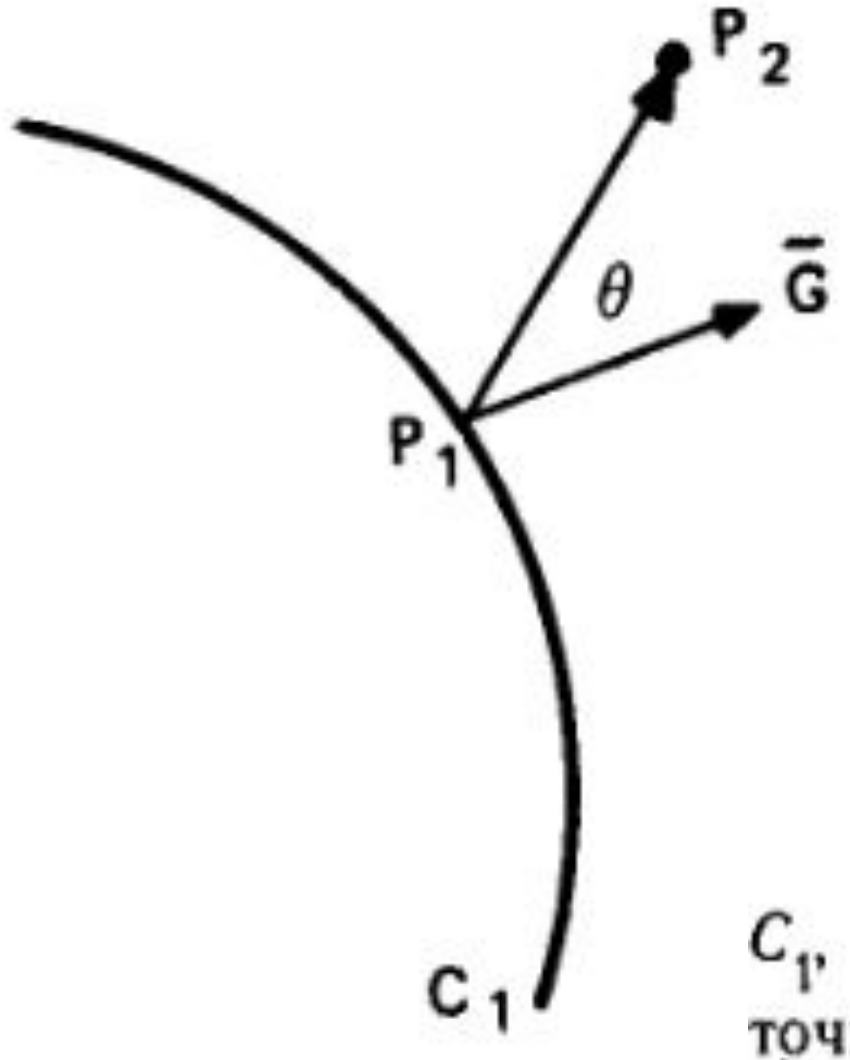
Элементы теории поля используемые в электрофизиологии

Рассмотрим скалярное поле $\Phi(x, y, z)$ и допустим, что эта величина представляет собой однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию положения, или точки в пространстве (физические поля обычно удовлетворяют этим условиям). Определим некоторую поверхность постоянного значения этой функции при помощи уравнения

$$\Phi(x, y, z,) = C, \text{ где } C \text{ — постоянная.}$$

Градиент



$$d\bar{l} = \bar{a}_x dx + \bar{a}_y dy + \bar{a}_z dz,$$

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz,$$

$$\bar{G} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \bar{a}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \bar{a}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \bar{a}_z .$$

Эквипотенциальная поверхность C_1, на которой расположена точка P_1; точка P_2 расположена произвольно.

$$d\Phi = \bar{G} \cdot d\bar{l}.$$

$$d\Phi = d\bar{l} \cdot \bar{G} = G \cos\theta \; dl.$$

$$\frac{d\Phi}{dl} = G \cos\theta,$$

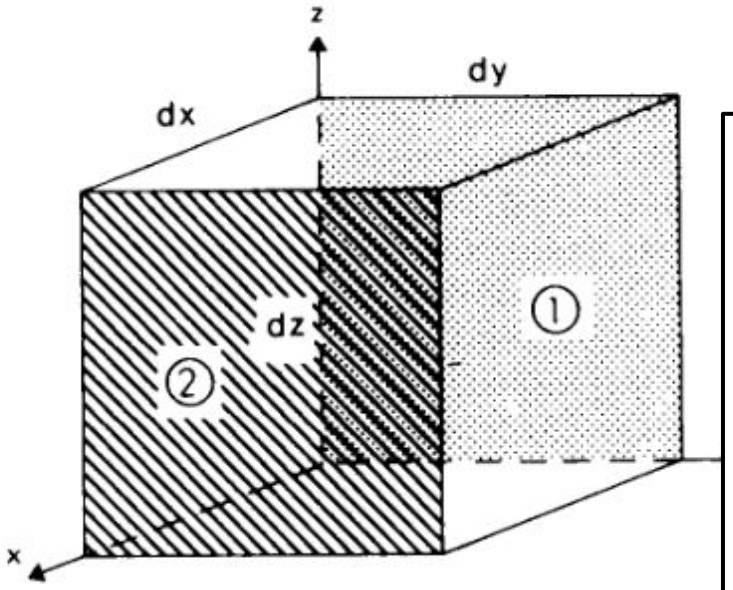
$$G = d\Phi / dn.$$

$$\nabla \equiv \bar{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- оператор набла

Типичное векторное поле, встречающееся в электрофизиологии и представляющее для нас особый интерес, — это поле плотности тока $\bar{J}$ в объемном проводнике. Структура поля зависит от наличия в пространстве источников, т.е. точек, где ток втекает в проводник (истоки) или же он вытекает из проводника (стоки). В этом отношении поле $\bar{J}(x, y, z)$ аналогично по свойствам векторному полю, описывающему течение жидкости, которое порождается некоторым распределением ее истоков и стоков, или же тепловые потоки и т.д.

Дивергенция



Полный ток через поверхности 1 и 2. Обратившись к рис.1.3 и рассмотрев некоторое векторное поле $\bar{J}(x,y,z)$, видим, что ток через поверхность 2 выражается как величина

$$\text{Ток}_2 = dydz\left[J_x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)dx\right]$$

плюс члены высших порядков; здесь J_x — компонента поля $J_x(x,y,z)$ в центре параллелепипеда (это учитывается коэффициентом 1/2). Аналогично ток через поверхность 1 приближенно выражается как

$$\text{Ток}_1 = -\,dydz\left[J_x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial J_x}{\partial x}\right)dx\right],$$

где знак минус перед квадратными скобками обусловлен тем, что ток направлен в сторону отрицательной оси x. Сумма этих токов равна $dx\,dy\,dz\,\partial J_x/\partial x$.

Полный ток через шесть граней параллелепипеда. Аналогично вышеска заниому можно получить величины тока, протекающего через другие две пары граней параллелепипеда, $dx\,dy\,dz\,\partial J_y/dy$ и $dx\,dy\,dz\partial J_z/\partial z$. В итоге

$$\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S} = \left[\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right] dx\ dy\ dz.$$

Определение дивергенции

$$\left[\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}\right] / \; dx\; dy\; dz.$$

$$\operatorname{div}\bar{J} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \bar{J}\cdot d\bar{S}}{V}.$$

$$\operatorname{div}\bar{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}.$$

$$\nabla\cdot\bar{J} \equiv \operatorname{div}\bar{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_x}{\partial z},$$

Лапласиан

$$\nabla^2\psi = \nabla\cdot\nabla\psi.$$

$$\nabla\psi = \bar{a}_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \bar{a}_y \frac{\partial\psi}{\partial y} + \bar{a}_z \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\nabla\cdot\nabla\psi = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\right],$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

$$\nabla\cdot(\Phi\bar{A}) = \bar{A}\cdot\nabla\Phi + \Phi\nabla\cdot\bar{A},$$

$$\nabla(\Phi\psi) = \Phi\nabla\psi + \psi\nabla\Phi,$$

$$\nabla^2(r) = 0, \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Векторные тождества

