

## Кратные, криволинейные

## и поверхностные интегралы

### Двойные интегралы

Опр.  $P$ -плоская фигура,  $\mu(P)$ -площадь:

1.  $\mu(P) \geq 0$

2.  $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3.  $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4.  $P$ -един. квадрат  $\Rightarrow \mu(P) = 1$

# Кратные, криволинейные

## и поверхностные интегралы

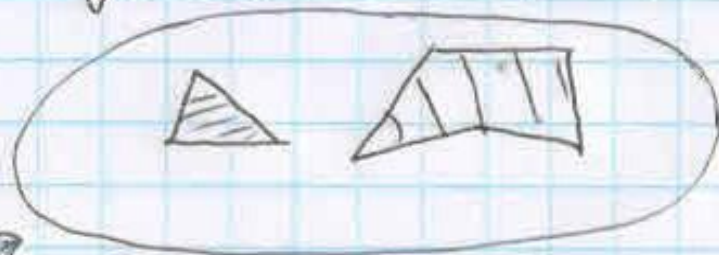
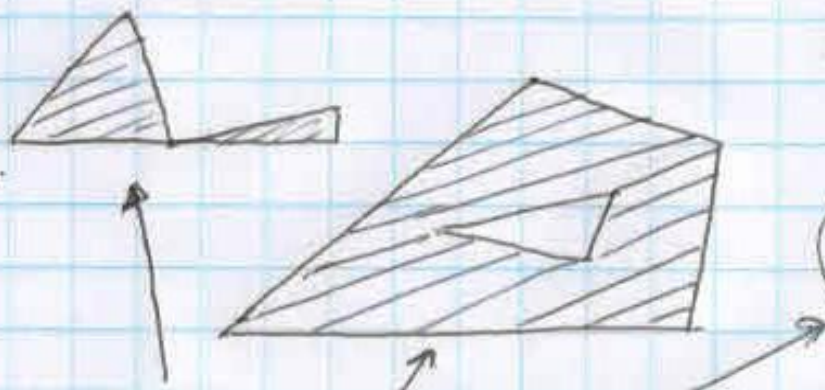
### Двойные интегралы

Опр.  $P$ -плоская фигура,  $\mu(P)$ -площадь:

1.  $\mu(P) \geq 0$
2.  $P_1 \subset P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3.  $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4.  $P$ -един. квадрат  $\Rightarrow \mu(P) = 1$

$P$ -многоугольник,  $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

-удовлетв. 1-4.



Многоугольники

$\emptyset$ -тоже мн.-к,  $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$



# Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

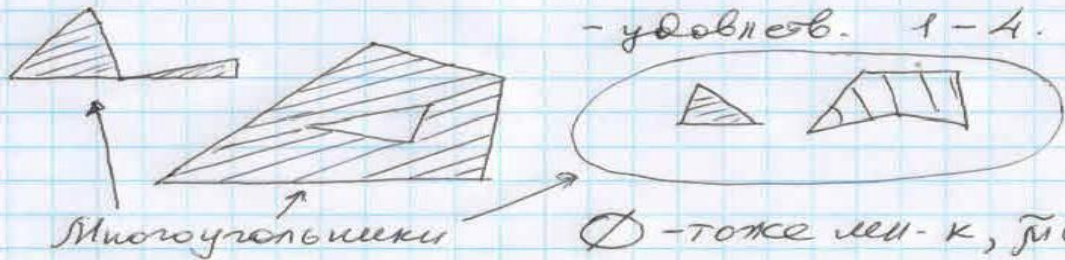
## Двойные интегралы

Опр.  $P$ -плоская фигура.  $\mu(P)$ -площадь:

1.  $\mu(P) \geq 0$
2.  $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3.  $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4.  $P$ -един. квадрат  $\Rightarrow \mu(P) = 1$

$P$ -многоугольник,  $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

-удовлетв. 1-4.



$P$ -плоская фигура;  $Q, S$ -мн-ки:  $Q \subset P \subset S$

$Q$ -вписанный мн-к,  $S$ -описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$  - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$  - верхняя площадь

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$$

$S$ -фикс.  $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -опр. сверху  $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$  опр. снизу  $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$ ,  $\underline{\mu}(P)$  - одна

из нижних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$ .



