Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

Опр. P - плоская фигура. $\mu(P)$ - площадь:

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \simeq P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P - един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

Опр. P - плоская фигура. $\mu(P)$ - площадь:

1. $\mu(P) \geqslant 0$
2. $P_1 \asymp P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P - един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P - многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ - его площадь — удовлетв. 1 - 4.

Многоугольники $\quad \varnothing$ - тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$

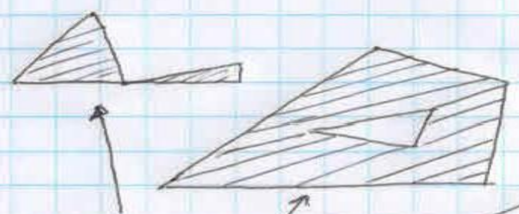
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

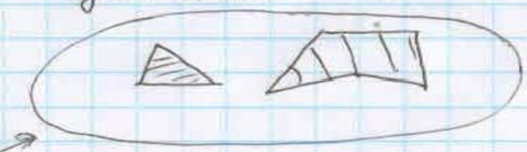
Двойные интегралы

Опр. P - плоская фигура. $\mu(P)$ - площадь:

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P - един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P - многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ - его площадь — удовлетв. 1 - 4.





Многоугольники

$\varnothing$ - тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$

P - плоская фигура; Q, S - мн-ки : $Q \subset P \subset S$

Q - вписанный мн-к, S - описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S)$ - верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

S - фикс. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ - огр. сверху $\Rightarrow \exists\, \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ - одна из верхних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ огр. снизу $\Rightarrow \exists\, \overline{\mu}(P)$, $\underline{\mu}(P)$ - одна из нижних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

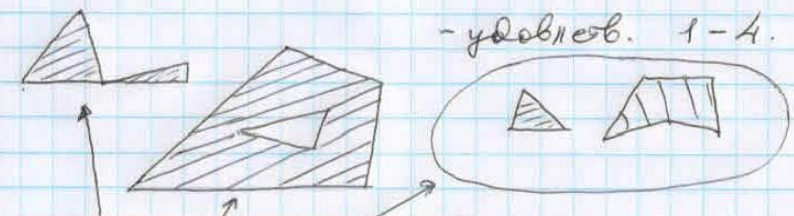
Двойные интегралы

Опр. P — плоская фигура. $\mu(P)$ — площадь:

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P — един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P — многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ — его площадь —

— удовлетв. 1–4.



Многоугольники $\quad \varnothing$ — тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$

P — плоская фигура; Q, S — мн-ки : $Q \subset P \subset S$

Q — вписанный мн-к, S — описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ — нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$ — верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

S — фикс. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ — огр. сверху $\Rightarrow \exists\, \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ — одна из верхних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ огр. снизу $\Rightarrow \exists\, \overline{\mu}(P)$, $\underline{\mu}(P)$ — одна из нижних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Опр. P назыв. квадрируемой фигурой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1÷4 выполняются и если P — мн-к, то $\exists\, \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$.

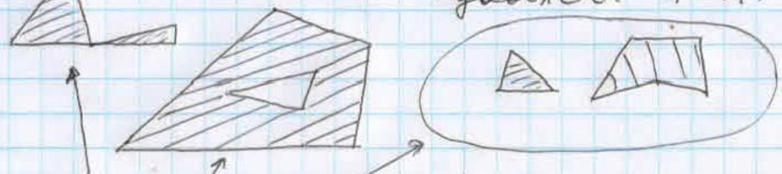
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

Опр. P - плоская фигура. $\mu(P)$ - площадь:

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P - един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P - многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ - его площадь — удовлетв. 1-4.



Многоугольники

$\varnothing$ - тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$

P - плоская фигура; Q, S - мн-ки : $Q \subset P \subset S$

Q - вписанный мн-к, S - описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ - нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S)$ - верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

S - фикс. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ - огр. сверху $\Rightarrow \exists\, \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ - одна из верхних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ огр. снизу $\Rightarrow \exists\, \overline{\mu}(P)$, $\underline{\mu}(P)$ - одна из нижних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Опр. P назыв. квадрируемой фигурой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1 ÷ 4 выполняются и если P - мн-к, то $\exists\, \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$.