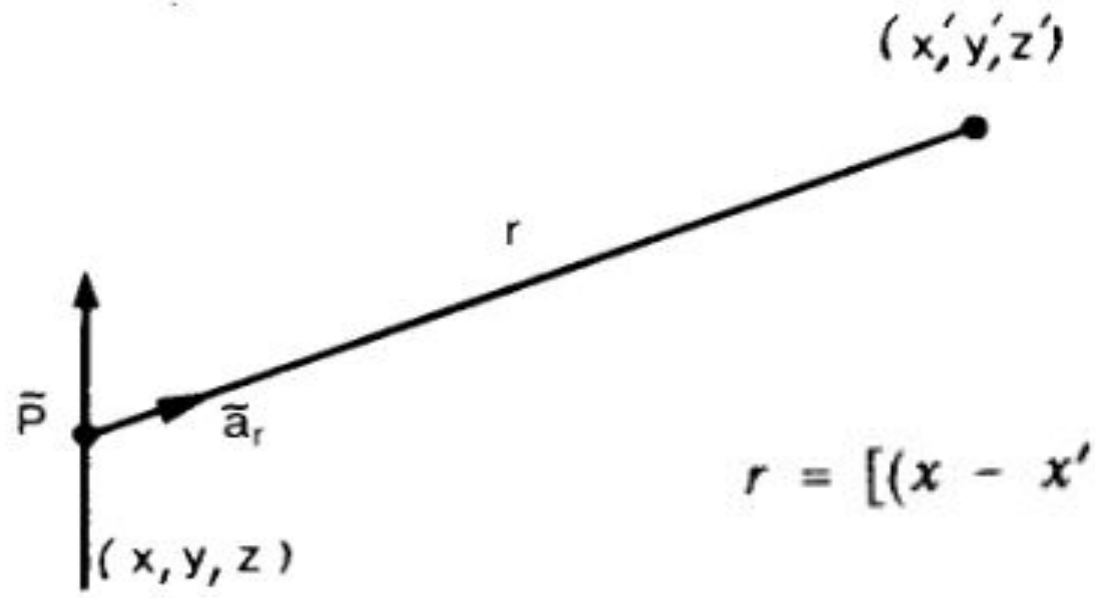
Доказательство 1-го тождества

$$(A_x\bar{a}_x + A_y\bar{a}_y + A_z\bar{a}_z)$$

$$\nabla\cdot(\Phi\bar{A}) = \nabla\cdot(\Phi A_x\bar{a}_x + \Phi A_y\bar{a}_y + \Phi A_z\bar{a}_z) .$$

$$\nabla\cdot(\Phi\bar{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_z).$$

$$\nabla\cdot(\Phi\bar{A}) = \Phi\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Phi\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \Phi\frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z\frac{\partial\Phi}{\partial z} ,$$



$$r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}.$$

Градиенты в точке источника и в точке поля

Градиент функции 1/r при переменной точке источника

$$\nabla \equiv \bar{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{a}_z \frac{\partial}{\partial z} .$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(x - x')\bar{a}_x + (y - y')\bar{a}_y + (z - z')\bar{a}_z}{r^3} .$$

$$\bar{a}_r = [(x' - x)\bar{a}_x + (y' - y)\bar{a}_y + (z' - z)\bar{a}_z]/|r| ,$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\bar{a}_r}{r^2} .$$

Градиент функции 1/r при переменной точке поля

$$\nabla' \equiv \bar{a}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \bar{a}_y \frac{\partial}{\partial x'} + \bar{a}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(x - x')\bar{a}_x + (y - y')\bar{a}_y + (z - z')\bar{a}_z}{r^3}.$$

$$-\nabla'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\bar{a}_r}{r^2} = \nabla\left(\frac{1}{r}\right).$$

Теорема Гаусса

$$\text{Ток} = \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \ ,$$

$$\int_V \nabla \cdot \bar{J} dV = \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} \ .$$

Последнее соотиошение действительио выполняется для всех достаточно гладких векториых функций; оио известио как *теорема Гаусса*, или *теорема о дивергенции*.

Теорема Грина

Первая формула Грина.

$$\bar{J} = A\nabla B,$$

$$\int_V \nabla \cdot A\nabla B dV = \oint_S A\nabla B \cdot d\bar{S} .$$

$$\int_V A\nabla^2 B dV + \int_V \nabla A \cdot \nabla B dV = \oint_S A\nabla B \cdot d\bar{S}.$$

Теорема Грина

Вторая формула Грина.

$$\int_V B\nabla^2 A dV + \int_V \nabla B \cdot \nabla A dV = \oint_S B\nabla A \cdot d\bar{S} .$$

$$\int_V \left[A\nabla^2 B - B\nabla^2 A\right] dV = \oint_S \left[A\nabla B - B\nabla A\right] \cdot d\bar{S}.$$

Найдите градиент скалярной функции $\Psi = x^2yz$ и ее производную по направлению, определяемому единичным вектором $3/\sqrt{50}\bar{a}_x + 4/\sqrt{50}\bar{a}_y + 5/\sqrt{50}\bar{a}_z$ в точке (2, 3, 1).

Вычислите $\nabla^2\Phi$ для функции $\Phi = 2x^3y^2z^4$.

Докажите, что выполняется соотношение

$$\nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi - \Psi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Phi.$$

Покажите при помощи непосредственного дифференцирования, что $\nabla^2(1/R) = 0$ (во всех точках, где $R \neq 0$), если

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')]^{1/2}$$

(напомним, что оператор ∇^2 выполняется по отношению к переменным, обозначенным символами без штрихов).

Найдите дивергенцию векторной функции

$$\bar{A} = x^2\bar{a}_x + (xy)^2\bar{a}_y + 24x^2y^2z^3\bar{a}_z .$$

Докажите, что выполняется соотношение

$$\int_V \Psi \nabla \cdot \bar{F} dV = \int_S \Psi \bar{F} \cdot d\bar{S} - \int_V \bar{F} \cdot \nabla \Psi dV$$

(это векторный аналог формулы интегрирования по частям).

Формула Грина для криволинейных интегралов 2 рода

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

$$I = \oint_L y(1 - x^2)dx + (1 + y^2)\,xdy,$$

где контур L — окружность $x^2 + y^2 = 4$, «пробегаемая» в положительном направлении обхода.

▶ Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Грина (14.14):

$$I = \iint_D (1 + y^2 - 1 + x^2)\,dxdy = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy,$$

где D — круг, определяемый неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Имеем

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, & dxdy = \rho d\rho d\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \iint_{D'} \rho^3 d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi. \ ◀$$

Найти производную функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_1(-2, 3, 6)$ по направлению к точке $M_2(-1, 1, 4)$.

Вычислить дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}(M) = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + (z^2 + x)\mathbf{k}$ в точке $M_0(1, -2, 3)$.

Найти $\operatorname{div}\left(\mathbf{grad}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

Доказать, что функция $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической и векторное поле $\mathbf{a}(M) = \mathbf{grad}\, u(M)$ — гармоническое.

▶ Частные производные функции u в точке M_1:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1} = -\frac{2}{7},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial y} = \left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1} = \frac{3}{7},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial z} = \left.\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{M_1} = \frac{6}{7}.$$

Единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$, равен

$$\mathbf{s}^0 = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Тогда по формуле (15.6) получаем

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial s} = -\frac{2}{7}\,\frac{1}{3} + \frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{20}{21}. \ ◀$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

В точке M_0 имеем $\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = 4 > 0$, т. е. точка M_0 является источником поля. ◀

▶ Прежде всего следует проверить, справедливо ли для данной функции уравнение Лапласа (15.31). Вычисляем $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$, $\partial^2 u/\partial z^2$ и Δu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5};$$

$$\Delta u = -\frac{3}{r^3} + 3 \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Следовательно, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ удовлетворяется и данная функция $u = 1/r$ — гармоническая.

Далее находим

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{grad}\, u(M) = -r^3(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Внеклеточные поля

$$\nabla \cdot \bar{j} = j_v = -\sigma \nabla^2 \Phi.$$

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{j_v}{\sigma}.$$

$$\nabla \cdot \bar{j} = -\sigma \nabla^2 \Phi = 0.$$

Уравнение Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\sigma}\int\frac{I_v dV}{r}.$$

Двойственность

$$\bar{E} = -\nabla\Phi,$$

$$\bar{D} = \varepsilon\bar{E},$$

$$\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon,$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho dV}{r}.$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho.$$

$$\varepsilon \rightarrow \sigma,$$

$$\bar{D} \rightarrow \bar{J},$$

$$\rho \rightarrow I_v.$$

Выражения отображают принцип двойственности

Обозначение	Единица	Наименование величины
r	Метр	Расстояние
σ	Сименс/метр	Удельная проводимость
$\bar{J}$	Ампер/метр^2	Плотность тока
I	Ампер=кулон/секунда	Ток
I_v	Ампер/метр^3	Плотность источников тока
Φ	Вольт=джоуль/кулон	Электрический потенциал

Трансмембранный ток через мембрану

$$i_m = \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} .$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial x} = -i_m .$$