Кратные, криволинейные  
и поверхностные интегралы

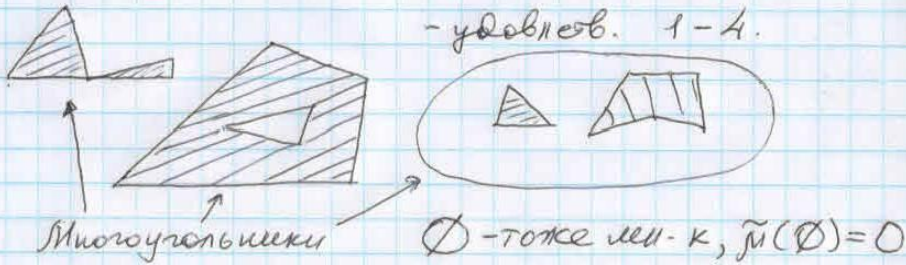
Двойные интегралы

Опр.  $P$ -плоская фигура,  $\mu(P)$ -площадь:

1.  $\mu(P) \geq 0$
2.  $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3.  $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4.  $P$ -един. квадрат  $\Rightarrow \mu(P) = 1$

$P$ -многоугольник,  $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

-удовлетв. 1-4.



$P$ -плоская фигура;  $Q, S$ -мн.-ки:  $Q \subset P \subset S$

$Q$ -вписанный мн.-к,  $S$ -описанный мн.-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$  - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$  - верхняя площадь

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$$

$S$ -фикс.  $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -отр. сверху  $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$  отр. снизу  $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$ ,  $\underline{\mu}(P)$  - одна

из нижних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$ .

Опр  $P$  назыв. квадратируемой фигурой, если  $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ . При этом  $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ .

Ранее было установлено, что 1-4 выполняются и если  $P$ -мн.-к, то  $\exists \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$ .



Кратные, криволинейные  
и поверхностные интегралы

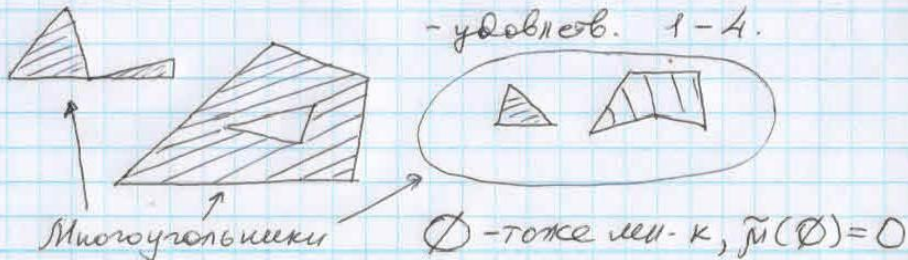
Двойные интегралы

Опр.  $P$ -плоская фигура.  $\mu(P)$ -площадь:

1.  $\mu(P) \geq 0$
2.  $P_1 \subset P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3.  $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4.  $P$ -един. квадрат  $\Rightarrow \mu(P) = 1$

$P$ -многоугольник,  $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

-удовлетв. 1-4.



$P$ -плоская фигура;  $Q, S$ -мн.-ки:  $Q \subset P \subset S$

$Q$ -вписанный мн.-к,  $S$ -описанный мн.-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$  -нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$  -верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

$S$ -фикс.  $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -огр. сверху  $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$  огр. снизу  $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$ ,  $\underline{\mu}(P)$  -одна

из нижних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$ .

Опр.  $P$  назыв. квадратуемой фигурой, если  $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ . При этом  $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ .

Ранее было установлено, что 1-4 выполняются

и если  $P$ -мн.-к, то  $\exists \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$ .

Т1.  $P$ -квдр. фигура  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S :$

$Q \subset P \subset S$ , причем  $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$ .



Кратные, криволинейные  
и поверхностные интегралы

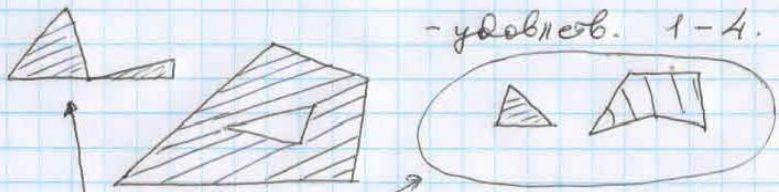
Двойные интегралы

Опр.  $P$ -плоская фигура.  $\mu(P)$ -площадь:

1.  $\mu(P) \geq 0$
2.  $P_1 \supset P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3.  $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4.  $P$ -един. квадрат  $\Rightarrow \mu(P) = 1$

$P$ -многоугольник,  $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

-удовлетв. 1-4.



