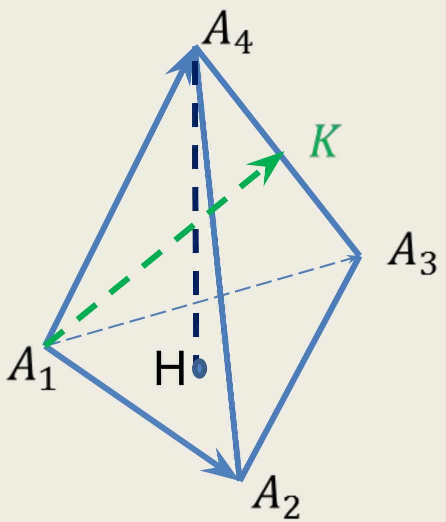
Решение типовой задачи

Дано: $A_1(1;-1;2);\ A_2(2;1;2);\ A_3(1;1;4);\ A_4(6;-3;8).$

Найти:

1. длину вектора $\overline{A_1A_2}$;
2. угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$;
3. площадь треугольника $A_1A_2A_3$;
4. объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;
5. длину высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
6. медиану A_1K треугольника $A_1A_4A_3$;



РЕШЕНИЕ.

1. Для вычисления длины вектора $\overline{A_1A_2}$ найдем его координаты:

$$B$$

$$\overline{A_1A_2} = \ (2-1, 1-(-1), 2-2) = \ (1, 2, 0).$$

Вычислим длину вектора $\overline{A_1A_2}$:

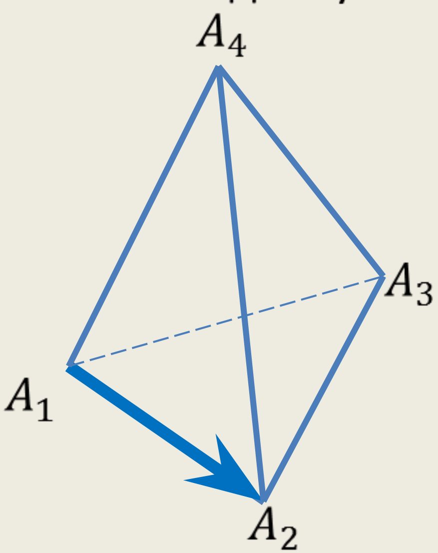
$$\left|\overline{A_1A_2}\right| =$$

ДАНЫ координаты точек $A(1,1,1);\ B(2,0,2), C(2,2,2), D(3,4,-3)$.

ПРОВЕРИТЬ: находятся эти точки в ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ или нет.

значит, векторы НЕКОМПЛАНАРНЫ, то есть точки A, B, C и D НЕ ЛЕЖАТ в одной плоскости.

Точки A, B, C и D находятся в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны.



Дано: $A_1(1;-1;2)$; $A_2(2;1;2)$; $A_3(1;1;4)$; $A_4(6;-3;8)$.

2. Для вычисления угла между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$ найдем их координаты:

$$\overline{A_1A_2} = (1,2,0); \qquad \overline{A_1A_4} = (6-1,-3-(-1),8-2) = (5,-2,6).$$

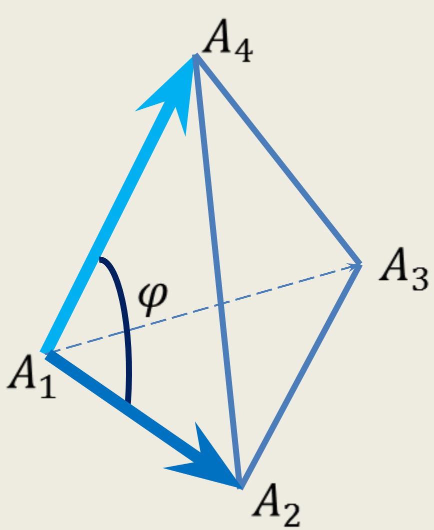
Применим формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4})}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|};$$

Скалярное произведение в числителе получим как сумму произведений соответствующих координат:

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}) = 1\cdot 5 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 6 = 5-4+0 = 1;$$

Вычислим длины векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$ (как в пункте 1):



$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{5};$$

$$|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{5^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65};$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}} = \frac{1}{5\sqrt{13}}; \quad \varphi = \arccos\frac{1}{5\sqrt{13}};$$

Дано: $A_1(1;-1;2)$; $A_2(2;1;2)$; $A_3(1;1;4)$; $A_4(6;-3;8)$.

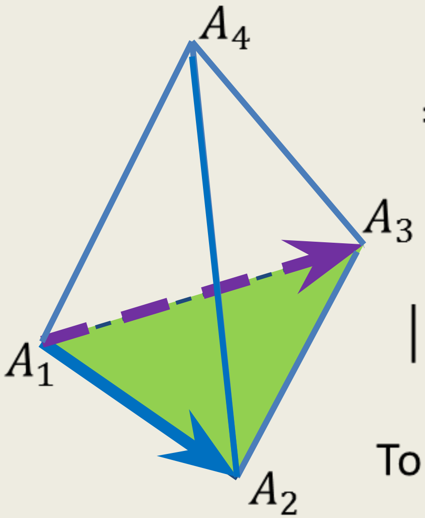
3. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$ будем вычислять, исходя из геометрического смысла векторного произведения: $S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot \left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right|$

$\overline{A_1A_2} = (1,2,0)$; $\overline{A_1A_3} = (1-1, 1-(-1), 4-2) = (0,2,2)$.

