Лекція №2.

Геометричний метод розв’язування задач лінійного програмування

2. Геометричний метод розв’язування ЗЛП

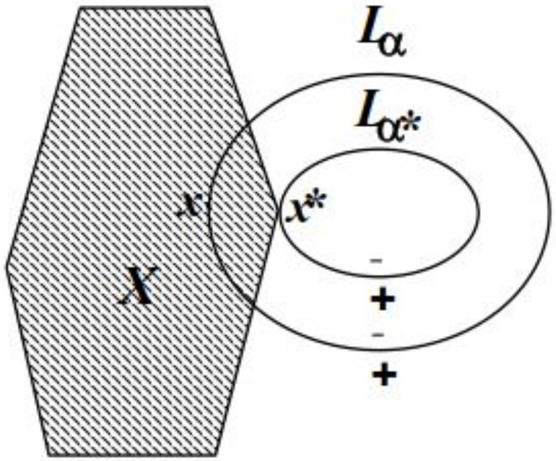
Нехай функція $f(x)$ визначена на R^n. **Лінією (поверхнею) рівня** функції $f(x)$ є множина точок

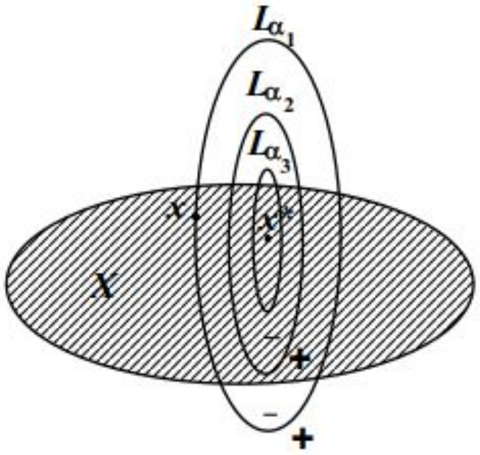
$$L_\alpha = \{x \in R^n \mid f(x) = \alpha, \alpha \in R^1\}.$$

Розглянемо двовимірну задачу мінімізації:

$$f(x_1, x_2) \to min, x \in X \subset R^2.$$

Щоб відобразити характер зміни функції $f(x)$, біля лінії рівня L_α будемо ставити знак "**+**" з того боку, де функція набуває значень, більших від α, і знак "**-**" - з іншого боку.





Розглянемо детально алгоритм розв'язування стандартної двовимірної задачі лінійного програмування:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{2} c_j x_j \to \min\ (\max)$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i\ ,\ i=\overline{1,m},\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2},$$

геометричним методом.

1. Побудувати прямі, рівняння яких одержуються внаслідок заміни в обмеженнях знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Знайти півплощини, які визначаються кожним з обмежень-нерівностей задачі.

3. Знайти многокутник допустимих розв’язків, як перетин знайдених півплощин.

4. Побудувати пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (лінію рівня цільової функції), при цьому величина h підбирається так, щоб лінія рівня проходила через многокутник допустимих розв'язків. Побудувати вектор $\overline{c} = (c_1, c_2)$.

5. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в напрямку вектора $\overline{c}$ при розв'язуванні задачі максимізації (або в зворотньому напрямку при розв'язанні задачі мінімізації), знайти точку (множину точок), де цільова функція приймає максимальне (мінімальне) значення, або встановити необмеженість зверху (знизу) функції на допустимій множині.

6. Якщо існує единий розв'язок задачі, визначити координати знайденої точки як розв'язок системи двох відповідних рівнянь з двома невідомими, і обчислити значення цільової функції в цій точці. Якщо існує безліч розв'язків, то визначити координати принаймні однієї екстремальної точки і обчислити значення цільової функції в цій точці.

Приклад 1. Компанія Reddy Mikks

Компанія Reddy Mikks виготовляє краску для внутрішніх і зовнішніх робіт з сировини двох типів: М1 і М2. Наступна таблиця представляє основні данні для задачі:

	Витрати сировини (в тоннах) на тону краски		Максимально можливі щоденні витрати сировини
	для зовнішніх робіт	**для внутрішніх робіт**	
Сировина М1	**6**	**4**	**24**
Сировина М2	**1**	**2**	**6**
Прибуток (тис. дол.) на тонну краски	**5**	**4**	

Відділ маркетингу компанії обмежив щоденне виготовлення краски для внутрішніх робіт до 2 т (через відсутність попиту), а також поставив умову, щоб щоденне виробництво краски для внутрішніх робіт не перевищувало більш ніж на тонну аналогічний показник виготовлення краски для зовнішніх робіт. Компанія хоче визначити оптимальне (найкраще) співвідношення між видами продукції що випускається.