Т1. P - квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists Q, S :$ $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$.

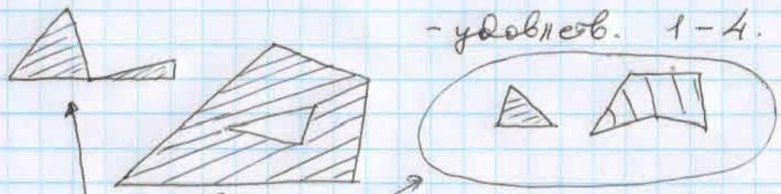
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

Опр. P — плоская фигура. $\mu(P)$ — площадь:

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P — един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P — многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ — его площадь — удовлетв. 1–4.



Многоугольники

$\varnothing$ — тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$

P — плоская фигура; Q, S — мн-ки : $Q \subset P \subset S$

Q — вписанный мн-к, S — описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ — нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S))$ — верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

S — фикс. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ — огр. сверху $\Rightarrow \exists\, \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ — одна из верхних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ огр. снизу $\Rightarrow \exists\, \overline{\mu}(P)$, $\underline{\mu}(P)$ — одна из нижних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Опр. P назыв. квадрируемой фигурой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1÷4 выполняются и если P — мн-к, то $\exists\, \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$.

T1. P — квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S :$ $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$.

Д-во. $\Rightarrow$ P — квадр. фигура, т.е. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

$\underline{\mu}(P), \overline{\mu}(P)$ — точные грани $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Q, S : Q \subset P \subset S$

$$\mu(P) = \underline{\mu}(P) < \tilde{\mu}(Q) + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } -\tilde{\mu}(Q) < -\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu(P) = \overline{\mu}(P) > \tilde{\mu}(S) - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.е. } \tilde{\mu}(S) < \mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \left(\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(-\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

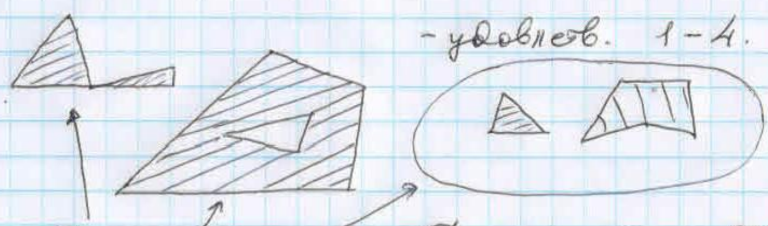
Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Двойные интегралы

Опр. P — плоская фигура, $\mu(P)$ — площадь:

1. $\mu(P) \geq 0$
2. $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
3. $P = P_1 \cup P_2 : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
4. P — един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P — многоугольник, $\tilde{\mu}(P)$ — его площадь — удовлетв. 1 – 4.



Многоугольники

$\varnothing$ — тоже мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$

P — плоская фигура; Q, S — мн-ки : $Q \subset P \subset S$

Q — вписанный мн-к, S — описанный мн-к

$\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$ — нижняя площадь

$\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} (\tilde{\mu}(S))$ — верхняя площадь

$Q \subset P \subset S \Rightarrow \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S)$

S — фикс. $\Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ — огр. сверху $\Rightarrow \exists\, \underline{\mu}(P)$

$\tilde{\mu}(S)$ — одна из верхних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\tilde{\mu}(S)\}$ огр. снизу $\Rightarrow \exists\, \overline{\mu}(P)$, $\underline{\mu}(P)$ — одна из нижних граней $\Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Опр. P назыв. квадрируемой фигурой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$. При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Ранее было установлено, что 1 ÷ 4 выполняются и если P — мн-к, то $\exists\, \mu(P) = \tilde{\mu}(P)$.

Т1. P — квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists Q, S$: $Q \subset P \subset S$, причем $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$.