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(4-0) - \bar{j}(2-0) + \bar{k}(2-0) = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k} = (4;\ -2;2);$$



Модуль векторного произведения

$$\left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right| = \sqrt{4^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6};$$

Тогда площадь треугольника $A_1A_2A_3$ равна : $S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$;

Дано: $A_1(1;-1;2)$; $A_2(2;1;2)$; $A_3(1;1;4)$; $A_4(6;-3;8)$.

4. Объем V пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ численно равен $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения

векторов, образующих данную пирамиду, например, векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_4A_4}$;

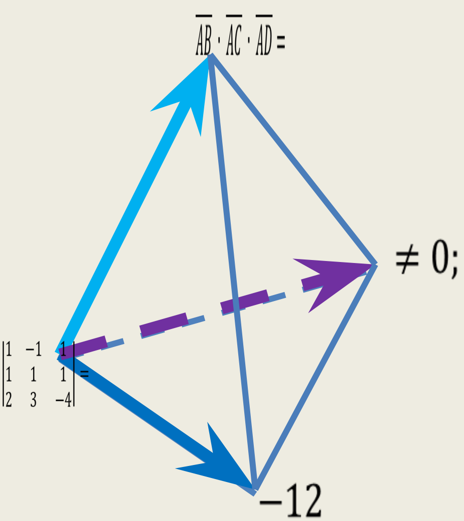
Из предыдущих заданий известны их координаты:

$$\overline{A_1A_2} = (1, 2, 0); \quad \overline{A_1A_3} = (0, 2, 2); \quad \overline{A_1A_4} = (5, -2, 6);$$

Вычислим их смешанное произведение как определитель третьего порядка, составленный из координат ВЕКТОРОВ (разложением по первой строке):

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 16 + 20 = 36;$$



Чтобы вычислить V объем ПИРАМИДЫ $A_1A_2A_3A_4$, надо

взять одну шестую часть

модуля :

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} \right| = \frac{1}{6} \cdot |36| = 6;$$

A 2

A 1

$S_{треуг} =$ $V_{пир} = 6;$

Вспомним другую формулу для вычисления этого же объема, в

которой используется длина высоты пирамиды:

$$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot h \quad ,$$

где

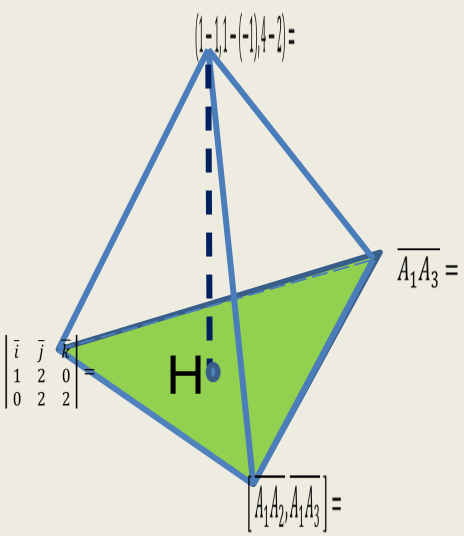
$$\frac{1}{2} \cdot \left|\left[\, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \,\right]\right|$$

h – длина высоты A_4H, опущенной на основание $A_1A_2A_3$ (ее надо найти).

$$\overline{A_1A_2} = (1, 2, 0);$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot h \Rightarrow \; h = \frac{3 \cdot V_{пир}}{S_{\Delta}} \; ;$$

$$\left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right| =$$



$$(0, 2, 2). \quad \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} =$$ **ОТВ ЕТ**

Дано: $A_1(1;-1;2)$; $A_2(2;1;2)$; $A_3(1;1;4)$; $A_4(6;-3;8)$.

$$\sqrt{16+4+4} =$$

с серединой стороны A_4A_3.

Найдем вектор $\overline{A_1K}$ как половину диагонали $\overline{A_1D}$ параллелограмма $A_1A_4DA_3$:

$$\frac{1}{6} \quad \overline{A_1A_3} + \overline{A_1A_4}; \quad \overline{A_1K} = \quad \overline{A_1A_3} = (0,2,2); \quad \overline{A_1A_4} = (5,-2,6);$$

(смотри задачи 1 и 2 практики №7).

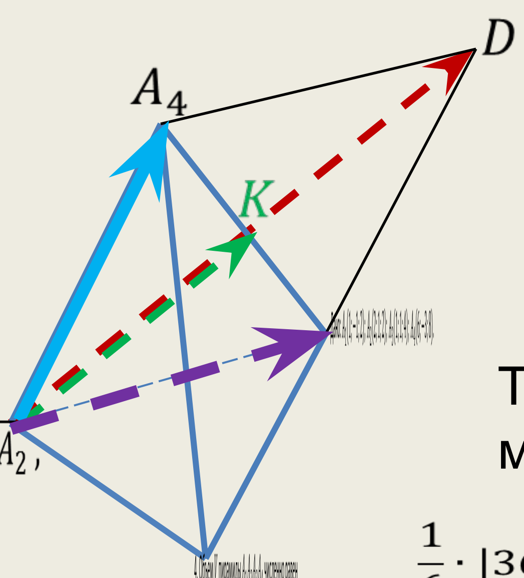
В пункте 2 нашли $\overline{A_1A_4} = (5,-2,6)$;

$$2\sqrt{6};$$

Выполним действия с координатами :

$$\overline{A_1A_3}, \quad \overline{A_1A_4}; \quad \overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 = = 16 + 20 = 36;$$



$\overline{A_1A_2}$,

Тогда длина медианы

$$\frac{1}{6}\cdot|36| = V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{\frac{25}{4}+16} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \quad 6;$$

ОТВЕТ