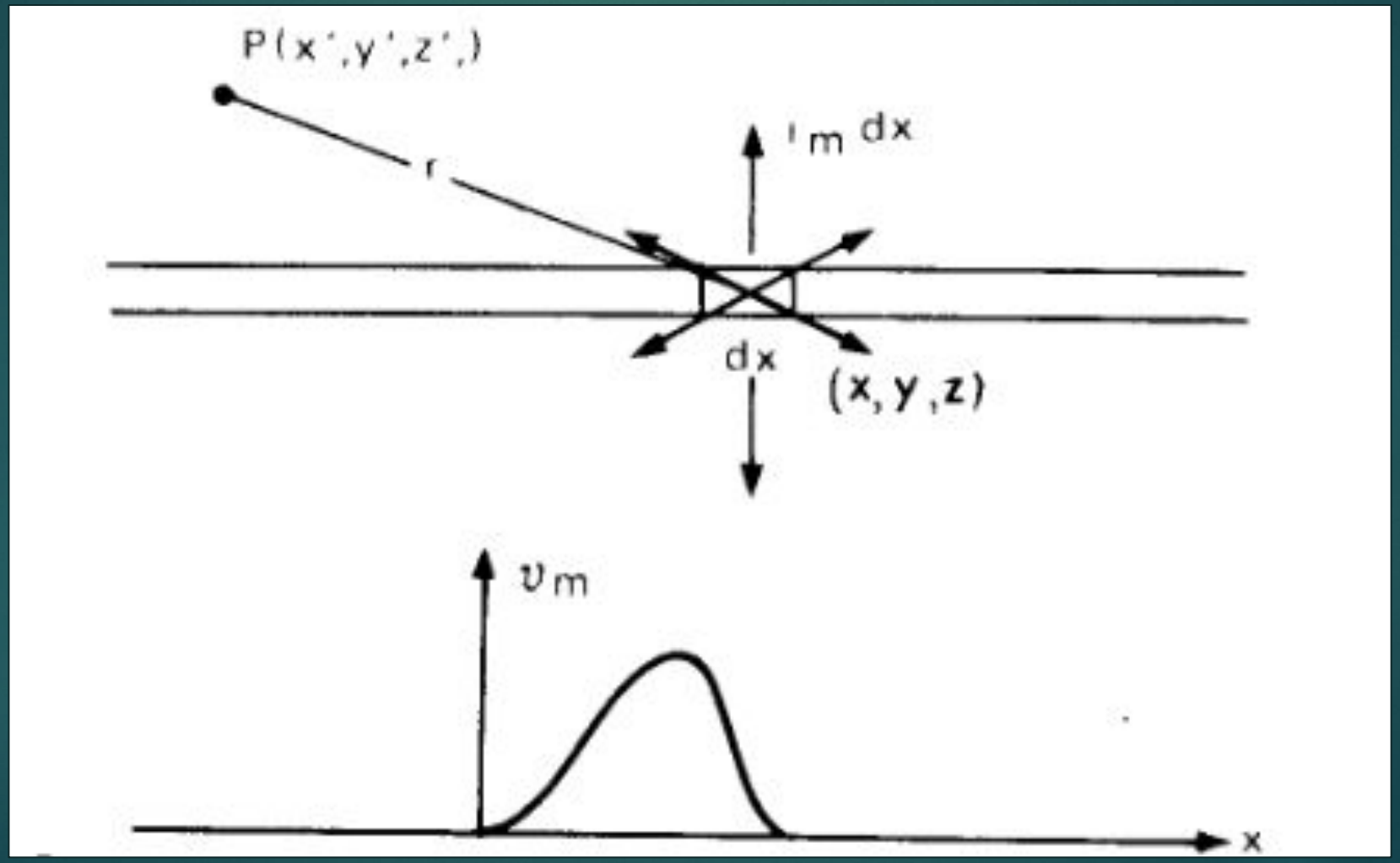
$$i_m = \frac{\pi a^2}{R_i} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2}.$$

Внутриклеточное удельное сопротивление - R_i (Ом х см)

$$2\pi a I_m = i_m.$$

$$I_m = \frac{a}{2R_i} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2}.$$

Модель электрического источника одиночного волокна



$$\Phi_e = I_0/(4\pi\sigma_e r)$$

$$r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$$

$$\Phi_e(x', y', z') = \int \frac{i_m(x)dx}{4\pi\sigma_e[(x - x')^2 + y'^2 + z'^2]^{1/2}} .$$

Выражение для потенциала Φ_e через трансмембранный потенциал v_m

$$-\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = I r_i ,$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial x} = -i_m .$$

$$i_m = \frac{1}{r_i}\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \approx \frac{1}{r_i}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2}$$

$$r_i = \frac{R_i}{\pi a^2},$$

$$i_m = \frac{\pi a^2}{R_i} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} = \pi a^2 \sigma_i \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2},$$

Удельная проводимость аксоплазмы (См/см) - $\sigma_i = 1/R_i$

Плотность монопольных источников

$$I_i = \pi a^2 \sigma_i \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2}$$

Плотность дипольных источников

$$\Phi_e = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{dv_m}{dx}\right] \frac{1}{r}\, dx$$

$$\Phi_e = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e} \left[\frac{dv_m}{dx}\frac{1}{r} - \int \frac{dv_m}{dx}\frac{d(1/r)}{dx}\, dx\right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= -\frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e} \int \frac{dv_m}{dx}\frac{d(1/r)}{dx}\, dx,$$

$$\Phi_e = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e} \int \left[-\frac{dv_m}{dx}\bar{a}_x\right] \cdot \left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] dx.$$

$$(\bar{p} = p\bar{a}_x)$$

$$\Phi_d = \frac{\bar{p}\cdot\nabla(1/r)}{4\pi\sigma_e} = \frac{p\bar{a}_x\cdot\nabla(1/r)}{4\pi\sigma_e} .$$

$$d\Phi_e = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e}\left[-\frac{\partial v_m}{\partial x}\right]\bar{a}_x \cdot \nabla\left[\frac{1}{r}\right] dx =$$

$$= \frac{\pi a^2\sigma_i}{4\pi\sigma_e}\left[-\frac{\partial v_m}{\partial x}\right]dx\ \bar{a}_x\cdot\nabla\left[\frac{1}{r}\right] .$$

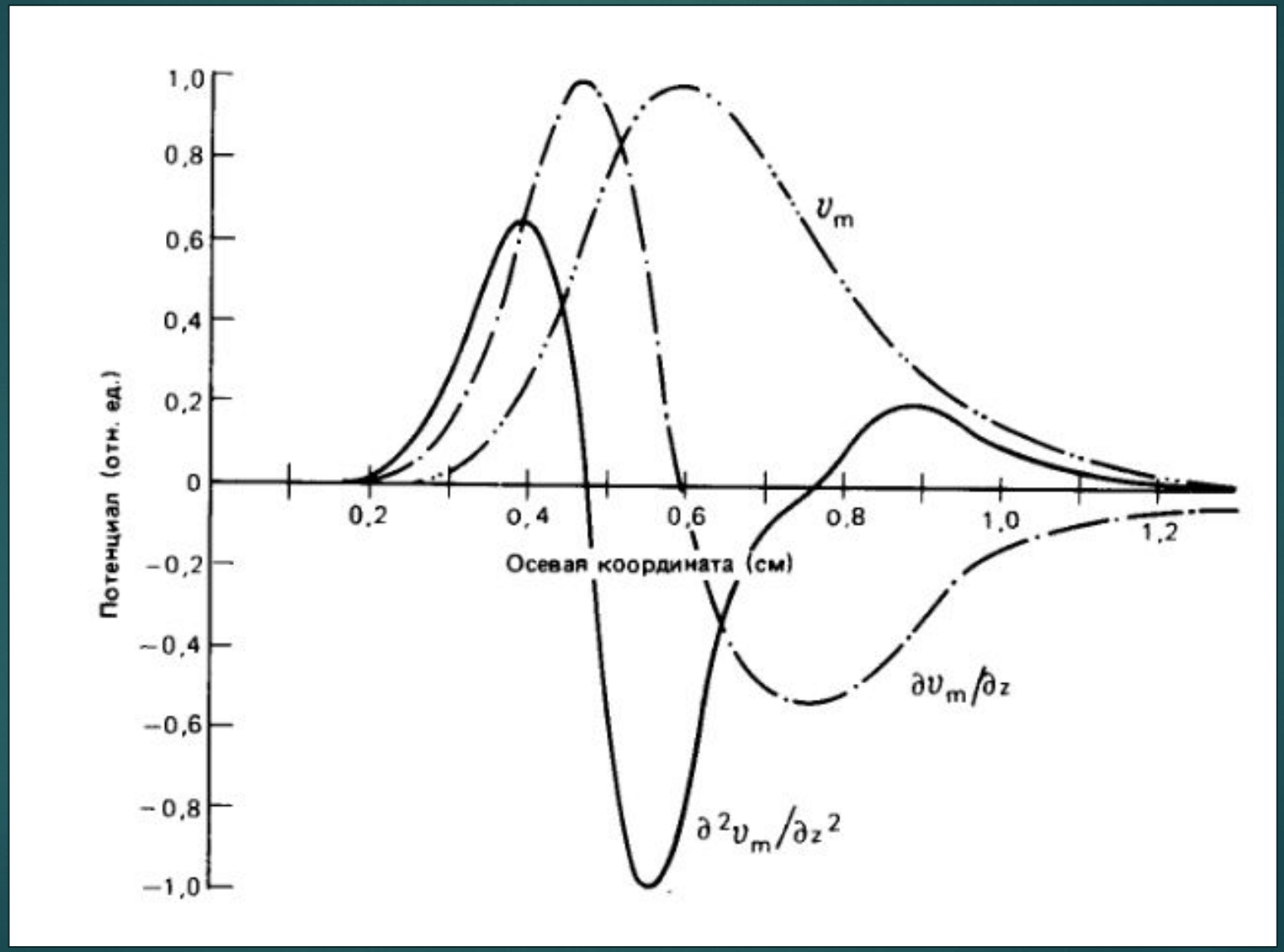
Линейная плотность дипольного момента в осевом направлении

