

Кратные, криволинейные
и поверхности интегралы

Двойные интегралы

Оп. Р - плоская фигура, $\mu(P)$ - площадь:

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. Р - един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Кратные, криволинейные

и поверхностные интегралы

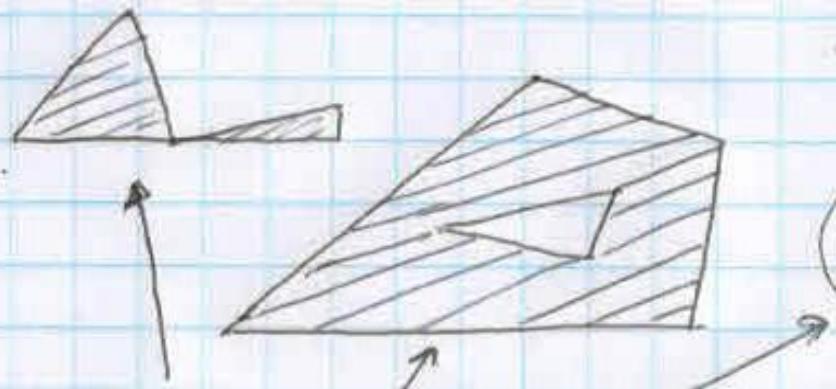
Двойные интегралы

Опред. P -плоская фигура. $\mu(P)$ -площадь:

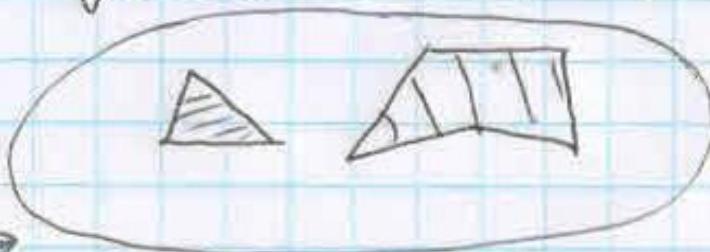
1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \asymp P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P -един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P -многогранник, $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

- удовл. 1-4.



Многогранники



\emptyset -тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

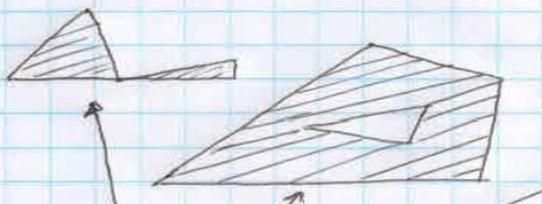
Двойные интегралы

Оп. P -плоская фигура. $\mu(P)$ -площадь:

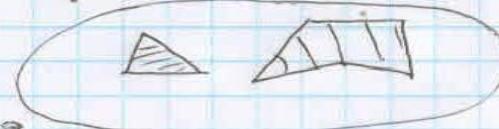
1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \asymp P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P -един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P -многогранник, $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

- уловл. 1-4.



Многогранники



\emptyset -тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$

P -плоская фигура; Q, S -мн-ки: $Q \subset P \subset S$

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S))$ - верхняя площадь

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \underline{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$$

S -фиг. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -опр. сверху $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ опр. снизу $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$, $\overline{\mu}(P)$ -одна из нижних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

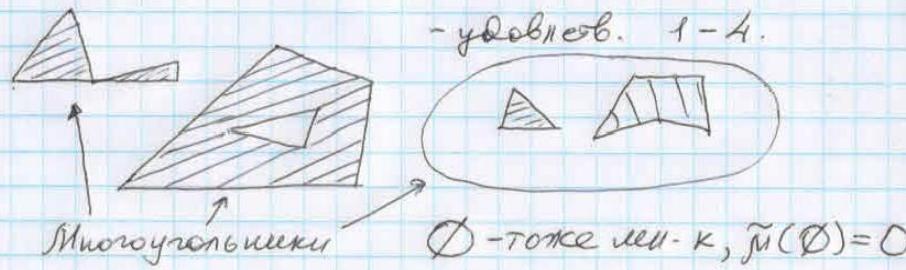
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

Оп. Р - плоская фигура, $\mu(P)$ - площадь, и если P - мн-к, то $\exists \tilde{\mu}(P) = \tilde{\mu}(P)$.