Многоугольники

$\emptyset$ -тоже мн-к,  $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$

$P$ -плоская фигура;  $Q, S$ -мн-ки:  $Q \subset P \subset S$

$Q$ -вписанный мн-к,  $S$ -описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$  - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S))$  - верхняя площадь

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$$

$S$ -фикс.  $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -опр. сверху  $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$  опр. снизу  $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$ ,  $\underline{\mu}(P)$  - одна

из нижних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$ .

Опр.  $P$  назыв. квадратуремой фигурой, если  $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ . При этом  $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ .

Ранее было установлено, что 1-4 выполняются

и если  $P$ -мн-к, то  $\exists \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$ .

Т1.  $P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S :$

$Q \subset P \subset S$ , причем  $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \epsilon$ .

$\Leftrightarrow P$ -квадр. фигура, т.е.  $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

$\underline{\mu}(P), \overline{\mu}(P)$  - точные грани  $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$

$$\mu(P) = \underline{\mu}(P) < \tilde{\mu}(Q) + \frac{\epsilon}{2}, \text{ т.е. } -\tilde{\mu}(Q) < -\mu(P) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\mu(P) = \overline{\mu}(P) > \tilde{\mu}(S) - \frac{\epsilon}{2}, \text{ т.е. } \tilde{\mu}(S) < \mu(P) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q)} < (\mu(P) + \frac{\epsilon}{2}) + (-\mu(P) + \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon.$$



Кратные, криволинейные  
и поверхностные интегралы

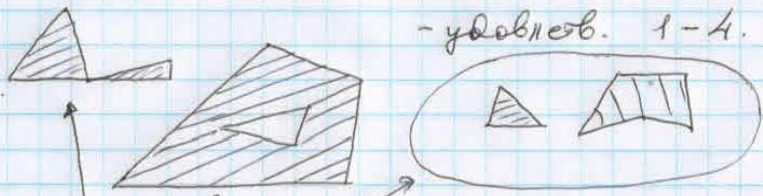
Двойные интегралы

Опр.  $P$ -плоская фигура,  $\mu(P)$ -площадь:

- $\mu(P) \geq 0$
- $P_1 \cap P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
- $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
- $P$ -един. квадрат  $\Rightarrow \mu(P) = 1$

$P$ -многоугольник,  $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

-удовлетв. 1-4.



Многоугольнички  $\emptyset$ -тоже мн-к,  $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$

$P$ -плоская фигура;  $Q, S$ -мн-ки:  $Q \subset P \subset S$

$Q$ -вписанный мн-к,  $S$ -описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$  - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$  - верхняя площадь

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$$

$S$ -фикс.  $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -отр. сверху  $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$  отр. снизу  $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$ ,  $\underline{\mu}(P)$ -одна

из нижних граней  $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$ .

Опр.  $P$  назыв. квадратируемой фигурой, если  $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ . При этом  $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ .

Ранее было установлено, что 1-4 выполняются и если  $P$ -мн-к, то  $\exists \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$ .

Т1.  $P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S :$

$Q \subset P \subset S$ , причем  $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \epsilon$ .

$D$ -во.  $\Rightarrow P$ -квадр. фигура, т.е.  $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

$\underline{\mu}(P), \overline{\mu}(P)$ -точные грани  $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S$

$$\mu(P) = \underline{\mu}(P) < \tilde{\mu}(Q) + \frac{\epsilon}{2}, \text{ т.е. } -\tilde{\mu}(Q) < -\mu(P) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\mu(P) = \overline{\mu}(P) > \tilde{\mu}(S) - \frac{\epsilon}{2}, \text{ т.е. } \tilde{\mu}(S) < \mu(P) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q)} < (\mu(P) + \frac{\epsilon}{2}) + (-\mu(P) + \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon.$$

$\Leftarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S : Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \epsilon$

$$\tilde{\mu}(Q) \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \forall \epsilon > 0$$

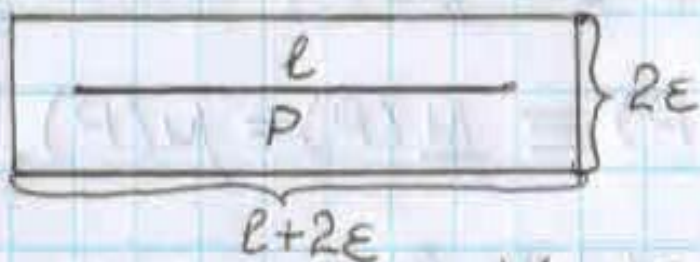
$$0 \leq \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \epsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) = 0,$$

т.е.  $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$ , т.е.  $P$ -квадратируема.