$$\bar{\tau}_l = -\pi a^2 \sigma_l \frac{\partial v_m}{\partial x} \bar{a}_x$$

Объемная плотность дипольных источников (для толстых нервных волокон)

$$\bar{\tau}_v = -\frac{\partial \, \partial v_m}{\partial x} \bar{a}_x .$$

Диполи деполяризации и реполяризации



$$D = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial v_m}{\partial x}\, dx = v_m(x_1) - v_m(x_2).$$

$$D_N = V_{\text{покой}} - V_{\text{пик}} \quad \text{(отрицательная величина).}$$

$$D_P = V_{\text{пик}} - V_{\text{покой}} \quad \text{(положительная величина).}$$

$$\Phi = e^{-(x-1)^2/2}.$$

1. Выведите выражение для $\nabla\Phi$ в функции x.
2. Выведите выражение для $\nabla\cdot\nabla\Phi$ в функции x.
3. Выведите выражение для $\nabla^2\Phi$ в функции x.
4. Вычертите график функции Φ в зависимости от x в пределах от $x = -4$ до $x = 4$. Используйте ось x длиной около 20 см и ось Φ длиной около 12 см.
5. Вычертите график градиента функции Φ в зависимости от x.
6. Вычертите график дивергенции градиента функции Φ в зависимости от x.
7. При каком значении x градиент функции Φ достигает максимального значения?
8. При каком значении x наклон кривой Φ достигает максимального значения?
9. Каково числовое значение максимального наклона кривой Φ?

Для следующих двух упражнений рассмотрите кривую зависимости функции Φ от x, интерпретируя величину Φ как потенциал в однородной бесконечно протяженной среде с удельной проводимостью σ.

10. Вычертите и обозначьте символом $\bar{J}$ стрелки, показывающие направление течения в области от $x = -4$ до $x = 4$.

11. В области значений x от $x = -4$ до $x = 4$ выделите интервалы,

где

а) имеются источники тока;

б) отсутствуют как стоки, так и истоки тока;

в) имеются стоки (т.е. отрицательные источники) тока.

16. Задано выражение для потенциала (в вольтах)

$$\Phi = k\,(xy + z^2),$$

где k — постоянный коэффициент единичной величины, причем удельная проводимость $\sigma = 3$ См/м;

а) выведите выражение для плотности тока $\bar{J}$ (с указанием единиц измерения);

б) определите значение $\bar{J}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

17. Задано выражение для плотности тока (в амперах на метр в квадрате)

$$\bar{J} = k\,(x^2\bar{a}_x + y^2\bar{a}_y + z^2\bar{a}_z),$$

где k — постоянный коэффициент единичной величины;

а) какова дивергенция $\bar{J}$ в начале координат — больше нуля, равна нулю или меньше нуля?

б) Чему равно значение дивергенции $\bar{J}$ в точке с координатами $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$? Укажите единицы измерения.

18. Задано выражение для потенциала (в вольтах)

$$\Phi = kx^2,$$

где k — постоянный коэффициент единичной величины в интервале $-4 < x < 4$;

а) вычертите график функции Φ в зависимости от x;

б) вычертите график напряженности электрического поля в зависимости от x (с указанием единиц измерения);

в) вычертите график плотности источников тока в зависимости от x (с указанием единиц измерения);

г) дайте краткое объясиение результата, полученного в предыдущем пункте; имеются ли в даином случае источники тока, если да, то где они расположены и какова их полярность?

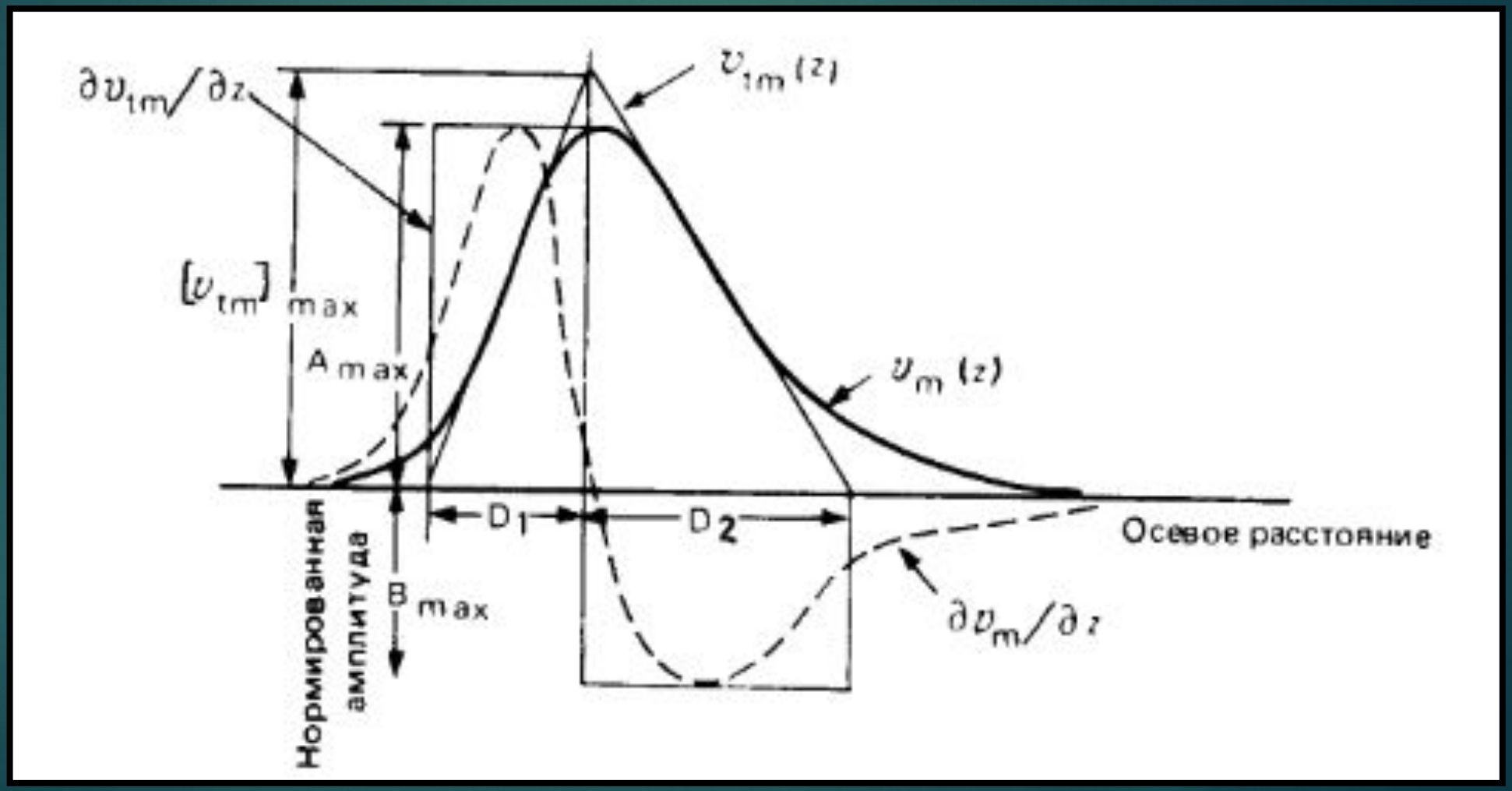
Модели источников тока монопольного типа для возбудимого волокна

Суммарная монопольная интенсивность источников, распределенных на интервале от x_1 до x_2, выражается как интеграл от функции плотности источников в пределах этого интервала:

$$M = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2}\, dx = \frac{\partial v_m}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial v_m}{\partial x}(x_1).$$

$$M_1 = A_{max}, \; M_3 = B_{max}, \; M_2 = -(A_{max} + B_{max})$$

$$A_{max} = D_1^{-1}(v_{tm})_{max}, \; B_{max} = D_2^{-1}(v_{tm})_{max}.$$



$$\Phi_e^1 = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 v_m/\partial x^2}{r}\,dx.$$

Для точки наблюдения поля, находящейся на расстоянии r_1 от середины рассматриваемой области волокна, при условии, что это расстояние намного больше длины участка x_2-x_1, при помощи теоремы о среднем значении можно получить следующее приближенное выражение:

$$\Phi_e^1 = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e}\frac{1}{r_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2}\,dx.$$