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \subseteq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P - един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P -многогранник, $\tilde{\mu}(P)$ - его площадь -



P -плоская фигура; Q, S - мн-ки : $Q \subset P \subset S$

Q - вписанный мн-к, S - описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S))$ - верхняя площадь

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$$

S -фиг. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ - опр. сверху $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ - одна из верхних граний $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ опр. снизу $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$, $\overline{\mu}(P)$ - одна

из нижних граний $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Оп. Р наслв. квадрируемой фигурой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1-4. восполняют

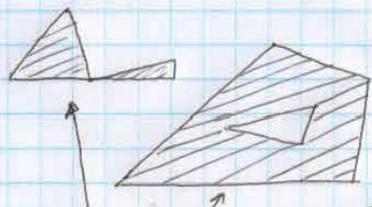
Кратные, криволинейные
и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

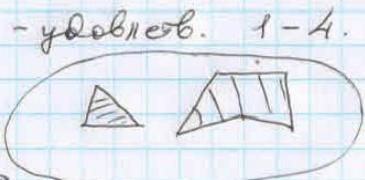
Оп. Р-плоская фигура. $\mu(P)$ -площадь, и если Р-мн-к, то $\exists \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$.

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \asymp P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. Р-един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Р-многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -



Многоугольники



\emptyset - тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$

Р-плоская фигура; Q, S - мн-ки : $Q \subset P \subset S$

Q - вписанный мн-к, S - описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S))$ - верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

S-фиг. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -опр. сверху $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних границ $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ опр. снизу $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$, $\overline{\mu}(P)$ -одна

из нижних границ $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Оп. Р назв. квадрируемой фигурой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1-4 выполняются

T1. Р-квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S :$

$Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

Оп. Р-плоская фигура. $\mu(P)$ -площадь.

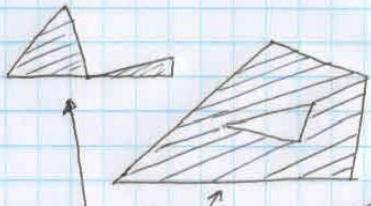
$$1. \underline{\mu}(P) \geq 0$$

$$2. P_1 \subset P_2 \Rightarrow \underline{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_2)$$

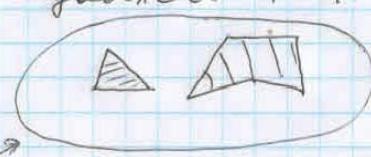
$$3. P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \underline{\mu}(P_1) + \underline{\mu}(P_2)$$

$$4. P - \text{един. квадрат} \Rightarrow \underline{\mu}(P) = 1$$

P-многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -
-убывающ. 1-4.



Многоугольники



\emptyset -тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$

P-плоская фигура; Q, S-мн-ки: $Q \subset P \subset S$

Q - вписанный мн-к, S - описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S))$ - верхняя площадь

$$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$$

S-фиг. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -опр. сверху $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних границ $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ опр. снизу $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$, $\overline{\mu}(P)$ -одна

из нижних границ $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Оп. Р наст. квадрируемой фигуры, если
 $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\underline{\mu}(P) \equiv \tilde{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1-4 восполняют
и если Р-мн-к, то $\exists \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$.

T1. Р-квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S :$

$Q \subset P \subset S$, при чем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$.

