

**Степень с рациональным  
показателем**

Вам уже знакомо понятие степени числа с целым показателем. Выражение  $a^n$  определено для всех  $a$  и  $n$ , кроме случая  $a = 0$  при  $n < 0$ . Напомним свойства таких степеней.

Для любых чисел  $a, b$  и любых целых чисел  $m$  и  $n$  справедливы равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0);$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0);$$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Отметим также следующее свойство:

Если  $m > n$ , то  $a^m > a^n$  при  $a > 1$  и  $a^m < a^n$  при  $0 < a < 1$ .

Определение. Степенью числа  $a > 0$  с рациональным показателем  $r = \frac{m}{n}$ , где  $m$  — целое число, а  $n$  — натуральное ( $n > 1$ ), называется число  $\sqrt[n]{a^m}$ .

Итак, по определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (1)$$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей; по определению  $0^r = 0$  для любого  $r > 0$ .

■ Пример 1. По определению степени с рациональным показателем

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}; \quad 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}; \quad a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}.$$

Пример 2. Найдем значения числовых выражений  $8^{\frac{1}{3}}$ ,  $81^{\frac{3}{4}}$ ,  $128^{-\frac{2}{7}}$ .

По определению степени с рациональным показателем и свойствам корней, имеем  $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ ;  $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$ ;  $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ .

Замечание 1. Из определения степени с рациональным показателем сразу следует, что для любого положительного  $a$  и любого рационального  $r$  число  $a^r$  положительно.

Замечание 2. Любое рациональное число допускает различные записи его в виде дроби, поскольку  $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$  для любого натурального  $k$ . Значение  $a^r$  также не зависит от формы записи рационального числа  $r$ . В самом деле, из свойств корней следует,

что  $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ .

Покажем теперь, что при сформулированном выше определении степени с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для любых показателей (разница заключается в том, что приводимые далее свойства верны только для положительных оснований).

Для любых рациональных чисел  $r$  и  $s$  и любых положительных  $a$  и  $b$  справедливы равенства:

$$1^0. \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

$$2^0. \quad a^r : a^s = a^{r-s}.$$

$$3^0. \quad (a^r)^s = a^{rs}.$$

$$4^0. \quad (ab)^r = a^r \cdot b^r.$$

$$5^0. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Отметим следующие два свойства степеней с рациональными показателями:

6<sup>0</sup>. Пусть  $r$  — рациональное число и  $0 < a < b$ . Тогда

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0,$$

$$a^r > b^r \text{ при } r < 0.$$

7<sup>0</sup>. Для любых рациональных чисел  $r$  и  $s$  из неравенства  $r > s$  следует, что

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1,$$

$$a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1.$$

Докажем свойство 6<sup>0</sup>. Если  $r > 0$ , то  $r$  можно записать в виде  $r = \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Из неравенства  $0 < a < b$  и свойств степени с целым показателем следует, что  $a^m < b^m$ .



По свойству корней (свойство 6<sup>0</sup>, п. 32) из этого неравенства получаем  $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$ , т. е.  $a^r < b^r$ .

В случае  $r < 0$  проводится аналогичное рассуждение.

Для доказательства свойства 7<sup>0</sup> приведем сначала рациональные числа  $r$  и  $s$  к общему знаменателю:  $r = \frac{m}{n}$  и  $s = \frac{p}{n}$ , где  $n$  — натуральное число, а  $m$  и  $p$  — целые. Из неравенства  $r > s$  следует,

что  $m > p$ . Если  $a > 1$ , то  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$  и по свойству степени с целым показателем

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p.$$

Остается заметить, что

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^r \quad \text{и} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}} = a^s.$$

Случай  $0 < a < 1$  разбирается аналогично.

■ Пример 5. Сравним числа  $\sqrt[5]{8}$  и  $2^{\frac{2}{3}}$ .

Запишем  $\sqrt[5]{8}$  в виде степени с рациональным показателем:

$$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}.$$

По свойству  $7^0$  получаем  $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$ , так как  $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ .

Пример 6. Сравним числа  $2^{300}$  и  $3^{200}$ .

Запишем эти числа в виде степеней с одинаковым показателем:

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}; \quad 3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

Так как  $8 < 9$ , по свойству  $6^0$  получаем

$$8^{100} < 9^{100}, \text{ т. е. } 2^{300} < 3^{200}.$$

■ Пример 3. Найдем значение выражения  $\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}$ .

$$\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10.$$

Приведём примеры применения свойств степени:

$$1) 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 7;$$

$$2) 9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$$

$$3) \left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$$

$$4) 24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4^{\sqrt[3]{3^2}} = 4^{\sqrt[3]{9}};$$

$$5) \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8;$$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 7} = 7 \sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

3. Примеры применения тождеств сокращенного умножения к действиям над степенями:

$$1) (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = a - b.$$

$$2) (a^{\frac{1}{3}} \pm b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} \mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a \pm b.$$

$$3) a^{\frac{3}{2}} \pm b^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 \pm (b^{\frac{1}{2}})^3 = (a^{\frac{1}{2}} \pm b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} \mp a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b).$$

$$4) a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2 - (b^{\frac{1}{3}})^2 = (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}).$$

Вычислить (57—60).

57 1)  $64^{\frac{1}{2}}$ ; 2)  $27^{\frac{1}{3}}$ ; 3)  $8^{\frac{2}{3}}$ ; 4)  $81^{\frac{3}{4}}$ ; 5)  $16^{-0,75}$ ; 6)  $9^{-1,5}$ .

58 1)  $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$ ; 2)  $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$ ; 3)  $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$ ; 4)  $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$ ; 5)  $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$ .

59 1)  $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$ ; 2)  $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$ ; 3)  $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$ ; 4)  $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$ .

60 1)  $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ ; 2)  $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$ ;

3)  $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$ ; 4)  $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$ .



Пример 3. Найдем значение выражения  $\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}$ .

Пример 4. Преобразуем выражения:

а)  $\frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$ ;

б)  $\frac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}}$ .

Пример 5. Сравним числа  $\sqrt[5]{8}$  и  $2^{\frac{2}{3}}$ .



1. Упростить выражение:

1)  $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}}$ ; 2)  $16^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{6}}$ ; 3)  $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{3}}$ ; 4)  $25^{\frac{2}{3}}$ ; 5)  $(\frac{27}{64})^{\frac{1}{3}}$ .

2. Вычислить:

1)  $(\frac{9}{16})^{\frac{1}{2}} + (\frac{2}{3})^{-1}$ ; 2)  $(\frac{1}{8} \cdot 125^{-1})^{-\frac{1}{3}}$ ; 3)  $(2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}} : (\frac{3}{4})^{-2}$ .

— Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1;$$

$$\text{б) } \left( \frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} \right)^2 \cdot \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\text{в) } \frac{a^{\frac{4}{3}} - 27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}} : \left( 1 - 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) - \sqrt[3]{a^2};$$

$$\text{г) } \left( \frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{m^3 + 2\sqrt{2}} \right) \cdot \left( \frac{m}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m} \right).$$