Д-во. $\Rightarrow$ P — квадр. фигура, т.е. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

$\underline{\mu}(P)$, $\overline{\mu}(P)$ — точные грани $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists Q, S : Q \subset P \subset S$

$\mu(P) = \underline{\mu}(P) < \tilde{\mu}(Q) + \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $-\tilde{\mu}(Q) < -\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\mu(P) = \overline{\mu}(P) > \tilde{\mu}(S) - \frac{\varepsilon}{2}$, т.е. $\tilde{\mu}(S) < \mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \left(\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(-\mu(P) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q, S : Q \subset P \subset S$, $0 \leq \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$

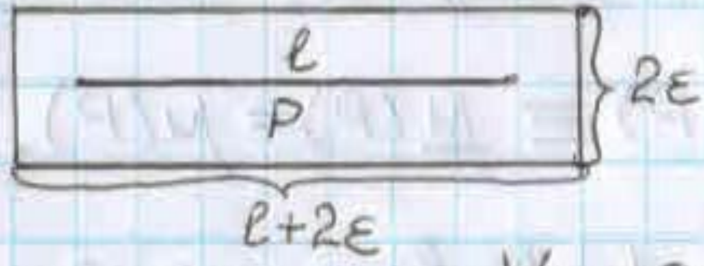
$\tilde{\mu}(Q) \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$0 \leq \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) < \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) - \underline{\mu}(P) = 0$,

т.е. $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$, т.е. P — квадрируема.

Теорема д-зана.

Площадь отрезка равна нулю(?)



ℓ - длина отрезка P.

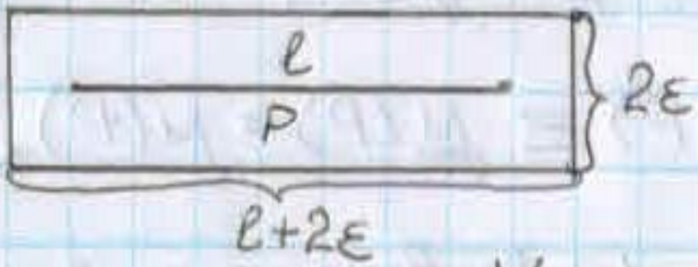
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \varnothing \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon)\times(\ell+2\varepsilon)}$$

$$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon\cdot(\ell+2\varepsilon). \quad \inf_{\varepsilon>0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{\mu}(P) = \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq \inf_{\varepsilon>0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \overline{\mu}(P) = 0$$

$$0 \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists\, \mu(P) = 0.$$

Площадь отрезка равна нулю(?)



l - длина отрезка P.

$$\forall \varepsilon>0 \quad \varnothing \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon)\times(l+2\varepsilon)}$$

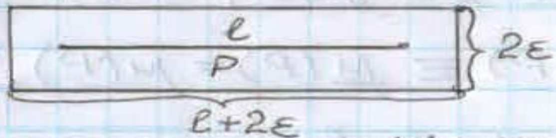
$$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon\cdot(l+2\varepsilon). \quad \inf_{\varepsilon>0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{\mu}(P) = \inf_{S\supset P} \tilde{\mu}(S) \le \inf_{\varepsilon>0} \tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \overline{\mu}(P)=0$$

$$0 \le \underline{\mu}(P) \le \overline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists\, \mu(P) = 0.$$

<u>T2.</u> P-квадр. фигура $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0 \ (\overline{\mu}(\partial P)=0)$.

Площадь отрезка равна нулю(?)



ℓ – длина отрезка P.

$$\forall\varepsilon>0 \quad \varnothing\subset P\subset S_\varepsilon=\Pi_{(2\varepsilon)\times(\ell+2\varepsilon)}$$