D-ко. \Rightarrow Р-квадр. фигура, т.е. $\underline{\mu}(P) = \mu(P) = \overline{\mu}(P)$

$\mu(P), \overline{\mu}(P)$ -точные грани $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S: Q \subset P \subset S$

$$\mu(P) = \underline{\mu}(P) < \tilde{\mu}(Q) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } -\tilde{\mu}(Q) < -\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) > \tilde{\mu}(S) - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } \tilde{\mu}(S) < \overline{\mu}(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\overline{\mu}(P) + \frac{\varepsilon}{2}) + (-\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) = \underline{\varepsilon}.$$

Кратные, криволинейные и поверхности интегралы

Двойные интегралы

Оп. Р-плоская фигура, $\mu(P)$ -площадь.

$$1. \underline{\mu}(P) \geq 0$$

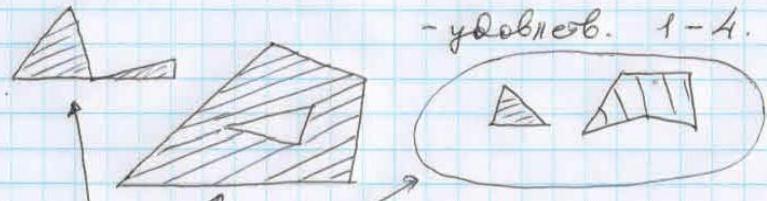
$$2. P_1 \asymp P_2 \Rightarrow \underline{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_2)$$

$$3. P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \underline{\mu}(P_1) + \underline{\mu}(P_2)$$

$$4. P\text{-един. квадрат} \Rightarrow \underline{\mu}(P) = 1$$

P-многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ -его площадь -

- уловил. 1-4.



Многоугольники

\emptyset - тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$

P-плоская фигура; Q, S-мн-ки: $Q \subset P \subset S$

Q - вписанный мн-к, S - описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ - верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

S-верх. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ -опр. сверху $\Rightarrow \exists \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ -одна из верхних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ опр. снизу $\Rightarrow \exists \overline{\mu}(P)$, $\overline{\mu}(P)$ -одна

из нижних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Оп. Р-плоск. квадрируемая фигура, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1-4 выполняются и если Р-ун-к, то $\exists \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$.

T1. Р-квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S :$

$Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$.

D-бо. \Rightarrow Р-квадр. фигура, т.е. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

$\mu(P), \overline{\mu}(P)$ - точные грани $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S : Q \subset P \subset S$

$\mu(P) = \underline{\mu}(P) < \tilde{\mu}(Q) + \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $-\tilde{\mu}(Q) < -\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\mu(P) = \overline{\mu}(P) > \tilde{\mu}(S) - \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\tilde{\mu}(S) < \mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < (\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) + (-\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

$\Leftarrow. \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S : Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

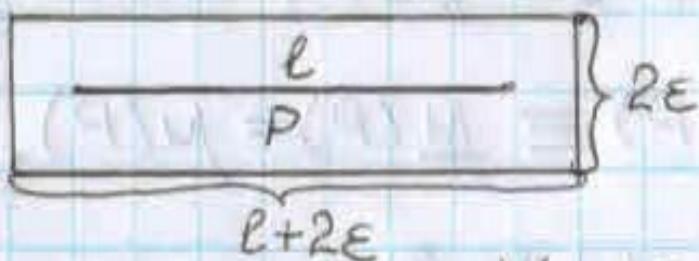
$\tilde{\mu}(Q) \leq \mu(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$0 \leq \overline{\mu}(P) - \mu(P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) - \mu(P) = 0$,

т.е. $\mu(P) = \overline{\mu}(P)$, т.е. Р-квадрируемо.

Теорема D-запа.

Площадь отрезка равна нулю(?)



l - длина отрезка P .

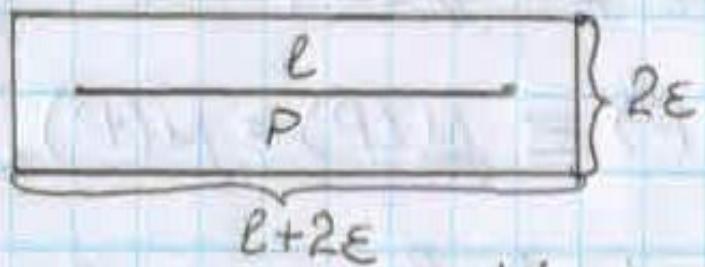
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\varepsilon = \square_{(2\varepsilon) \times (l+2\varepsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (l + 2\varepsilon). \quad \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$