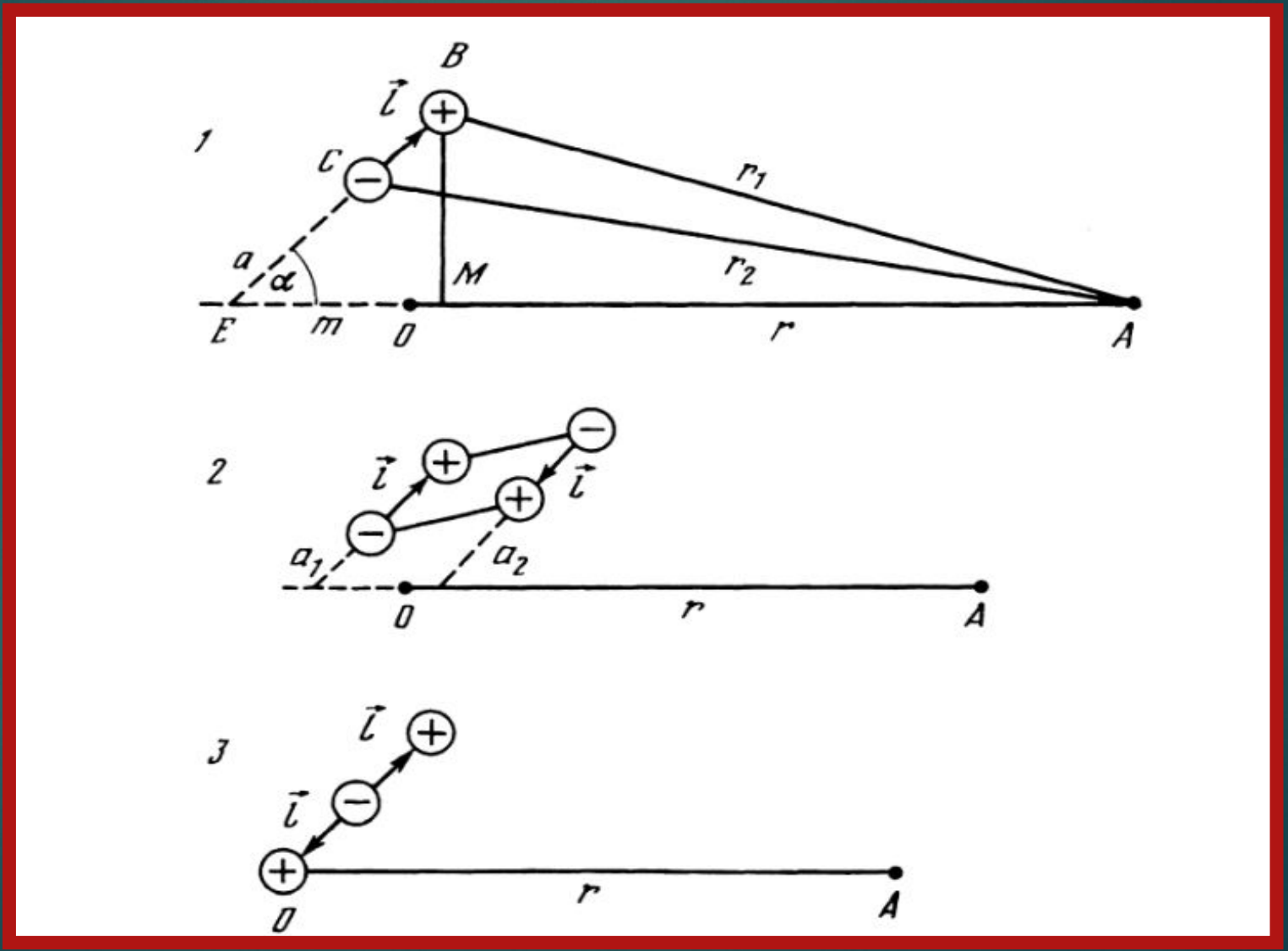
$$\Phi_e^1 = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e}\left[\frac{A_{max}}{r_1}\right],$$

$$\Phi_e = \frac{a^2\sigma_i}{4\sigma_e}\left[\frac{A_{max}}{r_1} - \frac{A_{max} + B_{max}}{r_2} + \frac{B_{max}}{r_3}\right],$$

где r_1, r_2 и r_3 — расстояния от точки наблюдения поля до середины облас- ти распределения отрицательных источников и до середины второй области распределения положительных источников, соответственно.

Эквивалентный источник монопольного типа треугольной волны потенциала действия состоит из трех отдельных монополей со следующими интенсивностями и локализациями: монополь с интенсивностью A_{max} расположен у «левой» вершины треугольника, монополь с интенсивностью B_{max} — у «правой» вершины треугольника и монополь с интенсивностью $-(A_{max} + B_{max})$ — у основания высоты, опущенной из третьей вершины треугольника. Эти монополи образуют точный эквивалентный источник в случае треугольного импульса потенциала действия.

Мультипольное разложение токового диполя и квадрауполя



Схемы к выводу потенциала токового дипольного источника (*1*), токового квадрупольного источника (*2*, общий случай) и квадрупольного источника из двух смежных диполей (*3*)

$$(а)\ \varphi = \frac{\rho I}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right); \quad (б)\ \varphi = \frac{\rho I (r_2 - r_1)}{4\pi r_1 r_2},$$

где r_1 и r_2 – расстояния от соответствующих полюсов до точки измерения потенциала.

$$r_1 = \sqrt{(r+m)^2 - 2(r+m)(a+l)\cos a + (a+l)^2}.$$

Вынесем за корень выражение $(r + m)^2$ и введем обозначение $H_1 \equiv [-2(r + m)(a + l)\cos\alpha + (a + l)^2]/(r + m)^2$. Выражение H_1 по абсолютной величине меньше 1, поскольку $(r + m) > (a + l)$. Получим $1/r_1 = (r + m)^{-1/2} (1 + H_1)^{-1/2}$ и разложим в ряд функцию $(1 + H_1)^{-1/2}$.

$$(1 + H_1)^{-1/2} = 1 - H_1/2 + 3H_1^2/8 + \ldots,$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r+m}\left(1 + \frac{(a+l)\cos\alpha}{r+m} + \frac{(a+l)^2(3\cos^2\alpha - 1)}{2(r+m)^2} + \ldots\right).$$

$$1/r_2 = (r+m)^{-1/2}(1+H_2)^{-1/2},$$

где $H_2 \equiv [-2(r+m)a\cos\alpha + a^2]/(r+m)^2$, и затем получаем:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r+m}\left(1 + \frac{a\cos\alpha}{r+m} + \frac{a^2(3\cos^2\alpha - 1)}{2(r+m)^2} + \ldots\right).$$

$$(r+m) \approx r.$$

$$\varphi = \frac{\rho D\cos\alpha}{4\pi r^2} + \frac{\rho D(2a+l)(3\cos^2\alpha - 1)}{8\pi r^3} + G$$

При $r \gg a$ и $r \gg l$ вторым и последующими членами можно пренебречь. Величина φ будет представлена первым членом, который именуется дипольным потенциалом. Он не зависит от расстояния a или, другими словами, от выбора положения начала координат при условии, что указанные выше неравенства выполняются.

Второй член мультипольного разложения называют квадрупольным потенциалом (схема 2):

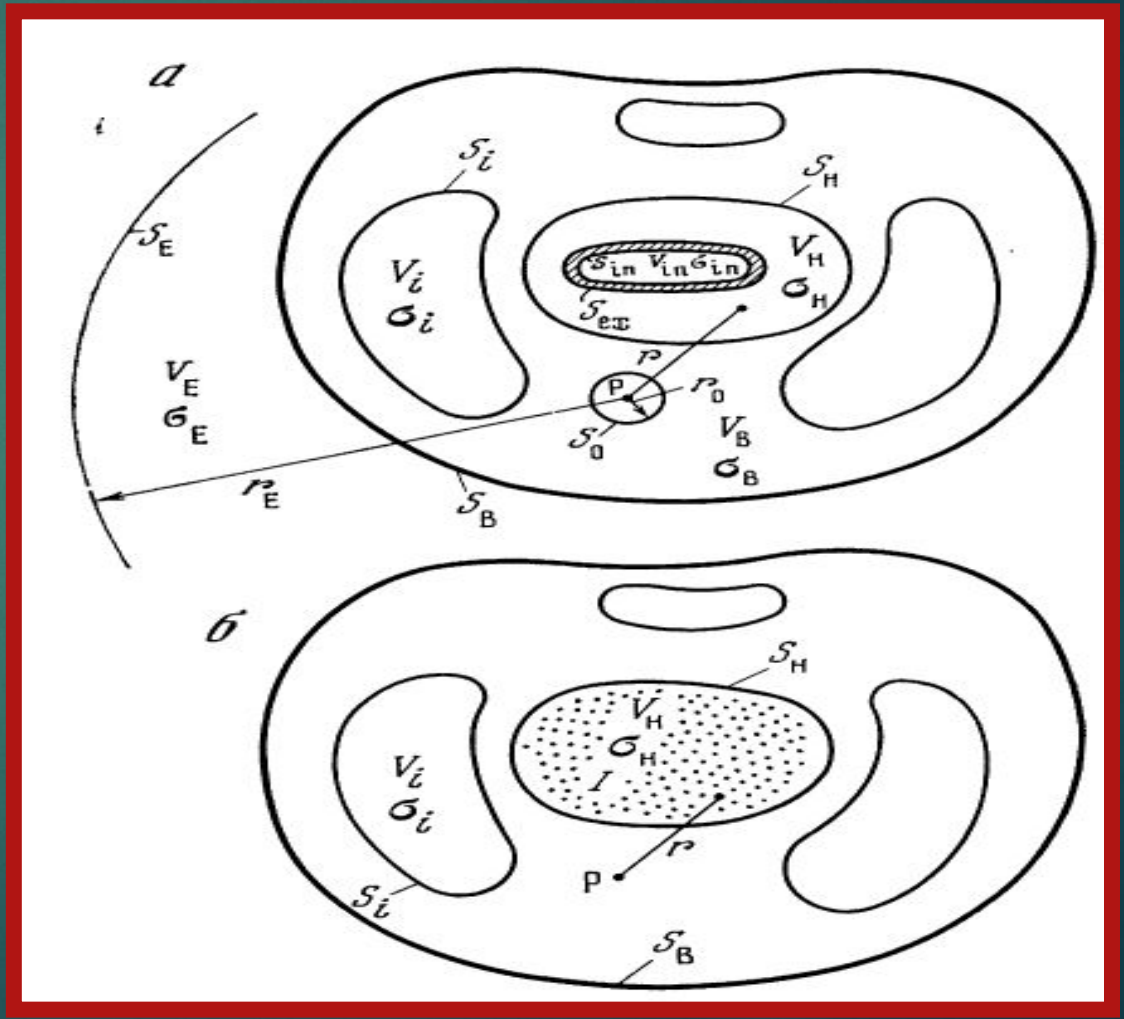
$$\varphi_{кп} = \frac{\rho D(a_1 - a_2)(3\cos^2\alpha - 1)}{4\pi r^3}.$$