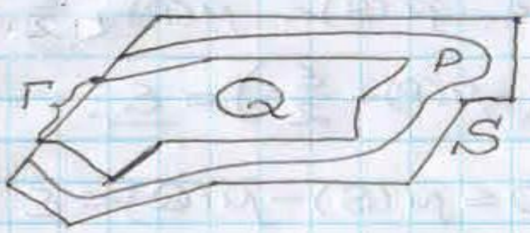
$$\tilde\mu(S_\varepsilon)=2\varepsilon\cdot(\ell+2\varepsilon). \quad \inf_{\varepsilon>0}\tilde\mu(S_\varepsilon)=0\Rightarrow$$

$$\overline\mu(P)=\inf_{S\supset P}\tilde\mu(S)\le\inf_{\varepsilon>0}\tilde\mu(S_\varepsilon)=0\Rightarrow\overline\mu(P)=0$$

$$0\le\underline\mu(P)\le\overline\mu(P)=0\Rightarrow\exists\,\mu(P)=0.$$

<u>Т2</u>. P-квадр. фигура $\Leftrightarrow$ $\mu(\partial P)=0$ ($\overline\mu(\partial P)=0$).

Д-во. Т1 $\Rightarrow$ P-квадр. фигура $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\, Q,S$: $Q\subset P\subset S$, $0\le\tilde\mu(S)-\tilde\mu(Q)<\varepsilon$. Граница



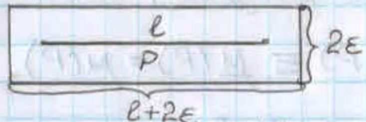
$\partial P\subset(S\setminus Q)\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$, где Γ_i – прямолинейные отрезки границ Q, P и S в совокупности.

Поэтому $\overline\mu(\partial P)\le\underbrace{\tilde\mu(S)-\tilde\mu(Q)}_{\le\varepsilon}+\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\overline\mu(\Gamma_i)}_{=0}$, т.е. $\overline\mu(\partial P)=0$, т.е. $\mu(\partial P)=0$.

Итак, P-квадр. фигура $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\, Q,S$: $Q\subset P\subset S$, $0\le\tilde\mu(S)-\tilde\mu(Q)<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\overline\mu(\partial P)=0$ $\Leftrightarrow$ $\mu(\partial P)=0$.

Теор. Д-зана

Площадь отрезка равна нулю(?)



ℓ - длина отрезка P.

$\forall\varepsilon>0 \quad \varnothing \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon)\times(\ell+2\varepsilon)}$

$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon\cdot(\ell+2\varepsilon)$. $\inf\limits_{\varepsilon>0}\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$

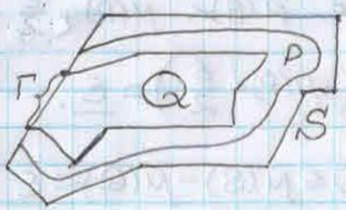
$\bar{\mu}(P) = \inf\limits_{S\supset P}\tilde{\mu}(S) \le \inf\limits_{\varepsilon>0}\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(P)=0$

$0 \le \underline{\mu}(P) \le \bar{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists\, \mu(P) = 0$.

<u>Т2.</u> P-квадр. фигура $\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0 \ (\bar{\mu}(\partial P)=0)$.

Д-во. Т1 $\Rightarrow$ P-квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, Q, S$:

$Q \subset P \subset S$, $0 \le \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon$. Граница



$\partial P \subset (S \setminus Q) \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i$, где

Γ_i - прямолинейные отрезки

границ Q, P и S в совокупности.

Поэтому $\bar{\mu}(\partial P) \le \underbrace{\tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q)}_{<\varepsilon} + \sum\limits_{i=1}^{k} \underbrace{\bar{\mu}(\Gamma_i)}_{=0}$, т.е.

$\bar{\mu}(\partial P) = 0$, т.е. $\mu(\partial P) = 0$.

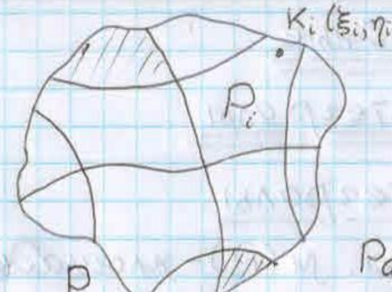
Итак, P-квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, Q, S$:

$Q \subset P \subset S$, $0 \le \tilde{\mu}(S) - \tilde{\mu}(Q) < \varepsilon \Leftrightarrow \bar{\mu}(\partial P) = 0$

$\Leftrightarrow \mu(\partial P) = 0$.