Площадь отрезка равна нулю(?)



l - длина отрезка P .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\epsilon = \prod_{(2\epsilon) \times (l+2\epsilon)}$$

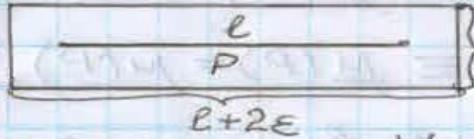
$$\tilde{\mu}(S_\epsilon) = 2\epsilon \cdot (l + 2\epsilon), \quad \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$

Т2. P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\bar{\mu}(\partial P) = 0$).

Площадь отрезка равна нулю(?)



l - длина отрезка P .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon) \times (l+2\varepsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (l + 2\varepsilon). \quad \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

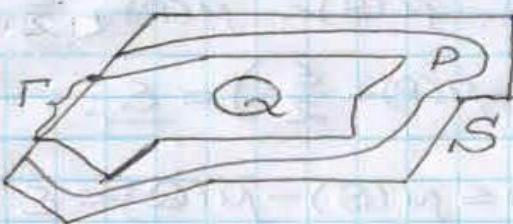
$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0.$$

$$0 \leq \mu(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$

T2. P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\bar{\mu}(\partial P) = 0$).

D-ко. T1 \Rightarrow P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$Q \subset P \subset S$, $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$. Граница



$\partial P \subset (S \setminus Q) \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$, где

Γ_i - прямолинейные отрезки
границы $Q, P \cup S$ в симметрической окрестности.

Последний $\bar{\mu}(\partial P) \leq \underbrace{\tilde{\mu}(S)}_{\tilde{\mu}(Q)} - \tilde{\mu}(Q) + \sum_{i=1}^k \underbrace{\bar{\mu}(\Gamma_i)}_{=0}$, т.е.

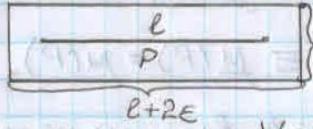
$$\bar{\mu}(\partial P) = 0, \text{ т.е. } \mu(\partial P) \leq \varepsilon = 0.$$

Итак, P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$$Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{\mu}(\partial P) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0.$$

Teor. 2-заня



Площадь отрезка равна нулю(?)

l - длина отрезка P .

ϵ

ϵ

$$\forall \epsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\epsilon = \Pi_{(2\epsilon) \times (l+2\epsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\epsilon) = 2\epsilon \cdot (l+2\epsilon). \quad \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow$$

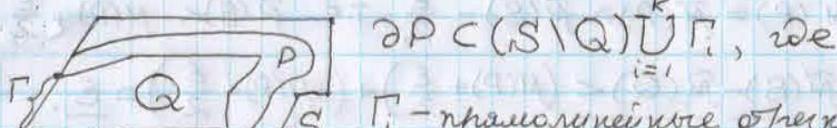
$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\epsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\epsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0.$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \mu(P) = 0.$$

T2. P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\bar{\mu}(\partial P) = 0$).

Д-ко. T1 $\Rightarrow P$ -квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S:$

$Q \subset P \subset S$, $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \epsilon$. Граница



$\partial P \subset (S \setminus Q) \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$, где

Γ_i - прямолинейные отрезки

границ $Q, P \cup S$ в совокупности.

Позже $\bar{\mu}(\partial P) \leq \underbrace{\tilde{\mu}(S)}_{\epsilon} - \underbrace{\tilde{\mu}(Q)}_{<0} + \sum_{i=1}^k \underbrace{\bar{\mu}(\Gamma_i)}_{=0}$, т.е.

$\bar{\mu}(\partial P) = 0$, т.е. $\mu(\partial P) \leq \epsilon$.

