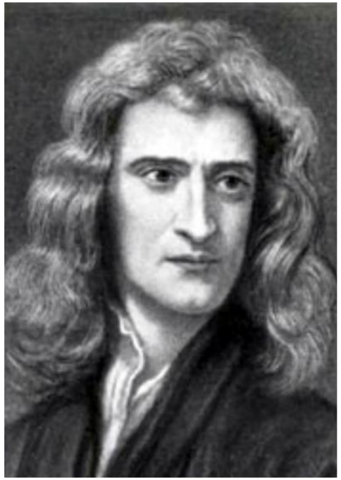
МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственной бюджетное профессиональное образовательное учреждение Ростовской области
«Ростовский технологический техникум сервиса»
(ГБПОУ РО «РТТС»)

Тема:"Интеграл. Определенный интеграл. Свойства. Примеры. Применение определенного интеграла для нахождения длин, площадей и объемов”

Подготовила:
Обучающаяся группы №17 1 курса
Перепелкина Дарья Сергеевна

г. Ростов-на-Дону

Интеграл — одно из важнейших понятий математического анализа, которое возникает при решении задач о нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, и тому подобных, а также в задаче о восстановлении функции по её производной (неопределённый интеграл). Упрощённно интеграл можно представить как аналог суммы для бесконечного числа бесконечно малых слагаемых. В зависимости от пространства, на котором задана подынтегральная функция, интеграл может быть — двойной, тройной, криволинейный, поверхностный и так далее; также существуют разные подходы к определению интеграла — различают интегралы Римана, Лебега, Стилтьеса и другие



Исаак Ньютон
1643-1727

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц
1646-1716

Одни из отнователей интегралла

Определённый интеграл — одно из основных понятий математического анализа, один из видов интеграла. Определённый интеграл является числом, равным пределу сумм особого вида (интегральных сумм). Геометрически определённый интеграл выражает площадь «криволинейной трапеции», ограниченной графиком функции. В терминах функционального анализа, определённый интеграл — аддитивный монотонный функционал, заданный на множестве пар, первая компонента которых есть интегрируемая функция или функционал, а вторая — область в множестве задания этой функции (функционала).

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- *$f(x)$ – подынтегральная функция,*
- *$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,*
- ***a – нижний предел интегрирования***
- ***b – верхний предел интегрирования***

Свойства интегралла

1. Интеграл от единицы по промежутку $[a,b]$ равен длине этого промежутка:

$$\int_a^b dx = b - a.$$

2. Интеграл не зависит от символа, используемого для обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

4. Интеграл от алгебраической суммы интегрируемых функций равен алгебраической сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. При перестановке местами пределов интегрирования интеграл меняет свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

6. Если нижний и верхний пределы интегрирования совпадают между собой, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

7. Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом из промежутков $[a,b]$, $[a,c]$ и $[c,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Это свойство вполне очевидно, если $c \in [a, b]$ (см. рисунок 1).

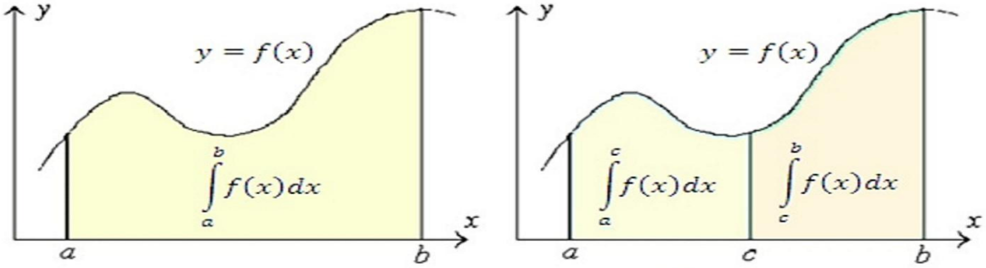
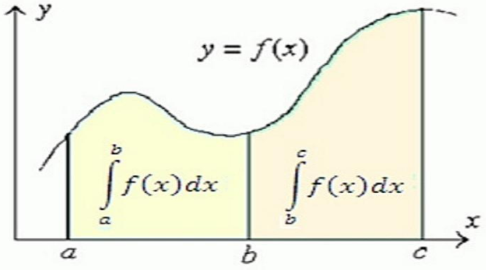


Рис. 1. Свойство 6 (случай $c \in [a, b]$).

Однако оно остается справедливым и в том случае, когда $c \notin [a, b]$ – при условии, что существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$:



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Рис. 2. Свойство 6 (случай $c \notin [a, b]$).