$$a_2 = 0,\ a_1 = l,$$ (схема 3)

$$\varphi_{кп} = \frac{\rho D l (3\cos^2\alpha - 1)}{4\pi r^3}.$$

Выражение внеклеточного потенциала через характеристики поля на поверхности мембраны клетки

- Кусочно-однородный проводник, внутри которого находятся источники тока.



Теорема Грина

Положим $\Phi_1 = \varphi$ и $\Phi_2 = 1/r$.

$$\int_V \left[\varphi\Delta\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\Delta\varphi\right] dV = \int_S \left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] dS.$$

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\sigma_{\text{H}}}{\sigma_{\text{B}}} \int\limits_{S_{\text{ex}}} \left[\varphi_{\text{H}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{H}}}{\partial n} \right] dS + \\
& + \frac{\sigma_{\text{H}}}{\sigma_{\text{B}}} \int\limits_{S_{\text{H}}} \left[\varphi_{\text{H}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{H}}}{\partial n} \right] dS + \\
& + \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i}{\sigma_{\text{B}}} \int\limits_{S_i} \left[\varphi_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right] dS + \\
& + \frac{\sigma_{\text{E}}}{\sigma_{\text{B}}} \int\limits_{S_{\text{B}}} \left[\varphi_{\text{E}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{E}}}{\partial n} \right] dS + \\
& + \frac{\sigma_{\text{E}}}{\sigma_{\text{B}}} \int\limits_{S_{\text{E}}} \left[\varphi_{\text{E}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{E}}}{\partial n} \right] dS + \\
& + \int\limits_{S_{\text{H}}} \left[\varphi_{\text{B}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{B}}}{\partial n} \right] dS + \\
& + \int\limits_{S_{\text{B}}} \left[\varphi_{\text{B}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{B}}}{\partial n} \right] dS + \\
& + \int\limits_{S_0} \left[\varphi_{\text{B}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{B}}}{\partial n} \right] dS + \\
& + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{S_i} \left[\varphi_{\text{B}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{B}}}{\partial n} \right] dS.
\end{aligned}
$$

Преобразуем интегралы по сферическим поверхностям S_0 и S_E

$$\int\limits_{S_E} \left[\varphi_E \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_E}{\partial n}\right] dS =$$

$$= \int\limits_{S_E} \left[\varphi_E \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_E}{\partial r}\right] dS =$$

$$= -\frac{1}{r_E^2}\int\limits_{S_E} \varphi_E dS - \frac{1}{r_E}\int\limits_{S_E} \frac{\partial \varphi_E}{\partial r} dS =$$

$$= -4\pi(\varphi_E)_m - 4\pi r_E\left(\frac{\partial \varphi_E}{\partial r_E}\right)_m,$$

$$\lim_{r_E \to \infty} \int_{S_E} \left[\varphi_E \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_E}{\partial n} \right] dS = 0.$$

Аналогично для интеграла по поверхности S_0:

$$\int_{S_0} \left[\varphi_B \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_B}{\partial n} \right] dS = 4\pi (\varphi_B)_m + 4\pi r_0 \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial r_0} \right)_m$$

$$\lim_{r_0 \to 0} \int_{S_0} \left[\varphi_B \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_B}{\partial n} \right] dS = 4\pi \varphi (P).$$

$$-\sigma_{\text{Н}}\,(\partial\varphi_{\text{Н}}/\partial n) = j_{\text{М}},$$

где $j_{\text{М}}$ — плотность тока, протекающего через поверхность S_{ex} в направлении нормали к этой поверхности (в рассматриваемом случае эта величина соответствует мембранному току возбуждающейся клетки). Величина $j_{\text{М}}$ положительна, если ток вытекает изнутри клетки наружу. Знаки в уравнении (1.102) обусловлены тем, что нормаль к поверхности определена утренняя по отношению к области $V_{\text{Н}}$.

$$\varphi_{\text{Н}} = \varphi_{\text{В}},\ \sigma_{\text{Н}}\,(\partial\varphi_{\text{Н}}/\partial n) = \sigma_{\text{В}}\,(\partial\varphi_{\text{В}}/\partial n);$$

на поверхности $S_{\text{В}}$

$$\varphi_{\text{Е}} = \varphi_{\text{В}},\ \sigma_{\text{Е}}\,(\partial\varphi_{\text{Е}}/\partial n) = \sigma_{\text{В}}\,(\partial\varphi_{\text{В}}/\partial n);$$

на поверхностях S_i

$$\varphi_i = \varphi_{\text{В}},\ \sigma_i\,(\partial\varphi_i/\partial n) = \sigma_{\text{В}}\,(\partial\varphi_{\text{В}}/\partial n).$$

$$\varphi(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} \int\limits_{S_{\mathrm{ex}}} \frac{j_{\mathrm{M}}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} \sigma_{\mathrm{H}} \int\limits_{S_{\mathrm{ex}}} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} (\sigma - \sigma_{\mathrm{B}}) \int\limits_{S_{\mathrm{H}}} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i - \sigma_{\mathrm{B}}) \int\limits_{S_i} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} (\sigma_{\mathrm{E}} - \sigma_{\mathrm{B}}) \int\limits_{S_{\mathrm{B}}} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS$$

Для электрокардиологических исследований область V_E представляет собой воздух – диэлектрик, следовательно, $\sigma_E = 0$

$$\varphi(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} \int\limits_{S_{\mathrm{ex}}} \frac{i_{\mathrm{M}}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} \sigma_{\mathrm{H}} \int\limits_{S_{\mathrm{ex}}} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\sigma_{\mathrm{B}}} \sum_{i=1}^{N} (\sigma_i - \sigma_{\mathrm{B}}) \int\limits_{S_i} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_{\mathrm{B}}} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS.$$

Когда клетка окружена однородным и бесконечно протяженным проводником с удельной электропроводностью $\sigma_{\text{В}}$, можно положить $\sigma_{\text{Н}} = \sigma_{\text{Е}} = \sigma_i = \sigma_{\text{В}}$

$$\varphi(\text{P}) = \frac{1}{4\pi\sigma_{\text{В}}} \int\limits_{S_{\text{ex}}} \frac{i_{\text{M}}}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_{\text{ex}}} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) dS.$$

1. Вычертите и соответствующим образом обозначьте график функции $V_m(t)$ для потенциала действия, заданного как $V_m(Z) = [0{,}193Z^3(20 - Z)e^{-0{,}3Z} - 60]$ мВ при $Z \geq 0$ и $V_m = -60$ мВ при $Z \leq 0$; возбуждение распространяется в направлении оси Z со скоростью 10 м/с (координата Z выражается в сантиметрах).

2. Определите интенсивность и расположение распределенных и сосредоточенных эквивалентных источников монопольного типа для условий упр.1 (используйте относительные величины; можно допустить, что эквивалентные источники находятся только на оси волокна, т.е. являются линейными источниками).

3. Определите интенсивность и расположение сосредоточенных эквивалентных источников для прямоугольной волны потенциала действия, показанной на рис.1 (используйте относительные величины).