Математична модель задачі:

максимізувати $f(x) = 5*x1 + 4*x2$

при виконанні обмежень

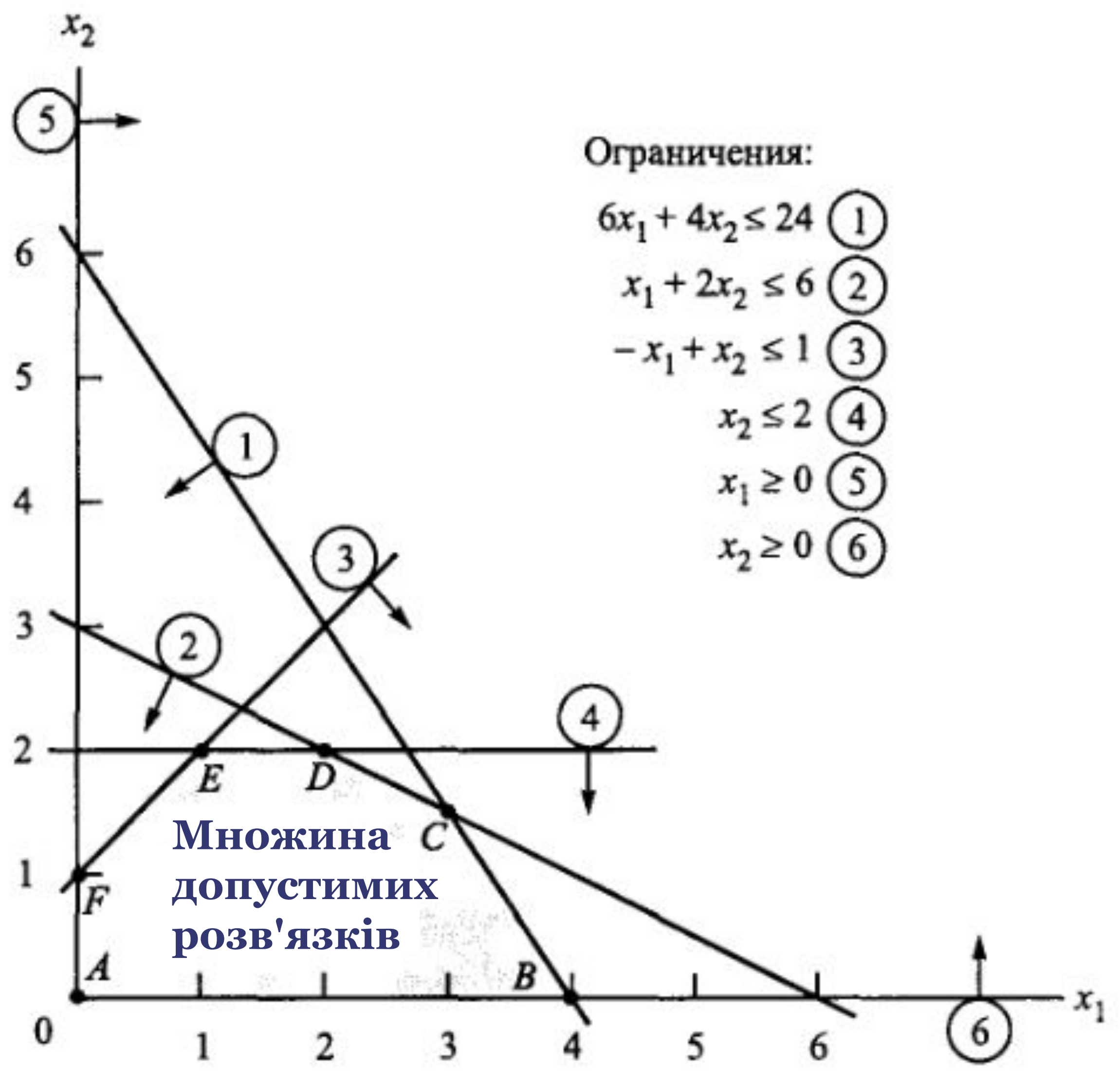
$6*x1 + 4*x2 <= 24,$

$x1 + 2*x2 <= 6,$

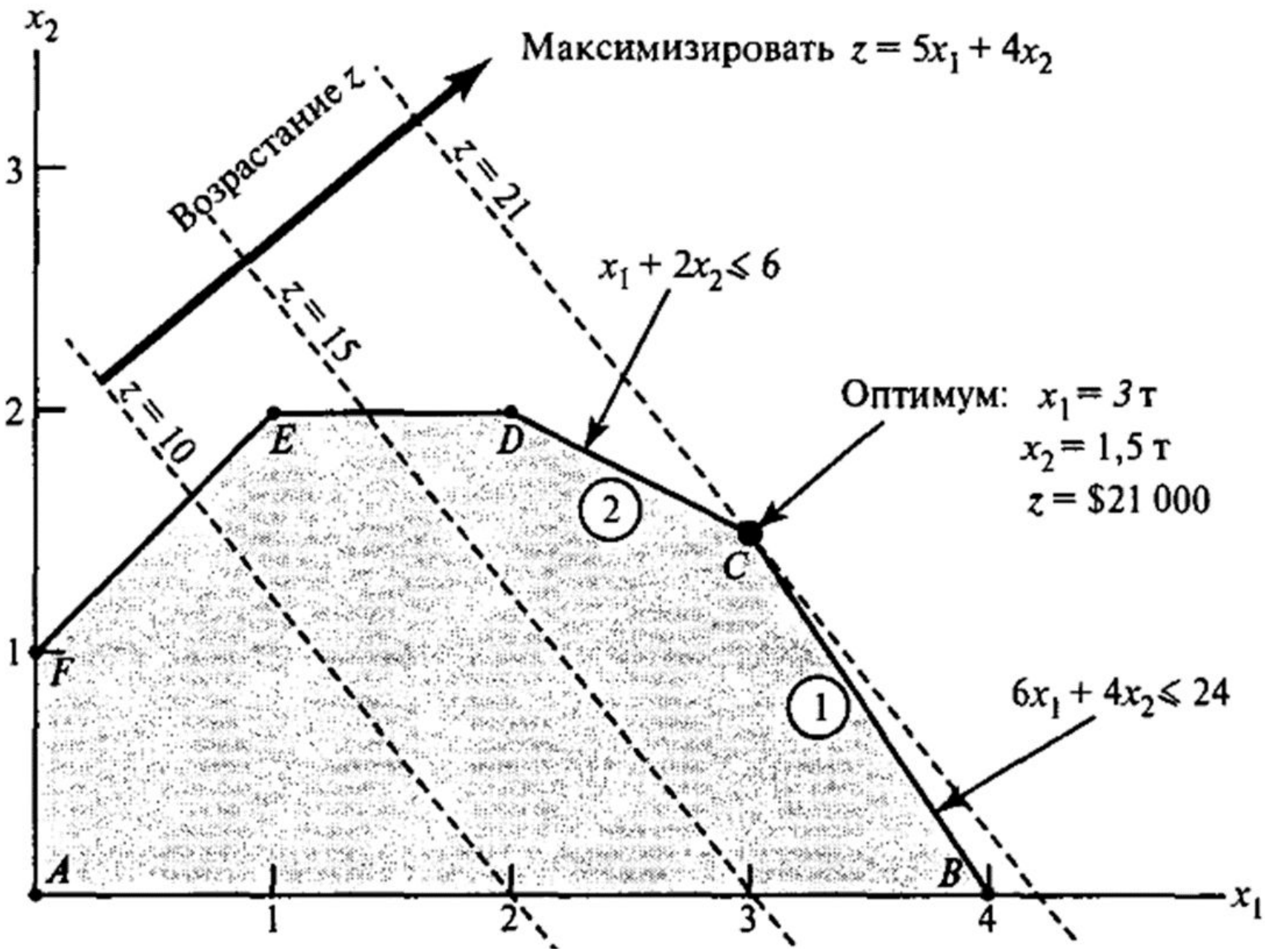
$-x1 + x2 <= 1,$

$x2 <= 2,$

$x1 >= 0, x2 >= 0.$



x_2
x_1
Ограничения:
$6x_1 + 4x_2 \le 24$ (1)
$x_1 + 2x_2 \le 6$ (2)
$-x_1 + x_2 \le 1$ (3)
$x_2 \le 2$ (4)
$x_1 \ge 0$ (5)
$x_2 \ge 0$ (6)
A
B
C
D
E
F
0
1
2
3
4
5
6
Множина допустимих розв'язків



