frac{0,75P}{EF} \qquad \varepsilon_x^{III} = \frac{-q(4l-x)}{EF} + \frac{P}{2EF}$$

$$\varepsilon_x^{IV} = \frac{-q(4l-x)}{EF} + \frac{P}{2EF} + \alpha T$$

Определение нормальной силы, напряжения, относительной деформации и перемещения в сечениях бруса (стержня)

- Определение перемещений сечений $U_x^I = \int_0^x \varepsilon_x^I dx$

$$U_l^I = \Delta l_1 = \frac{0{,}75Pl}{EF} \qquad U_x^{II} = \Delta l_1 + \int_l^x \varepsilon_x^{II} dx$$

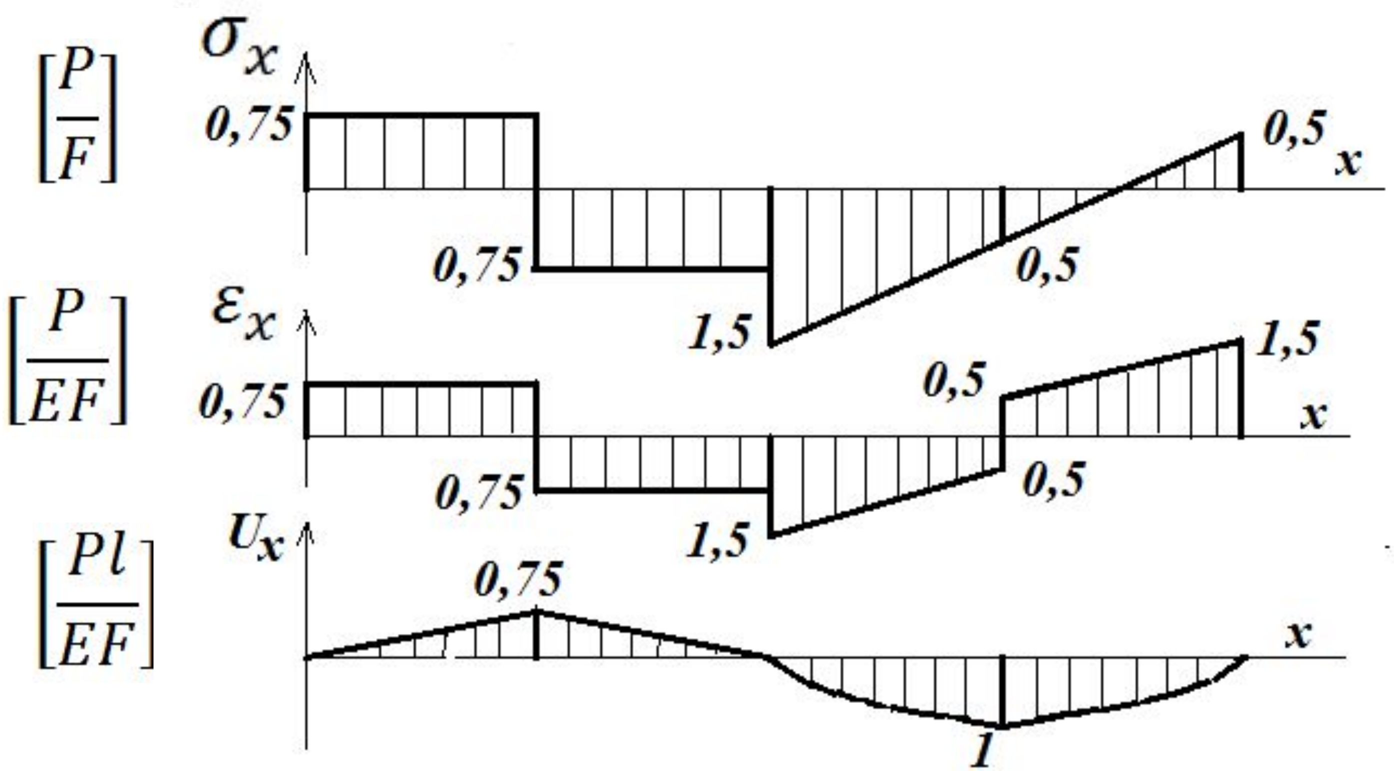
$$U_{2l}^{II} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{0{,}75Pl}{EF} + \frac{-0{,}75Pl}{EF} = 0$$

$$U_x^{III} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \int_{2l}^x \varepsilon_x^{III} dx \quad U_{3l}^{III} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{-Pl}{EF}$$

$$U_x^{III} = \frac{-Pl}{EF} + \int_{3l}^x \varepsilon_x^{IV} dx \qquad U_{4l}^{IV} = U_B = U_{3l}^{III} + \Delta l_4 = 0$$