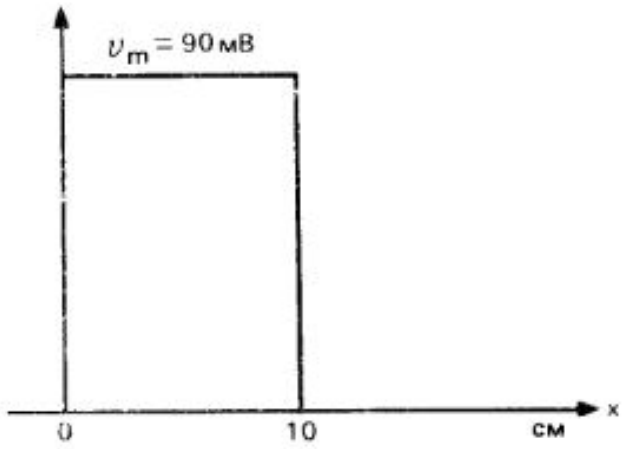
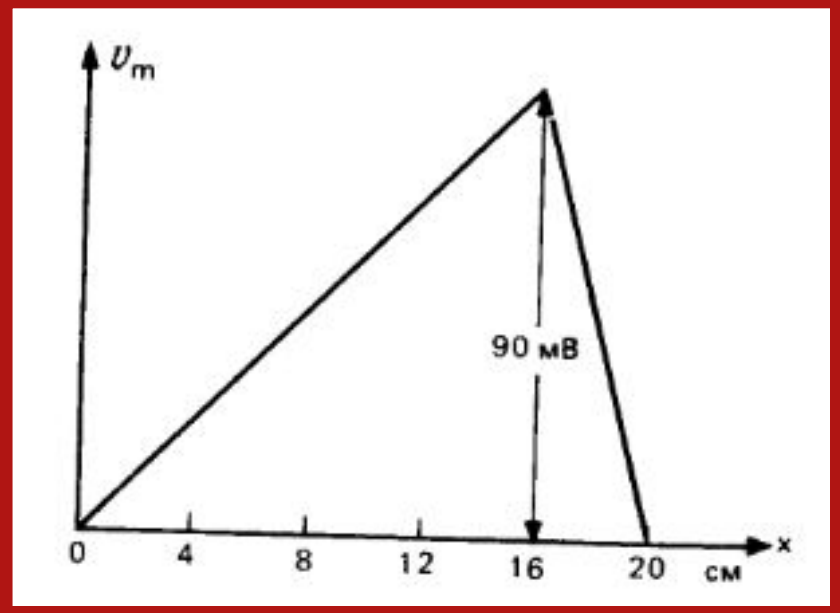


Рис.1 Прямоугольная волна, аппроксимирующая потенциал действия.

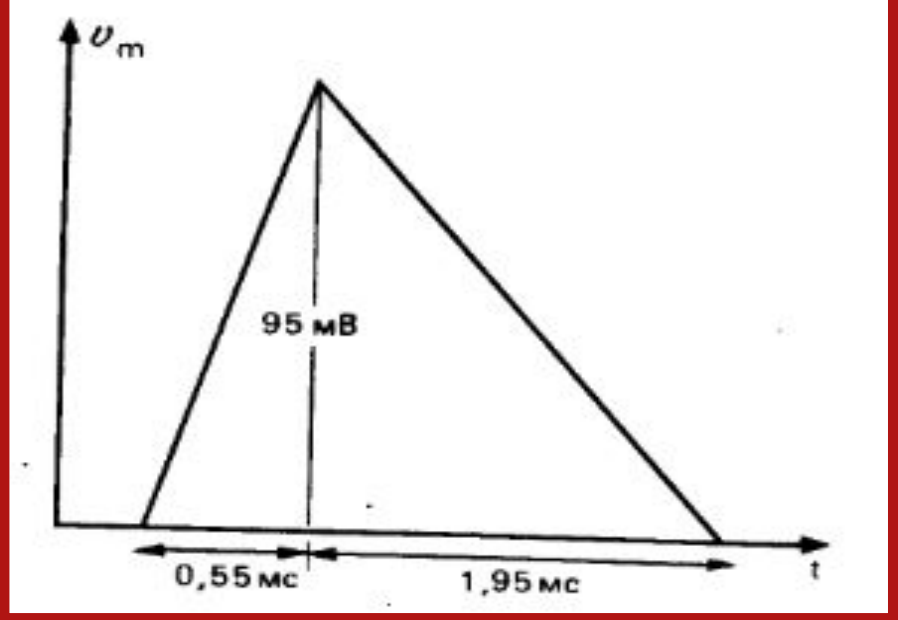
4. Повторите упр.3, но для треугольного импульса потенциала действия, показанного на рис.

5. Для волны потенциала действия, описанной в упр.1, вычертите и соответствующим образом обозначьте функцию $i_m(Z)$ — трансмембранный ток, отнесенный к длине волокна в сантиметрах.



Треугольная волна, аппроксимирующая потенциал действия. Распространяется в направлении оси x со скоростью 10 м/с.

6. Вычертите и соответствующим образом обозначьте плотность дипольного момента осевого эквивалентного генератора в форме распределенных диполей для волны трансмембранного потенциала, показанной на рис. (можно использовать любые *относительные* величины, выражающие плотность дипольных источников). Каковы сосредоточенные дипольные источники, соответствующие такому описанию потенциала действия (укажите их интенсивность, расположение и ориентацию)? Каковы сосредоточенные монопольные источники для этих же условий (укажите их интенсивность и расположение)?



Треугольный импульс, аппроксимирующий потенциал действия. Распространяется в направлении оси x со скоростью 5 м/с по аксону с диаметром 45 мкм. Удельные проводимости внеклеточной и внутриклеточной сред соответственно равны σ_e = 0,05 См/см и σ_i = 0,01 См/см, внеклеточная среда является однородной

7. Для источников, найденных в упр.6, рассчитайте потенциал внеклеточного электрического поля в точках, расположенных на прямой, параллельной оси волокна и отстоящей от нее на 0,2 мм. Повторите этот расчет для аналогичной прямой, находящейся на расстоянии 1 мм от оси волокна.

9. Повторите упр.1, но для потенциала действия, заданного как $V_m(Z) = (96Z^3e^{-Z} - 90)$ мВ при $Z \geq 0$ и $V_m(Z) = -90$ мВ при $Z \leq 0$. Найдите распределенные и сосредоточенные дипольные эквивалентные источники для этой волны потенциала действия.

Пусть потенциалы действия, вызванные двумя стимулами, приближенно описаны как

$$V_m(x,t) = 50\text{th}[t - (x - x_L)/\theta_L] \qquad \text{при } x < 6 \text{ мм},$$

$$V_m(x,t) = 50\text{th}[t - (x - x_R)/\theta_R] \qquad \text{при } x \geq 6 \text{ мм},$$

где соответствующие величины выражены в милливольтах, миллисекундах и миллиметрах. Радиус волокна равен 20 мкм, причем волокно простирается вдоль оси x от точки 0 до точки 12 мм. Сопротивление мембраны, отнесенное к ее площади, равно $R_m = 10^3$ Ом·см^2, удельные проводимости внутриклеточной и внеклеточной сред равны 0,02 и 0,04 См/см, соответственно. Для этого упражнения положим x_L = 2 мм, x_R = 10 мм, θ_L = 2 м/с и θ_R = −2 м/с.

10. При помощи программы ЭВМ составьте таблицу значений функции $V_m(x)$ и вручную вычертите ее график для момента t = 1 мс.

11. Несколькими фразами объясните форму функции $V_m(x)$, найденной в упр.10.

12. При помощи программы ЭВМ составьте таблицу значений функции $i_m(x)$ и вручную вычертите ее график для момента t = 1 мс. Наиболее точный способ решения этой задачи состоит в том, чтобы продифференцировать функцию $V_m(x)$ аналитически и составить таблицу значений результирующей величины; другой способ состоит в составлении таблицы значений функции $V_m(x)$ и последующем определении $i_m(x)$ численным

методом.

13. Несколькими фразами дайте интерпретацию результата, полученного в упр.12, используя понятия истоков и стоков, которые соответствуют данному внеклеточному полю.

Для момента t = 1 мс составьте таблицу значений внеклеточного потенциала Φ_e при следующих значениях координаты x вдоль волокна:

14. x = 0 мм.

15. x = 2 мм.

16. x = 3 мм.