Теорема Д-Зана.



Площадь отрезка равна нулю(?)



$l$  - длина отрезка  $P$ .

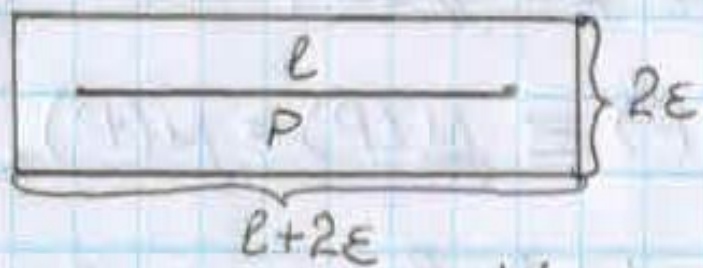
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon) \times (l+2\varepsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (l+2\varepsilon). \quad \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \mu(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$





Площадь отрезка равна нулю(?)

$l$  - длина отрезка  $P$ .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\epsilon = \Pi_{(2\epsilon) \times (l+2\epsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\epsilon) = 2\epsilon \cdot (l + 2\epsilon). \quad \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow$$

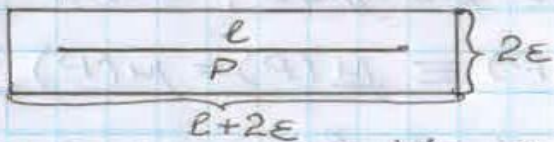
$$\underline{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow \underline{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$

Т2.  $P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$  ( $\overline{\mu}(\partial P) = 0$ ).



Площадь отрезка равна нулю(?)



$l$  - длина отрезка  $P$ .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\epsilon = \Pi_{(2\epsilon) \times (l+2\epsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\epsilon) = 2\epsilon \cdot (l+2\epsilon). \quad \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow$$

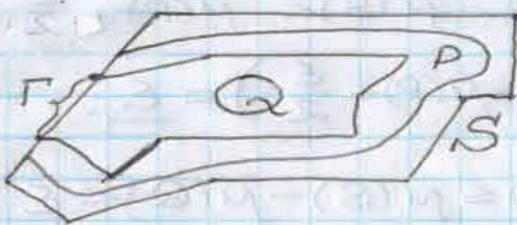
$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$

Т2.  $P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$  ( $\bar{\mu}(\partial P) = 0$ ).

$D$ -во.  $T1 \Rightarrow P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S:$

$$Q \subset P \subset S, \quad 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \epsilon. \quad \text{Граница}$$



$$\partial P \subset (S \setminus Q) \cup \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i, \quad \text{где}$$

$\Gamma_i$  - прямолинейные отрезки

границ  $Q, P$  и  $S$  в совокупности.

$$\text{Положим } \bar{\mu}(\partial P) \leq \underbrace{\tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q)}_{< \epsilon} + \sum_{i=1}^k \underbrace{\bar{\mu}(\Gamma_i)}_{=0}, \quad \text{т.е.}$$

$$\bar{\mu}(\partial P) = 0, \quad \text{т.е. } \mu(\partial P) \leq \epsilon.$$

Итак,  $P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S:$

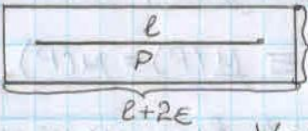
$$Q \subset P \subset S, \quad 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \epsilon \Leftrightarrow \bar{\mu}(\partial P) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0.$$

Теор.  $\partial$ -запа



Площадь отрезка равна нулю!?



$l$  - длина отрезка  $P$ .