Теор. Д-зана

$\operatorname{diam} P \equiv \sup\limits_{A,B\in P} \rho(A,B)$



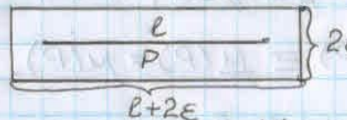
Пусть P - огран. замкн. мн-во, $\mu(\partial P) = 0$ (т.е. P-квадрир. фигура)

Разобьём P кривыми площади 0 на r не обяз. связных огран. замкн. P_i: $\mu(P_i) > 0\ \forall i$.

$P = \bigcup\limits_{i=1}^{r} P_i$. Ясно, что $\mu(P) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu(P_i)$

$T = \{P_i\}_{i=1}^{r}$ - разбиение, $\delta_T = \max\limits_i \operatorname{diam} P_i$ - хар-ка T

Площадь отрезка равна нулю(?)



l - длина отрезка P.

$\forall \varepsilon>0 \quad \varnothing \subset P \subset S_\varepsilon = \Pi_{(2\varepsilon)\times(l+2\varepsilon)}$

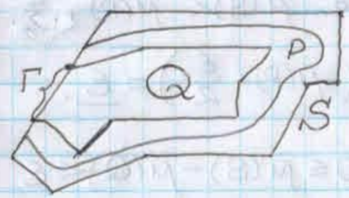
$\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 2\varepsilon\cdot(l+2\varepsilon). \quad \inf\limits_{\varepsilon>0}\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow$

$\overline{\mu}(P) = \inf\limits_{S\supset P}\tilde{\mu}(S) \le \inf\limits_{\varepsilon>0}\tilde{\mu}(S_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \overline{\mu}(P)=0$

$0 \le \underline{\mu}(P) \le \overline{\mu}(P) = 0 \Rightarrow \exists\, \mu(P) = 0.$

<u>Т2.</u> P-квадр. фигура $\Leftrightarrow \mu(\partial P)=0$ $(\overline{\mu}(\partial P)=0)$.

Д-во. $T1 \Rightarrow P$-квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, Q, S:$ $Q\subset P\subset S$, $0\le\tilde{\mu}(S)-\tilde{\mu}(Q)<\varepsilon$. Граница



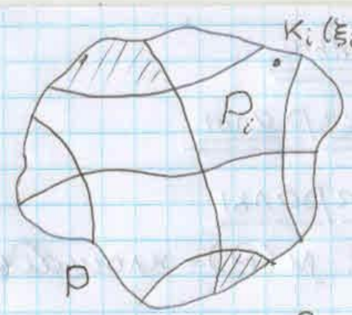
$\partial P \subset (S\setminus Q)\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Gamma_i$, где Γ_i - прямолинейные отрезки границ Q, P и S в совокупности.

Поэтому $\overline{\mu}(\partial P) \le \underbrace{\tilde{\mu}(S)-\tilde{\mu}(Q)}_{<\varepsilon} + \sum\limits_{i=1}^{k}\underbrace{\overline{\mu}(\Gamma_i)}_{=0}$, т.е. $\overline{\mu}(\partial P) = 0$, т.е. $\mu(\partial P) = 0$.

Итак, P-квадр. фигура $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, Q,S:$ $Q\subset P\subset S$, $0\le\tilde{\mu}(S)-\tilde{\mu}(Q)<\varepsilon \Leftrightarrow \overline{\mu}(\partial P)=0$ $\Leftrightarrow \mu(\partial P)=0$.

Теор. д-зана

$\operatorname{diam} P \equiv \sup\limits_{A,B\in P}\rho(A,B)$



Пусть P - огран. замкн. мн-во, $\mu(\partial P) = 0$ (т.е. P-квадрир. фигура)

Разобьём P кривыми площади 0 на r не обяз. связных огран. замкн. P_i : $\mu(P_i)>0\ \forall i$.