8. Если функция $f(x)$ является положительно определенной и интегрируемой на промежутке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad (a < b).$$

9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$ во всех точках этого промежутка. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

10. Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b).$$

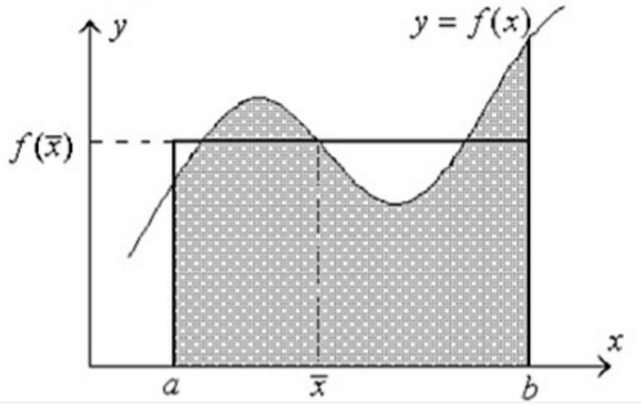
11. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$ и удовлетворяет неравенствам $m \le f(x) \le M$ во всех точках этого промежутка. Тогда

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Выражение $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ называется **средним значением функции** $f(x)$ на промежутке $[a,b]$. Поэтому свойство 8 называют **теоремой о среднем**.

12. **Теорема о среднем для непрерывной функции**. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на промежутке $[a,b]$. Тогда на этом промежутке найдется такая "средняя" точка $\bar{x}$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\bar{x})(b-a) \qquad (a < \bar{x} < b)$$



13. **Обобщенная теорема о среднем**. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a,b]$. Если при этом функция $f(x)$ является непрерывной, то на этом промежутке найдется такая "средняя" точка $\bar{x}$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\bar{x})\int_a^b g(x)dx.$$

Примеры решения:

Пример 1. Вычислить интеграл $\int (2x+1)^{10}\, dx$

$$2x+1=t$$
$$d(2x+1)=dt$$
$$2\,dx=dt$$
$$dx=\frac{dt}{2}$$

$$\int (2x+1)^{10}\, dx = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C = \underline{\frac{(2x+1)^{11}}{22}+C}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^8 \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}dx$

$$\int_1^8 \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}dx = \int_1^8 dx - \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}}dx = x\Big|_1^8 - 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$$

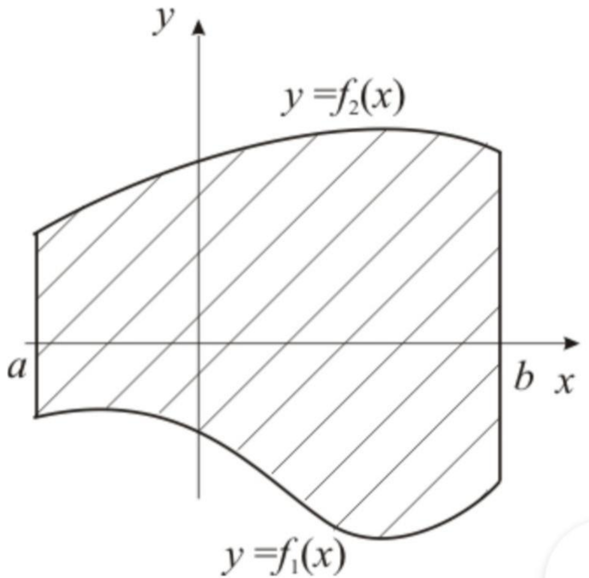
$$= (8-1)-3(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}) = 7-3(2-1) = 4$$

Ответ. 4

Применение определенного интеграла для нахождения длин, площадей и объемов

Если плоская фигура ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a, b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$



Длина дуги кривой

Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина l ее дуги равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx,$$

где a и $b-$ абсциссы концов дуги.

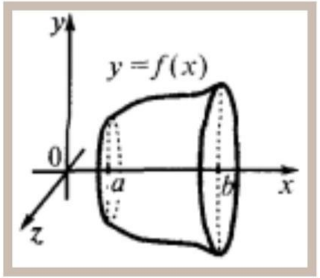
Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t) \quad (t_1 \le t \le t_2)$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

Для тела вращения

Если тело получено в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, которая ограничена графиком непрерывной и невідємної функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$$



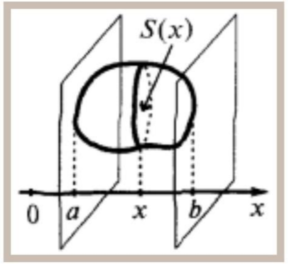
Объемы тел

В общем случае

Если тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, проходящими через точки $x = a$ и $x = b$, то

$$V = \int_a^b S(x)\ dx$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, которая проходит через точку $x \in [a;b]$ и перпендикулярна к оси Ox



Пример: Вычислим площадь фигуры, ограниченной графиком функции у = 4х – х2 на пределах рассмотрения х = 0, х = 4.

Итак, найдем интеграл данной функции в заданных пределах и построим полученный график:

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

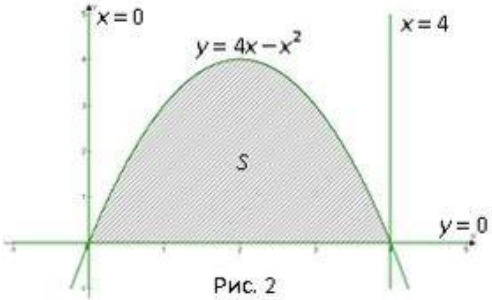


Рис. 2

$S = \frac{32}{3}$ (кв. ед.).