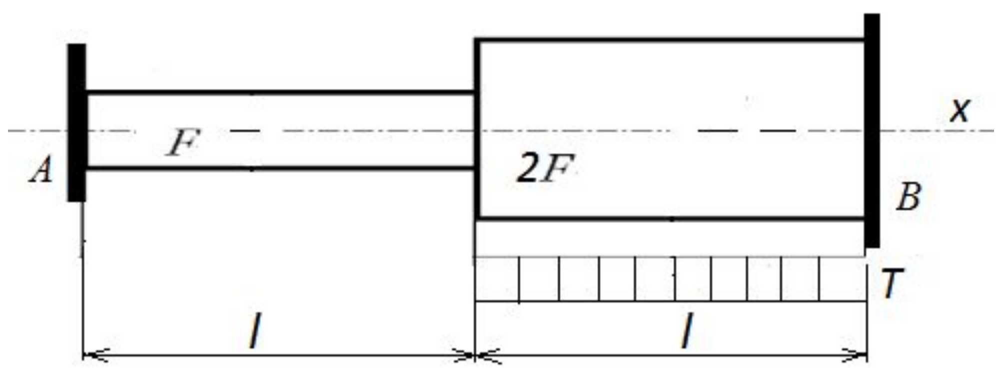
Определение нормальной силы, напряжения, относительной деформации и перемещения в сечениях бруса (стержня)

- Построение эпюр напряжения, относительной деформации и перемещения сечений



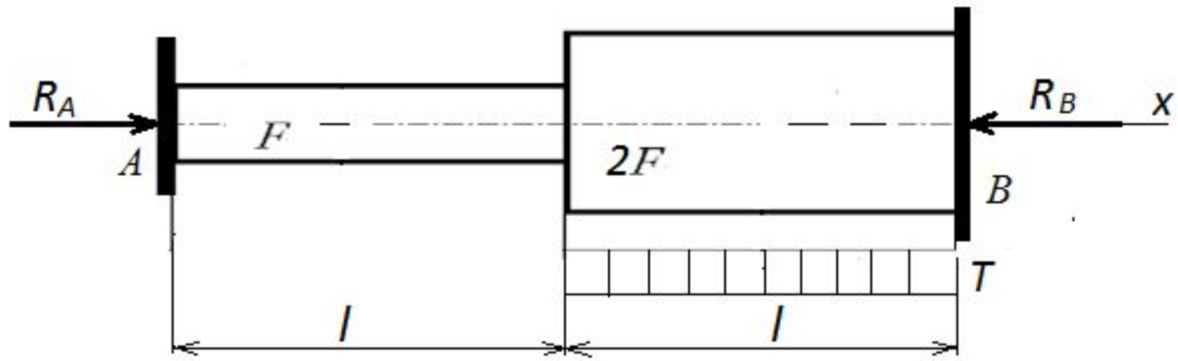
Температурная деформация статически неопределимого бруса

Брус, состоящий из двух участков, жестко защемлен между двумя стенками. Второй участок нагревается на *T*°К. При известных *T,* коэффициента α, площади поперечного сечения *F*, размера *l* определить опорные реакции и σ_x ε_x



Решение задачи

- Нагрев одного из участков приводит к его расширению и появлению опорных реакций в стенках *A* и *B.*



- Составим уравнение равновесия: $R_A - R_B = 0$ – система статически неопределимая. Раскрываем статическую неопределимость.
- Записываем уравнение перемещения сечения *B*: $U_B = 0$.
- Используем принцип независимости действия сил.

Решение задачи

$$U_B(R_B) + U_B(T) = 0 \qquad U_B(R_B) = \frac{-R_B l}{EF} + \frac{-R_B l}{2EF} = \frac{-3R_B l}{2EF}$$

$$U_B(T) = \alpha T l \qquad \frac{-3R_B l}{2EF} + \alpha T l = 0 \qquad R_B = \frac{2}{3}\alpha T E F$$

$$N_x^1 = N_x^{II} = -\frac{2}{3}\alpha T E F \qquad \sigma_x^1 = -\frac{2}{3}\alpha T E \qquad \sigma_x^{II} = -\frac{1}{3}\alpha T E$$

$$\varepsilon_x^1 = -\frac{2}{3}\alpha T \qquad \varepsilon_x^{II} = -\frac{1}{3}\alpha T + \alpha T = \frac{2}{3}\alpha T$$

$$U_x^1 = \int_0^x \varepsilon_x^1 dx = -\frac{2}{3}\alpha T x$$

$$U_x^{II} = -\frac{2}{3}\alpha T l + \int_l^x \varepsilon_x^{II} dx = -\frac{2}{3}\alpha T l + \frac{2}{3}\alpha T (x - l)$$

Построение эпюр