$\forall \varepsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon) \times (l+2\varepsilon)}$

$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (l+2\varepsilon), \quad \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$

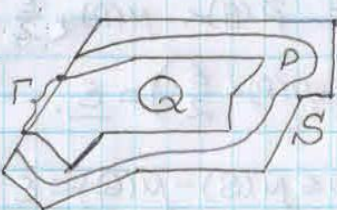
$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0$

$0 \leq \mu(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$

Т.2.  $P$ -кв. фигура  $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$  ( $\bar{\mu}(\partial P) = 0$ ).

$\mathcal{D}$ -во.  $T1 \Rightarrow P$ -кв. фигура  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$Q \subset P \subset S, \quad 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon.$  Граница



$\partial P \subset (S \setminus Q) \cup \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i,$  где

$\Gamma_i$  - прямолинейные отрезки

границы  $Q, P$  и  $S$  в совокупности.

Положим  $\bar{\mu}(\partial P) \leq \underbrace{\tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q)}_{< \varepsilon} + \sum_{i=1}^k \underbrace{\bar{\mu}(\Gamma_i)}_{=0},$  т.е.

$\bar{\mu}(\partial P) = 0,$  т.е.  $\mu(\partial P) \leq \varepsilon.$

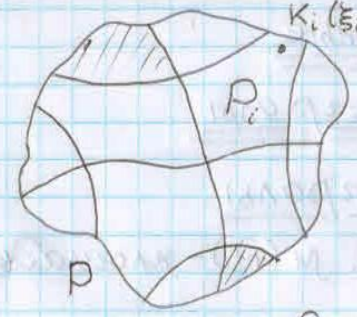
Итак,  $P$ -кв. фигура  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$Q \subset P \subset S, \quad 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{\mu}(\partial P) = 0$

$\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0.$

Теор.  $\partial$ -запа

$\text{diam } P \equiv \sup_{A, B \in P} \rho(A, B)$



Пусть  $P$  - отран. замкн.

ли. во,  $\mu(\partial P) = 0$  (т.е.

$P$ -кв. фигура)

Разобьем  $P$  кривыми линиями

на  $0$  на  $r$  не связ. связных

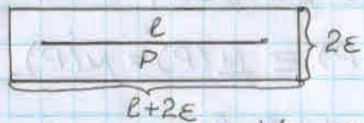
отран. замкн.  $P_i: \mu(P_i) > 0 \quad \forall i.$

$P = \bigcup_{i=1}^r P_i,$  Ясно, что  $\mu(P) = \sum_{i=1}^r \mu(P_i)$

$\mathcal{T} = \{P_i\}_{i=1}^r$  - разбиение,  $\delta_{\mathcal{T}} = \max \text{diam } P_i$  - хар-ка  $\mathcal{T}$



Площадь отрезка равна нулю(!)



$l$  - длина отрезка  $P$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon) \times (l+2\varepsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (l+2\varepsilon), \quad \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

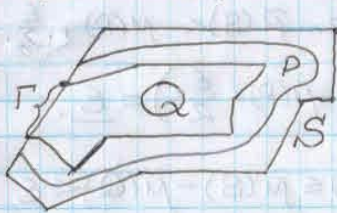
$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$

Т.2.  $P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$  ( $\bar{\mu}(\partial P) = 0$ ).

$D$ -во. Т1  $\Rightarrow P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$$Q \subset P \subset S, \quad 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon. \quad \text{Граница}$$



$$\partial P \subset (S \setminus Q) \cup \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i, \quad \text{где}$$

$\Gamma_i$  - прямолинейные отрезки

границы  $Q, P$  и  $S$  в совокупности.

$$\text{Поставим } \bar{\mu}(\partial P) \leq \underbrace{\tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q)}_{=0} + \sum_{i=1}^k \underbrace{\bar{\mu}(\Gamma_i)}_{=0}, \quad \text{т.е.}$$

$$\bar{\mu}(\partial P) = 0, \quad \text{т.е. } \mu(\partial P) \leq \varepsilon.$$

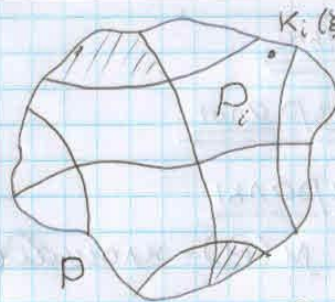
Итак,  $P$ -квадр. фигура  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$$Q \subset P \subset S, \quad 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{\mu}(\partial P) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0.$$

Теор.  $\partial$ -завис

$$\text{diam } P \equiv \sup_{A, B \in P} \rho(A, B)$$



$K_i(\xi_i, \eta_i)$  Пусть  $P$  - оград. замкн.

