Степень с рациональным показателем

Вам уже знакомо понятие степени числа с целым показателем. Выражение a^n определено для всех a и n, кроме случая $a = 0$ при $n \leqslant 0$. Напомним свойства таких степеней.

Для любых чисел a, b и любых целых чисел m и n справедливы равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \; a^m : a^n = a^{m-n} \; (a \neq 0);$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \; (b \neq 0);$$

$$a^1 = a; \; a^0 = 1 \; (a \neq 0).$$

Отметим также следующее свойство:

Если $m > n$, то $a^m > a^n$ при $a > 1$ и $a^m < a^n$ при $0 < a < 1$.

Определение. ***Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.***

Итак, по определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей; по определению $0^r = 0$ для любого $r > 0$.

Пример 1. По определению степени с рациональным показателем

$$7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{7};\quad 2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};\quad a^{-\frac{7}{15}}=\sqrt[15]{a^{-7}}.$$

Пример 2. Найдем значения числовых выражений $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $128^{-\frac{2}{7}}$.

По определению степени с рациональным показателем и свойствам корней, имеем $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$; $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$; $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Замечание 1. Из определения степени с рациональным показателем сразу следует, что для любого положительного a и любого рационального r число a^r положительно.

Замечание 2. Любое рациональное число допускает различные записи его в виде дроби, поскольку $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ для любого натурального k. Значение a^r также не зависит от формы записи рационального числа r. В самом деле, из свойств корней следует, что $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Покажем теперь, что при сформулированном выше определении степени с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для любых показателей (разница заключается в том, что приводимые далее свойства верны только для положительных оснований).

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных a и b справедливы равенства:

$$1^0.\quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

$$2^0.\quad a^r : a^s = a^{r-s}.$$

$$3^0.\quad (a^r)^s = a^{rs}.$$

$$4^0.\quad (ab)^r = a^r \cdot b^r.$$

$$5^0.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Отметим следующие два свойства степеней с рациональными показателями:

6^0. Пусть r — рациональное число и $0 < a < b$. Тогда

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0,$$
$$a^r > b^r \text{ при } r < 0.$$

7^0. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует, что

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1,$$
$$a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1.$$

Докажем свойство 6^0. Если $r > 0$, то r можно записать в виде $r = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Из неравенства $0 < a < b$ и свойств степени с целым показателем следует, что $a^m < b^m$.

По свойству корней (свойство 6^0, п. 32) из этого неравенства получаем $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$, т. е. $a^r < b^r$.

В случае $r < 0$ проводится аналогичное рассуждение.

Для доказательства свойства 7^0 приведем сначала рациональные числа r и s к общему знаменателю: $r = \frac{m}{n}$ и $s = \frac{p}{n}$, где n — натуральное число, а m и p — целые. Из неравенства $r > s$ следует, что $m > p$. Если $a > 1$, то $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$ и по свойству степени с целым показателем $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$.

Остается заметить, что

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = a^r \quad \text{и} \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = a^{\frac{p}{n}} = a^s.$$

Случай $0 < a < 1$ разбирается аналогично.

Пример 5. Сравним числа $\sqrt[5]{8}$ и $2^{\frac{2}{3}}$.

Запишем $\sqrt[5]{8}$ в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$.

По свойству 7^0 получаем $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$, так как $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.

Пример 6. Сравним числа 2^{300} и 3^{200}.

Запишем эти числа в виде степеней с одинаковым показателем:

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}; \; 3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

Так как $8 < 9$, по свойству 6^0 получаем

$$8^{100} < 9^{100}, \text{ т. е. } 2^{300} < 3^{200}.$$

Пример 3. Найдем значение выражения $\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}$.

$$\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=2^1\cdot 5^1=10.$$

Приведём примеры применения свойств степени:

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3}.$

$$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8;$$

$$7^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{7^5}=\sqrt[4]{7^4\cdot 7}=7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}=\sqrt[3]{3^{-6}}=\sqrt[3]{(3^{-2})^3}=3^{-2}=\frac{1}{9}.$$

3. Примеры применения тождеств сокращенного умножения к действиям над степенями:

1) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})=a-b.$

2) $(a^{\frac{1}{3}}\pm b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}\mp a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=a\pm b.$

3) $a^{\frac{3}{2}}\pm b^{\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3\pm(b^{\frac{1}{2}})^3=(a^{\frac{1}{2}}\pm b^{\frac{1}{2}})(a\mp a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b).$

4) $a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}=(a^{\frac{1}{3}})^2-(b^{\frac{1}{3}})^2=(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}).$

Вычислить (57—60).

57 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$; 4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

58 1) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}} \cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{5}{6}}$; 5) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

59 1) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$.

60 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}} : 8^{\frac{2}{7}} - 3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5} + \left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

Пример 3. Найдем значение выражения $\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}}$.

Пример 4. Преобразуем выражения:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}}$.

Пример 5. Сравним числа $\sqrt[5]{8}$ и $2^{\frac{2}{3}}$.

1. Упростить выражение:

1) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{3}{4}}$; 2) $16^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{6}}$; 3) $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{4}{3}}$; 4) $25^{\frac{2}{3}}$; 5) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$.

2. Вычислить:

1) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{1}{8} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 3) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

— Упростите выражение:

а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1;$

б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}};$

в) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)-\sqrt[3]{a^2};$

г) $\left(\dfrac{1}{m+\sqrt{2}}-\dfrac{m^2+4}{m^3+2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{m}\right).$