$P = \bigcup\limits_{i=1}^{r}P_i$. Ясно, что $\mu(P) = \sum\limits_{i=1}^{r}\mu(P_i)$

$T = \{P_i\}_{i=1}^{r}$ - разбиение, $\delta_T = \max\limits_i \operatorname{diam} P_i$ - хар-ка T

$K_i(\xi_i,\eta_i)\in P_i$, $i=1,2,\dots,r$; $\mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^{r}$

Пусть $f(x,y)$ определена на P, т.е. $\forall A(x_0,y_0)\in P$ $\exists f(A) = f(x_0,y_0)$ - число. Интегральная сумма:

$\sigma_T(f,\mathbb{K}) = \sigma_T(f,\{K_i\}) \equiv \sum\limits_{i=1}^{r} f(K_i)\mu(P_i)$

<u>Опр.</u> Число I назыв. пределом инт. суммы $\sigma_T(f,\mathbb{K})$ при $\delta_T\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall T,\ \delta_T<\delta$, $\forall\mathbb{K}=\{K_i\}$ $|\sigma_T(f,\mathbb{K})|<\varepsilon$. $I = \lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T(f,\mathbb{K})$

<u>Опр.</u> $f(x,y)$ назыв. интегрируемой на P (огр., замкн., квадр. мн-во), если $\exists \lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T(f,\mathbb{K}) = I$.

Число I назыв. двойным интегралом от $f(x,y)$ по мн-ву P. $I \equiv \iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$.

Интегрируемые ф-ии существуют, например $f(x,y) \equiv 1$.

$\forall T = \{P_i\}_{i=1}^{r} \quad \forall \mathbb{K} = \{K_i\} \quad \sigma_T(f, \mathbb{K}) = \sum_{i=1}^{r} 1 \cdot \mu(P_i) = \mu(P) \underset{(\delta_T \to 0)}{\longrightarrow} \mu(P)$, т.е.

$$\iint\limits_P 1 \cdot dx dy = \mu(P)$$

$\underline{\text{Т3.}}$ $f(x,y)$ интегр. на $P \Rightarrow f(x,y)$ ограничена на P.

Д-во. Пусть $f(x,y)$ неогр. на P, но $\exists\, I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \mathbb{K})$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall T,\ \delta_T < \delta \quad \forall \mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^{r} \quad |\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I| < \varepsilon$. Берём $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists \delta > 0$. Берём $\forall T = \{P_i\}_{i=1}^{r},\ \delta_T < \delta$. $f(x,y)$ неогр. на $P \Rightarrow \exists\, k$, $(1 \le k \le r) : f(x,y)$ неогр. на P_k. Берём $\forall K_i \in P_i\ (i \ne k)$. Берём $K_k \in P_k : |f(K_k)| > \dfrac{\sum\limits_{\substack{i=1 \\ (i \ne k)}}^{r} |f(K_i)| \mu(P_i) + |I| + 1}{\mu(P_k)}$. Тогда $1 = \varepsilon > |\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I| =$

$$= \left| \sum_{i=1}^{r} f(K_i) \mu(P_i) - I \right| \ge \left| |f(K_k)| \mu(P_k) - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \ne k)}}^{r} |f(K_i)| \mu(P_i) - |I| \right| > 1, \text{ т.е. } 1 > 1$$

Противоречие. Т. д-зана.

$f(x,y)$ - ограниченная на P - огран., замкн. мн-во; $\mu(\partial P)=0$ (т.е. квадр.)

$T=\{P_i\}_{i=1}^{r}$ - разбиение P кривыми площади 0 на P_i, $\mu(P_i)>0$

$$M_i=\sup_{K\in P_i} f(K), \quad m_i=\inf_{K\in P_i} f(K)$$

$$S_T(f)\equiv\sum_{i=1}^{r} M_i\cdot\mu(P_i) \text{ - верхняя сумма Дарбу}$$

$$s_T(f)\equiv\sum_{i=1}^{r} m_i\cdot\mu(P_i) \text{ - нижняя сумма Дарбу}$$

$$\forall K_i\in P_i \qquad m_i\leq f(K_i)\leq M_i \quad \cdot\mu(P_i) \text{ и } \sum_{i=1}^{r}$$

$$\Rightarrow \quad s_T(f)\leqslant\sigma_T(f,\{K_i\})\leqslant S_T(f)$$