или во,  $\mu(\partial P) = 0$  (т.е.

$P$ -квадрир. фигура)

Разобьем  $P$  кривыми плоско-

во  $O$  на  $r$  не отвяз. связанных

оград. замкн.  $P_i: \mu(P_i) > 0 \forall i.$

$$P = \bigcup_{i=1}^r P_i, \quad \text{Ясно, что } \mu(P) = \sum_{i=1}^r \mu(P_i)$$

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$  - разбиение,  $\delta_T = \max_i \text{diam } P_i$  - хар-ка  $T$

$$K_i(\xi_i, \eta_i) \in P_i, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad K = \{K_i\}_{i=1}^r$$

Пусть  $f(x, y)$  определена на  $P$ , т.е.  $\forall A(x_0, y_0) \in P$

$\exists f(A) = f(x_0, y_0)$  - число. Интегральная сумма:

$$\sigma_T(f, K) = \sigma_T(f, \{K_i\}) \equiv \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i)$$

Опр. Число  $I$  назыв. пределом инт. суммы  $\sigma_T(f, K)$

при  $\delta_T \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta,$

$$\forall K = \{K_i\} \quad |\sigma_T(f, K) - I| < \varepsilon. \quad I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, K)$$

Опр.  $f(x, y)$  назыв. интегрируемой на  $P$

(опр., замкн., квадр. или во), если  $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, K) = I.$

Число  $I$  назыв. двойным интегралом от  $f(x, y)$

$$\text{по или во } P. \quad I \equiv \iint_P f(x, y) dx dy.$$



Интерпретируем  $\sigma$ -м. суммирование, например  $f(x, y) \equiv 1$ .

$$\forall \mathcal{T} = \{P_i\}_{i=1}^r \quad \forall \mathcal{K} = \{K_i\} \quad \sigma_{\mathcal{T}}(f, \mathcal{K}) = \sum_{i=1}^r 1 \cdot \mu(P_i) = \mu(P) \xrightarrow{(\delta_{\mathcal{T}} \rightarrow 0)} \mu(P), \text{ т.е.}$$

$$\iint_P 1 \cdot dx dy = \mu(P)$$



ТЗ.  $f(x, y)$  непрерывна на  $P \Rightarrow f(x, y)$  ограничена на  $P$ .

Д-во. Пусть  $f(x, y)$  непрерывна на  $P$ , но  $\exists I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, K)$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r, |\sigma_T(f, K) - I| < \varepsilon$ . Берём  $\varepsilon = 1 > 0$

$\exists \delta > 0$ . Берём  $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \delta_T < \delta$ .  $f(x, y)$  непрерывна на  $P \Rightarrow \exists K_k$ ,  
( $1 \leq k \leq r$ ):  $f(x, y)$  непрерывна на  $P_k$ . Берём  $\forall K_i \in P_i$  ( $i \neq k$ ). Берём

$K_k \in P_k : |f(K_k)| > \frac{\sum_{(i \neq k)} |f(K_i)| \mu(P_i) + |I| + 1}{\mu(P_k)}$ . Тогда  $1 = \varepsilon > |\sigma_T(f, K) - I|$

$$= \left| \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) - I \right| \geq |f(K_k) \mu(P_k) - \sum_{(i \neq k)} |f(K_i)| \mu(P_i) - |I|| > 1, \text{ т.е. } 1 > 1$$

Противоречие. Т. о. зана.



$f(x, y)$  - ограниченная на  $P$ -угре, замкн. мн-во;  $\mu(\partial P) = 0$  (т.е. квадрат)

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$  - разбиение  $P$  криволинейными площадями  $P_i$ ,  $\mu(P_i) > 0$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K), \quad m_i = \inf_{K \in P_i} f(K)$$

$$S_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r M_i \cdot \mu(P_i) - \text{верхняя сумма Дарбу}$$

$$s_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r m_i \cdot \mu(P_i) - \text{нижняя сумма Дарбу}$$

$$\forall K_i \in P_i \quad m_i \leq f(K_i) \leq M_i \quad \cdot \mu(P_i) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^r$$

$$\Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, \{K_i\}) \leq s_T(f)$$