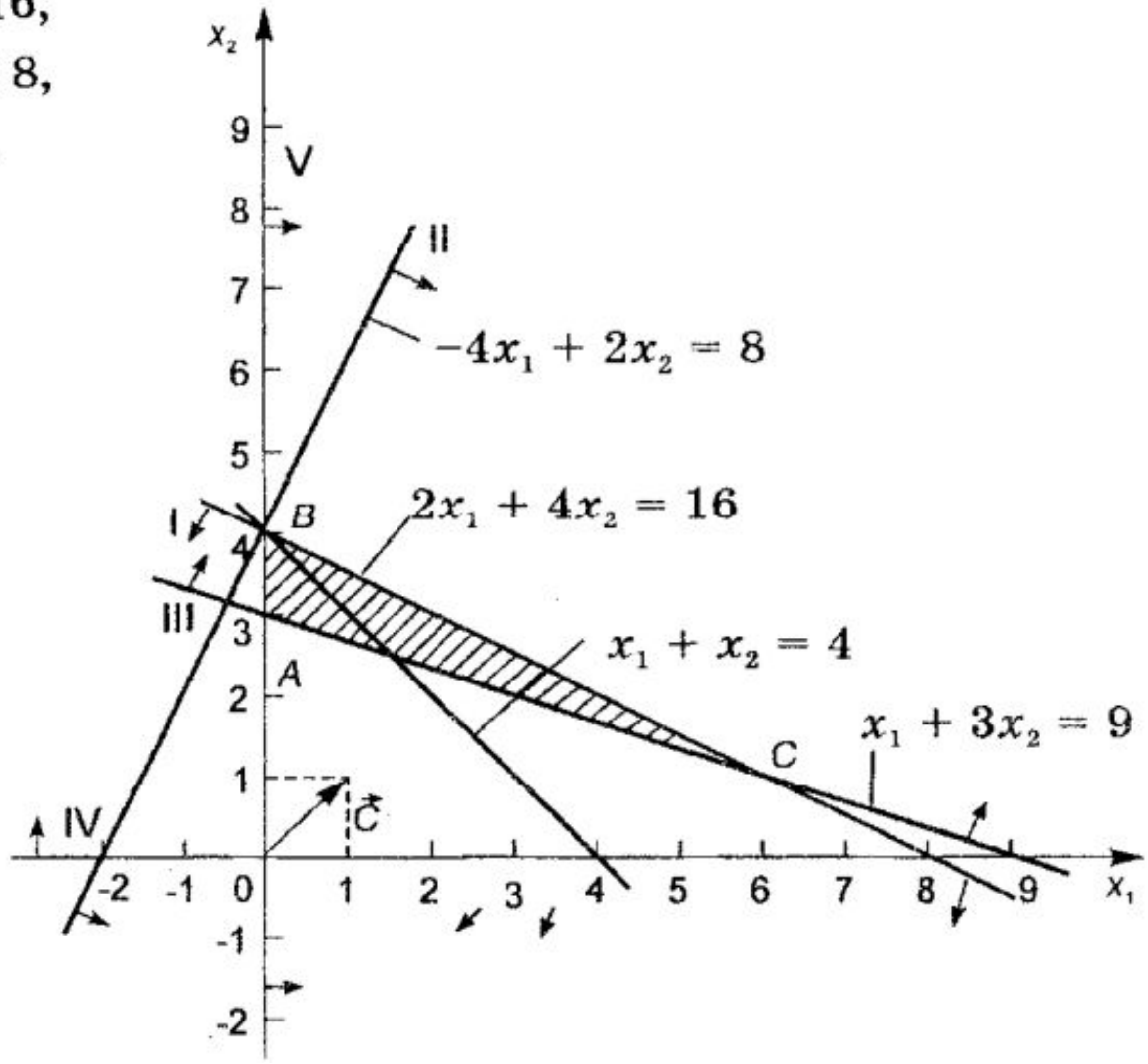
x_2
Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$
Возрастание z
$z = 21$
$z = 15$
$z = 10$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$
Оптимум: $x_1 = 3$ т
$x_2 = 1{,}5$ т
$z = \$21\ 000$
$6x_1 + 4x_2 \leq 24$
E
D
C
F
A
B
1
2
3
4
x_1