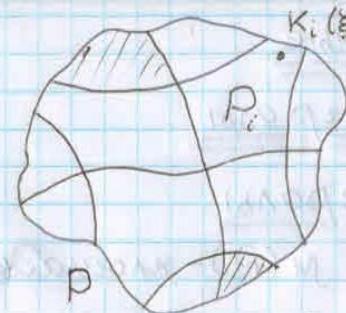
Итак, P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists Q, S:$

$Q \subset P \subset S$, $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \epsilon \Leftrightarrow \bar{\mu}(\partial P) = 0$

$\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$.

Teor. 2-зона

$$\text{diam } P \equiv \sup_{A, B \in P} p(A, B)$$



$K_i(x_i, \eta_i)$ Пусть P - ограниченная замкнутая фигура

и $\mu(\partial P) = 0$ (т.е.

P -квадратурная фигура)

Разбиваем P криволинейной полосой

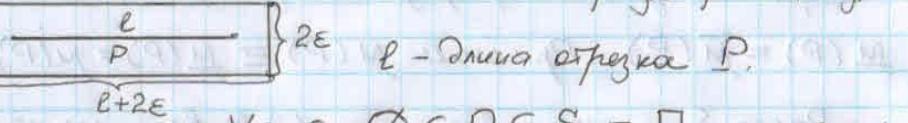
ширины ϵ на r не связанных между собой

ограниченных замкнутых P_i : $\mu(P_i) > 0 \quad \forall i$.

$$P = \bigcup_{i=1}^r P_i. \quad \text{Асно, что } \mu(P) = \sum_{i=1}^r \mu(P_i)$$

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$ - разбиение, $\delta_T = \max \text{diam } P_i$ - характеристика T

Площадь отрезка равна нулю(?)



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \emptyset \subset P \subset S_\varepsilon = \prod_{(2\varepsilon) \times (l+2\varepsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot (l+2\varepsilon). \quad \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

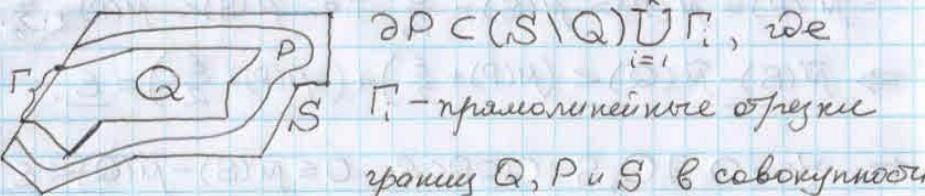
$$\bar{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\varepsilon > 0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists \underline{\mu}(P) = 0.$$

T2. P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$ ($\bar{\mu}(\partial P) = 0$).

Д-ко. $T_1 \Rightarrow P$ -квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$. Граница



$$\partial P \subset (S \setminus Q) \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i, \text{ где}$$

Γ_i - прямолинейное отрезок

границы $Q, P \cup S$ в совокупности.

Поскольку $\bar{\mu}(\partial P) \leq \underbrace{\tilde{\mu}(S)}_{i=1} - \underbrace{\tilde{\mu}(Q)}_{=0} + \sum_{i=1}^k \bar{\mu}(\Gamma_i) = 0$, т.е.

$\bar{\mu}(\partial P) = 0$, т.е. $\mu(\partial P) \leq 0$.

Итак, P -квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Q, S:$

$Q \subset P \subset S, 0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{\mu}(\partial P) = 0$

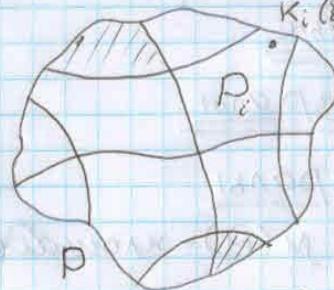
$\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$.

Теор. 2-зап

$$\operatorname{diam} P \equiv \sup_{A, B \in P} \rho(A, B)$$

$K_i(\xi_i, \eta_i)$ Пусть P - ограниченная замкнутая фигура, $\mu(\partial P) = 0$ (т.е.

