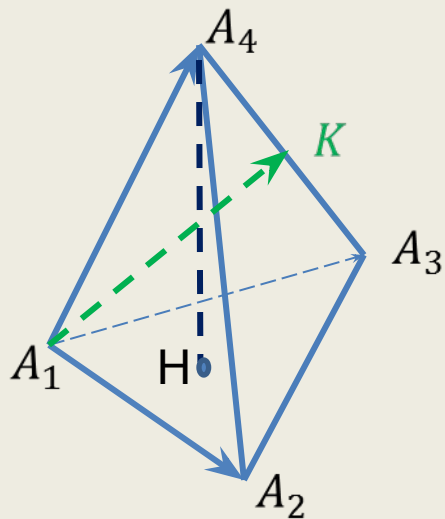


Решение типовой задачи

Дано: $A_1(1; -1; 2)$; $A_2(2; 1; 2)$; $A_3(1; 1; 4)$; $A_4(6; -3; 8)$.

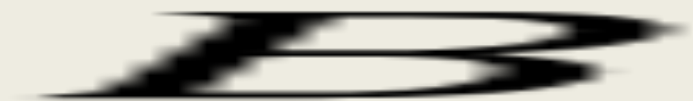
Найти:

1. длину вектора $\overline{A_1A_2}$;
2. угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$;
3. площадь треугольника $A_1A_2A_3$;
4. объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
5. длину высоты A_4H , опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
6. медиану A_1K треугольника $A_1A_4A_3$;



РЕШЕНИ

Е.
1. Для вычисления длины вектора $\overline{A_1A_2}$ найдем его координаты:



$$\overline{A_1A_2} = (2 - 1, 1 - (-1), 2 - 2) = (1, 2, 0).$$

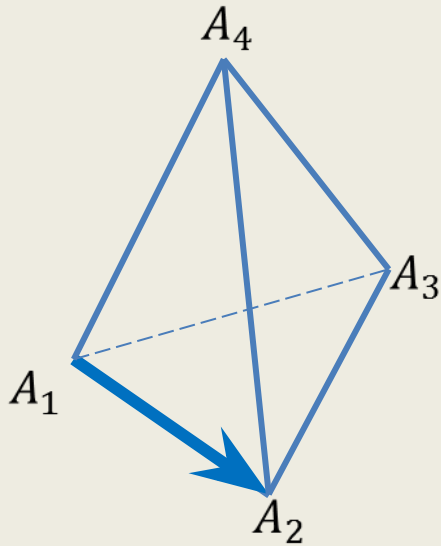
Вычислим длину вектора $\overline{A_1A_2}$:

$$|\overline{A_1A_2}| =$$

ДАНЫ координаты точек $A(1, 1, 1)$; $B(2, 0, 2)$; $C(2, 2, 2)$; $D(3, 4, -3)$.
ПРОВЕРИТЬ: находятся эти точки в ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ или нет.

значит, векторы НЕКОМПЛАНАРНЫ, то есть точки A, B, C и D НЕ ЛЕЖАТ в одной плоскости.

значит, координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ коллинеарны.



Дано: $A_1(1; -1; 2)$; $A_2(2; 1; 2)$; $A_3(1; 1; 4)$; $A_4(6; -3; 8)$.

2. Для вычисления угла между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$ найдем их координаты:

$$\overline{A_1A_2} = (1, 2, 0); \quad \overline{A_1A_4} = (6 - 1, -3 - (-1), 8 - 2) = (5, -2, 6).$$

Применим формулу для вычисления угла между векторами: $\cos \varphi = \frac{(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4})}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|}$;
Скалярное произведение в числителе получим как сумму

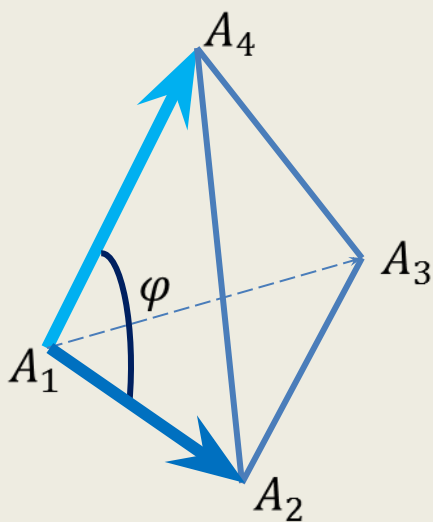
произведений соответствующих координат:

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 6 = 5 - 4 + 0 = 1;$$

Вычислим длины векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$ (как в пункте 1):

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{5};$$

$$|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65};$$



$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{65}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}; \quad \varphi = \arccos \frac{1}{5\sqrt{13}};$$

Дано: $A_1(1; -1; 2)$; $A_2(2; 1; 2)$; $A_3(1; 1; 4)$; $A_4(6; -3; 8)$.

3. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$ будем вычислять, исходя из геометрического смысла векторного произведения:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot \left| \left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \right] \right|$$

$$\overline{A_1A_2} = (1, 2, 0); \quad \overline{A_1A_3} = (1 - 1, 1 - (-1), 4 - 2) = (0, 2, 2).$$

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

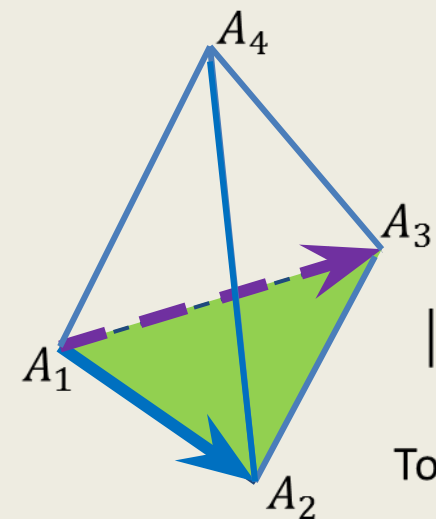
$$= \bar{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(4 - 0) - \bar{j}(2 - 0) + \bar{k}(2 - 0) = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k} = (4; -2; 2);$$

Модуль векторного произведения

$$\left| \left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \right] \right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6};$$

Тогда площадь треугольника $A_1A_2A_3$ равна : $S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$;



Дано: $A_1(1; -1; 2)$; $A_2(2; 1; 2)$; $A_3(1; 1; 4)$; $A_4(6; -3; 8)$.

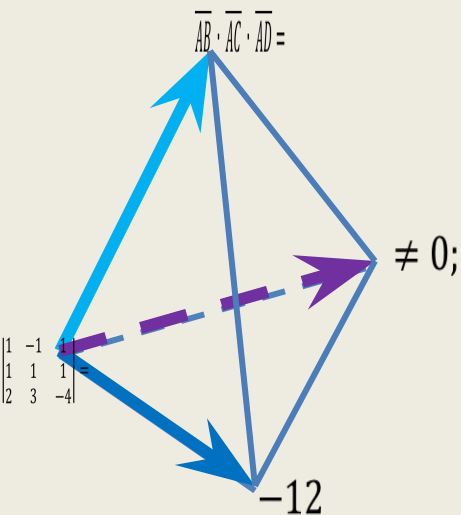
4. Объем V пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ численно равен $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения векторов, образующих данную пирамиду, например, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$;

Из предыдущих заданий известны их координаты:

$$\overline{A_1A_2} = (1, 2, 0); \quad \overline{A_1A_3} = (0, 2, 2); \quad \overline{A_1A_4} = (5, -2, 6);$$

Вычислим их смешанное произведение как определитель третьего порядка, составленный из координат ВЕКТОРОВ (разложением по первой строке):

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 = \\ &= 16 + 20 = 36; \end{aligned}$$



Чтобы вычислить V объем ПИРАМИДЫ $A_1A_2A_3A_4$, надо взять одну шестую часть

модуля:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot |\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}| = \frac{1}{6} \cdot |36| = 6;$$



Стреуг = $V_{\text{пир}} = 6;$

Вспомним другую формулу для вычисления этого же объема, в

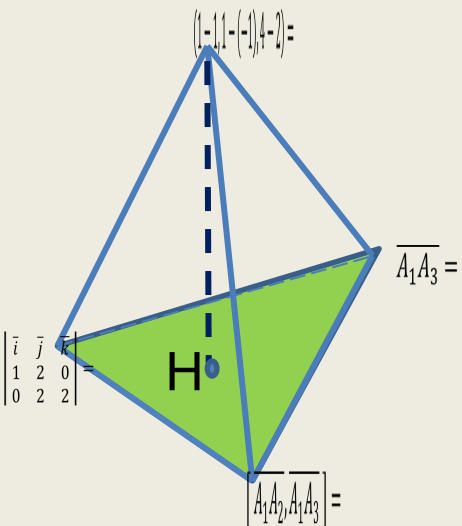
которой используется длина высоты пирамиды:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot h ,$$

где

$$\frac{1}{2} \cdot \left| \left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \right] \right|$$

h – длина высоты A_4H , опущенной на основание $A_1A_2A_3$ (ее надо найти).



$$\overline{A_1A_2} = (1, 2, 0);$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3 \cdot V_{\text{пир}}}{S_{\Delta}} ; \quad \left| \left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \right] \right| =$$

$$(0, 2, 2). \quad \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = \text{ОТВЕТ}$$

Дано: $A_1(1; -1; 2)$; $A_2(2; 1; 2)$; $A_3(1; 1; 4)$; $A_4(6; -3; 8)$.

$$\sqrt{16 + 4 + 4} =$$

с серединой стороны A_4A_3 .

Найдем вектор $\overline{A_1K}$ как половину диагонали $\overline{A_1D}$ параллелограмма $A_1A_4DA_3$:

$$\frac{1}{2} \overline{A_1A_3} + \overline{A_1A_4}; \quad \overline{A_1K} = \frac{1}{2} \overline{A_1A_3} = (0, 2, 2); \quad \overline{A_1A_4} = (5, -2, 6);$$

(смотри задачи 1 и 2 практики

№7).
В пункте 2 нашли $\overline{A_1A_4} = (5, -2, 6)$;

$$2\sqrt{6};$$

Выполним действия с координатами :

$$\overline{A_1A_3}, \quad \overline{A_1A_4}; \quad \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 = 16 + 20 = 36;$$

Тогда длина медианы

$$\frac{1}{2} \cdot |36| = V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot |\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}| = \sqrt{\frac{25}{4} + 16} = \sqrt{\frac{89}{4}} = 6; \quad \text{ОТВЕТ}$$