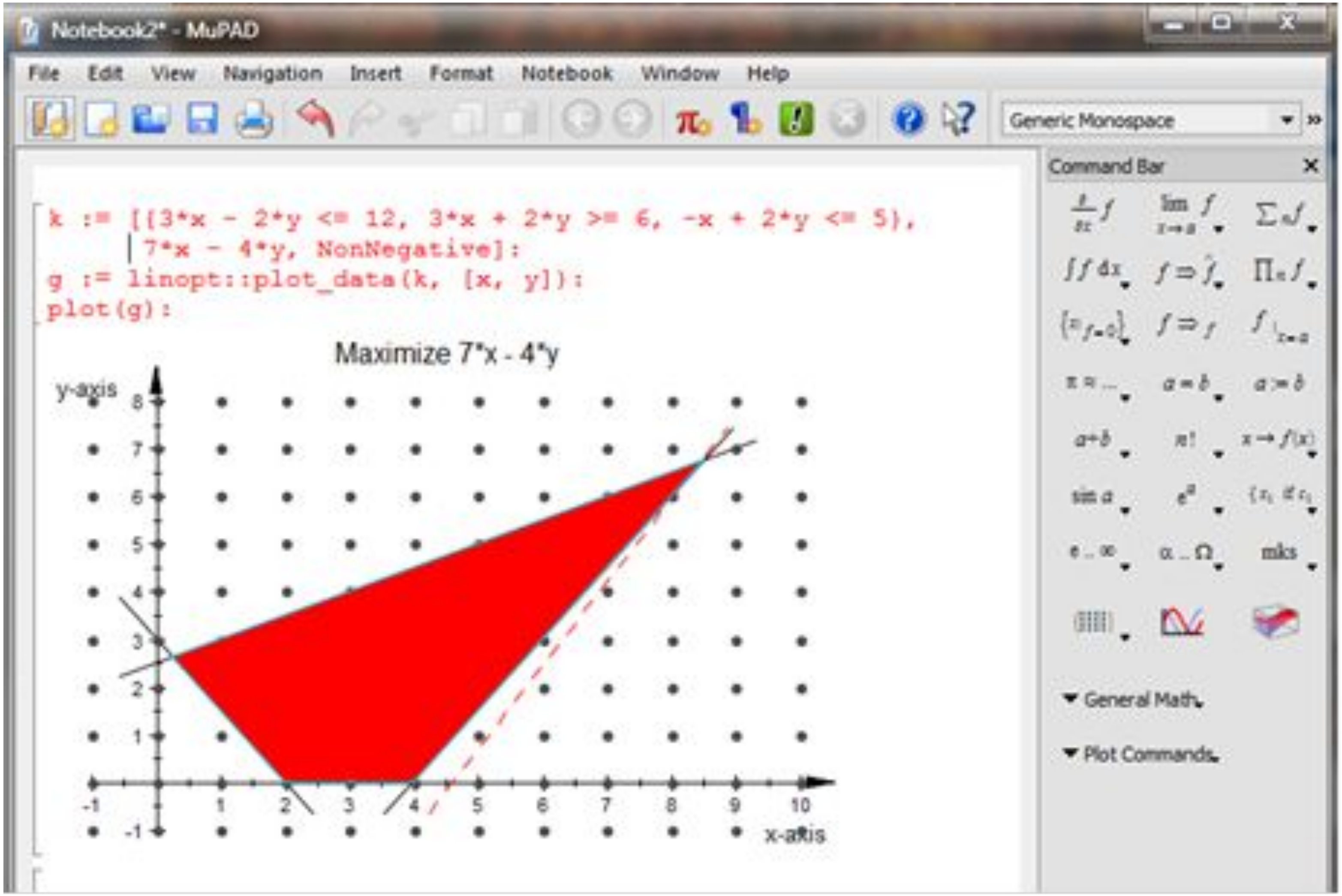
Найти максимум и минимум функции

$$F = x_1 + x_2$$

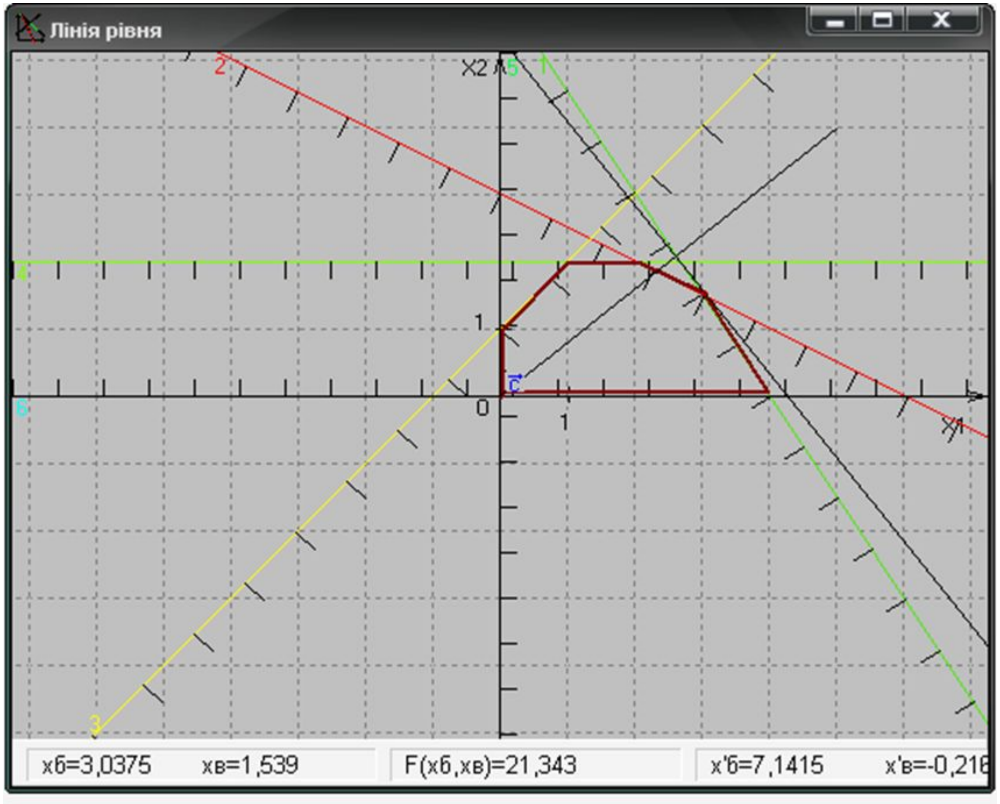
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

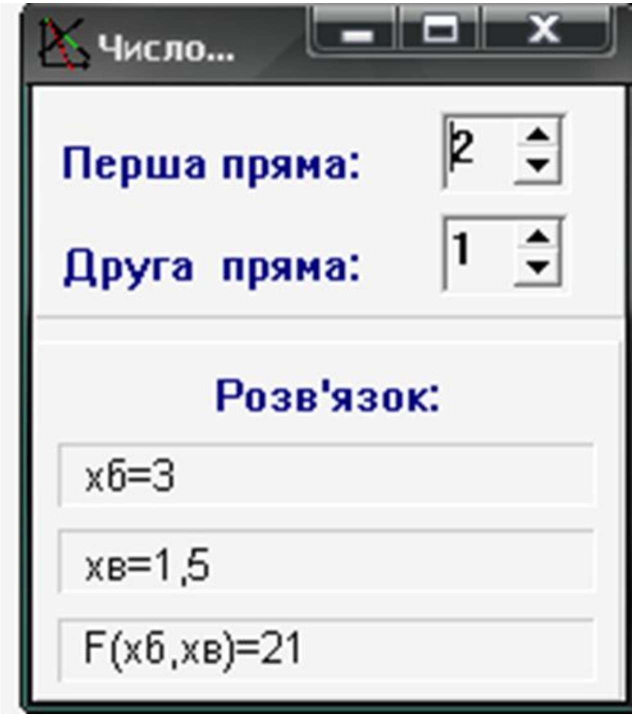
$$x_1, x_2 \ge 0.$$




Notebook2* - MuPAD
File Edit View Navigation Insert Format Notebook Window Help
Generic Monospace
Command Bar
k := [{3*x - 2*y <= 12, 3*x + 2*y >= 6, -x + 2*y <= 5},
7*x - 4*y, NonNegative]:
g := linopt::plot_data(k, [x, y]):
plot(g):
Maximize 7*x - 4*y
y-axis
x-axis
General Math
Plot Commands

Розв'язування задачі за допомогою програми **EXTREMUM**





$$L(X) = 15 - x_1 - 2x_2 \to \text{extr},$$

$$\begin{array}{ll} 1) & \\ 2) & \\ 3) & \\ & \end{array} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12, \\ x_1 + x_2 \geqslant -5, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$