P -квадратур. фигура)



Разбиваем P криволинейной площадью на r на r не связанных областей P_i : $\mu(P_i) > 0 \forall i$.

$$P = \bigcup_{i=1}^r P_i. \quad \text{Ясно, что } \mu(P) = \sum_{i=1}^r \mu(P_i)$$

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$ - разбиение, $\delta_T = \max_i \operatorname{diam} P_i$ - шаг - ко Т

$$K_i(\xi_i, \eta_i) \in P_i, i = 1, 2, \dots, r; \quad IK = \{K_i\}_{i=1}^r$$

Пусть $f(x, y)$ определена на P , т.е. $\forall A(x_0, y_0) \in P$

$\exists f(A) = f(x_0, y_0)$ - число. Интегральная сумма:

$$\sigma_T(f, IK) = \sigma_T(f, \{K_i\}) \equiv \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i)$$

Опн. Число I назыв. пределом интегральной суммы $\sigma_T(f, IK)$

при $\delta_T \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall T, \delta_T < \delta;$

$$\forall IK = \{K_i\} \quad |\sigma_T(f, IK)| < \varepsilon. \quad I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, IK)$$

Опн. $f(x, y)$ назыв. интегрируемой на P

(огр. замкнут., квадр. ин-во), если $\exists \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, IK) = I$.

Число I назыв. двойной интегралом от $f(x, y)$ по ин-ву P . $I \equiv \iint_P f(x, y) dx dy$.

Интегрируемое φ -изу существо, например $f(x, y) \equiv 1$.

$$\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r \quad \forall K = \{K_i\} \quad \sigma_T(f, |K|) = \sum_{i=1}^r 1 \cdot \mu(P_i) = \mu(P) \xrightarrow{\delta_T \rightarrow 0} \mu(P), \text{ т.е.}$$

$$\iint_P 1 \cdot dx dy = \mu(P)$$

T3. $f(x, y)$ неогр. на $P \Rightarrow f(x, y)$ ограничено на P .

Д-во. Пусть $f(x, y)$ неогр. на P , но $\exists I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, IK)$, т.е. $\forall \epsilon > 0$

$\exists \delta > 0 : \forall T, \delta_T < \delta \quad \forall K = \{K_i\}_{i=1}^r \quad |\sigma_T(f, IK) - I| < \epsilon$. Берём $\epsilon = 1 > 0$

$\exists \delta > 0$. Берём $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^r, \delta_T < \delta$. $f(x, y)$ неогр. на $P \Rightarrow \exists K,$

$(1 \leq k \leq r) : f(x, y)$ неогр. на P_k . Берём $\forall K_i \in P_i (i \neq k)$. Берём

$K_k \in P_k : |f(K_k)| > \frac{\sum_{i=1}^r |f(K_i)| \mu(P_i) + |I| + 1}{\mu(P_k)}$. Тогда $1 = \epsilon > |\sigma_T(f, IK) - I|$

$$= \left| \sum_{i=1}^r f(K_i) \mu(P_i) - I \right| \geq |f(K_k)| \mu(P_k) - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^r |f(K_i)| \mu(P_i) - |I| > 1, \text{ т.е. } 1 > 1$$

Противоречие. Т. д-зана.

$f(x, y)$ - ограниченная на P -ограниченной, нулю; $\mu(\partial P) = 0$ (т.е. квадр.)

$T = \{P_i\}_{i=1}^r$ - разбиение P хувьесиң төңзәли O на P_i , $\mu(P_i) > 0$

$$M_i = \sup_{K \in P_i} f(K), \quad m_i = \inf_{K \in P_i} f(K)$$

$S_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r M_i \cdot \mu(P_i)$ - верхняя сумма Darby

$s_T(f) \equiv \sum_{i=1}^r m_i \cdot \mu(P_i)$ - нижняя сумма Darby

$$\forall K_i \in P_i \quad m_i \leq f(K_i) \leq M_i \quad \cdot \mu(P_i) + \sum_{i=1}^r$$

$$\Rightarrow S_T(f) \leq \sigma_T(f, \{K_i\}) \leq s_T(f)$$