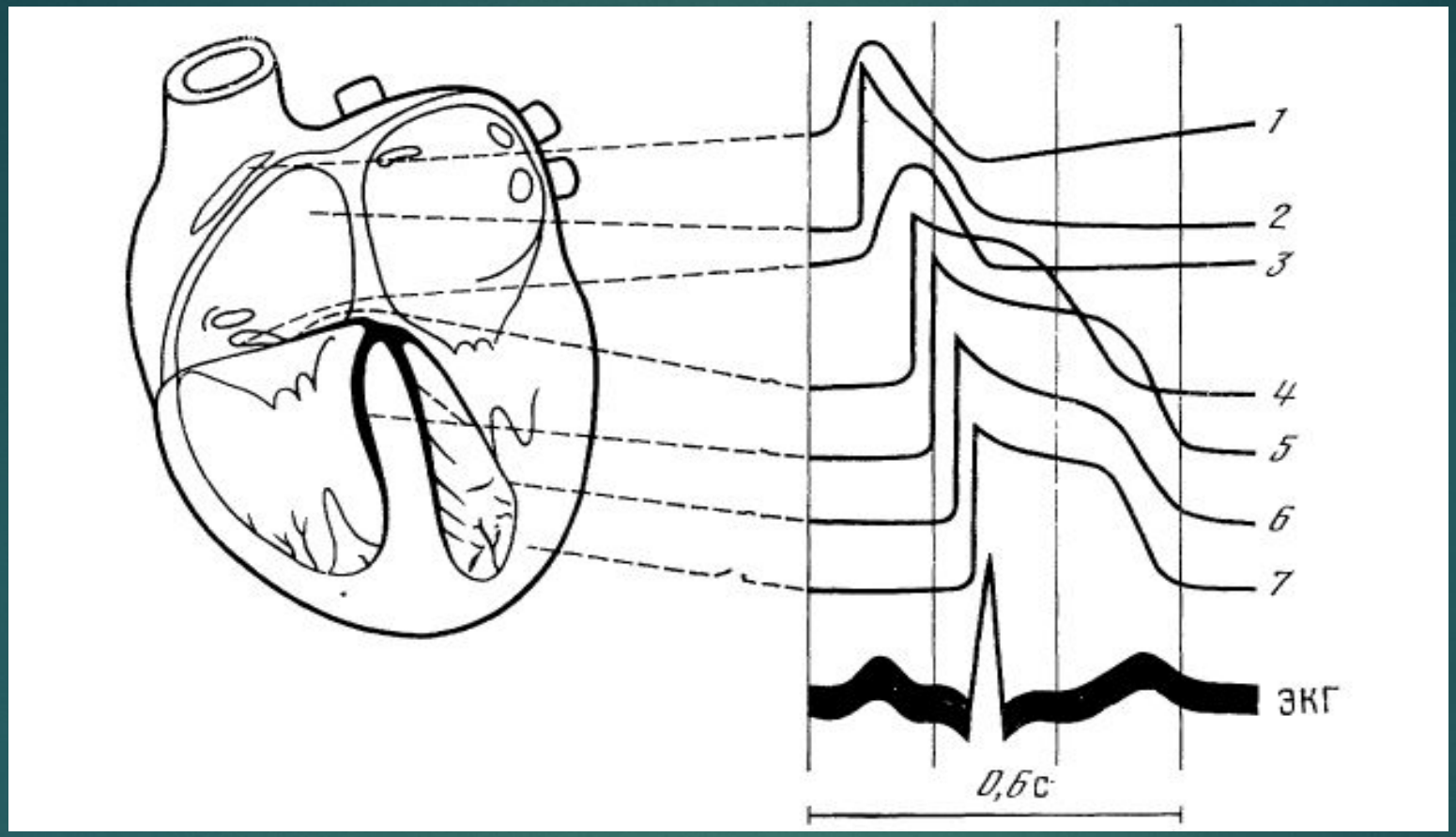
17. x = 4 мм.

18. x = 5 мм.

19. x = 6 мм.

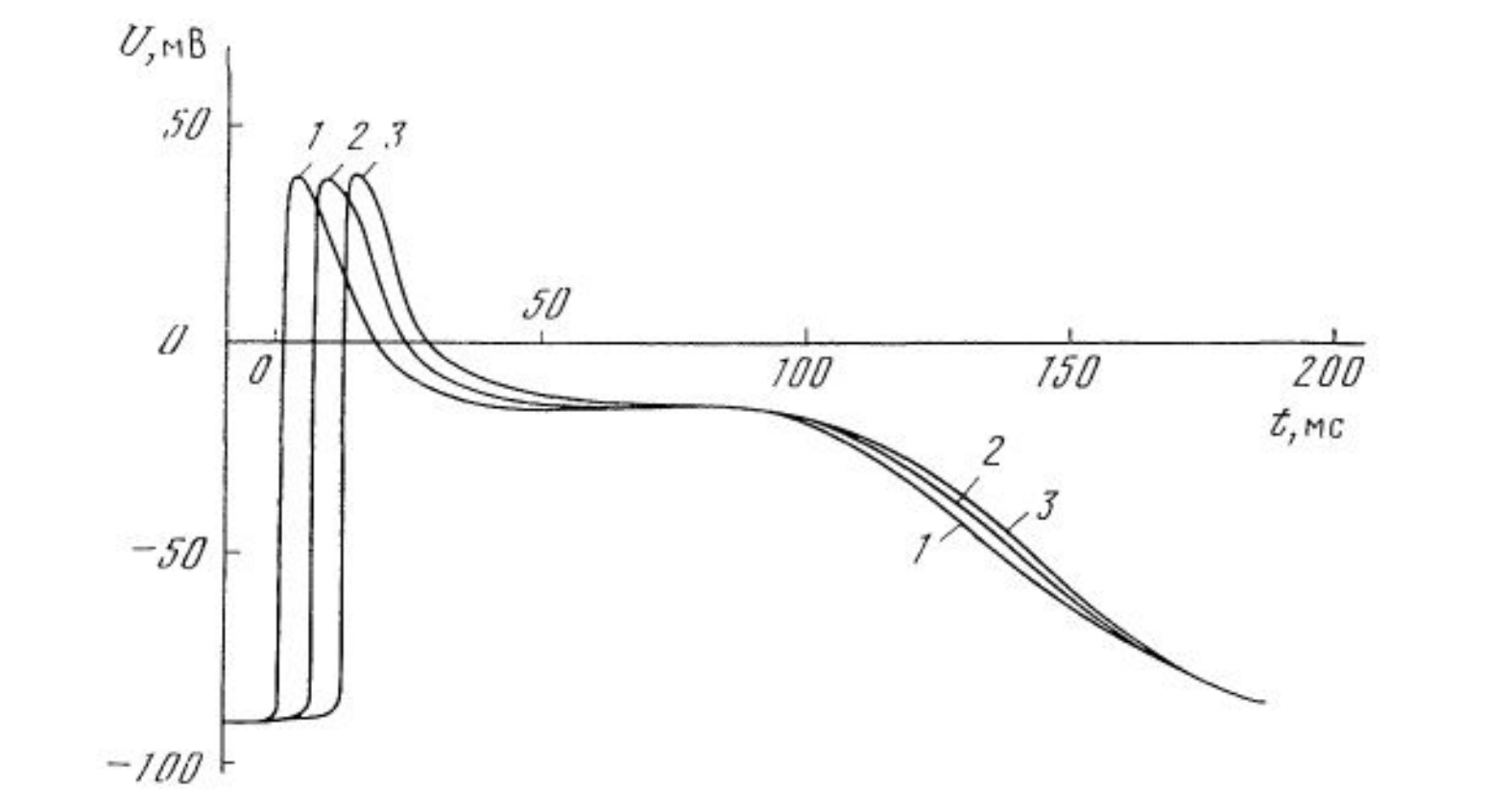
20. На основе найденных значений Φ_e в отдельных точках и с учетом симметрии рассматриваемой структуры вычертите график зависимости Φ_e от x.

Электрофизиология сердца



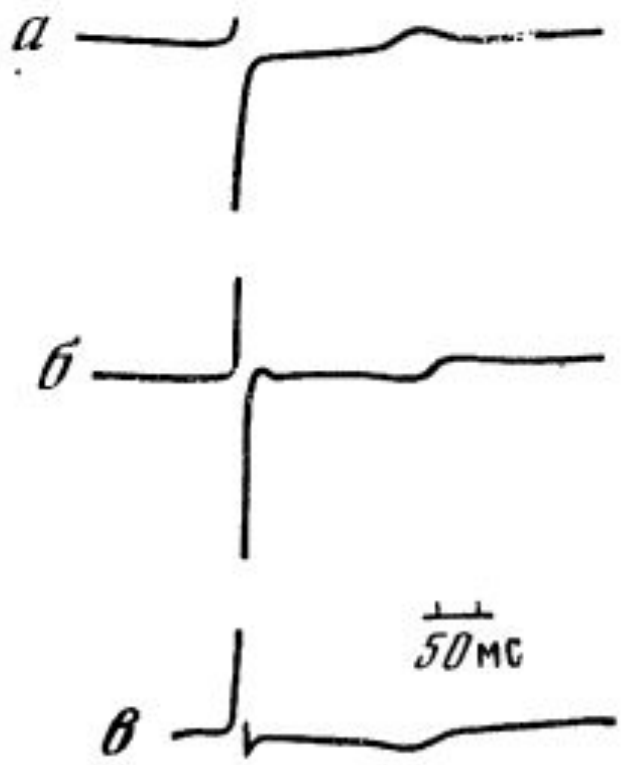
Импульсы потенциала действия, характерные для основных частей сердца, и их соответствие во времени фазам электрокардиограммы [444]

1 — синусовый узел; *2* — правое предсердие; *3* — атриовентрикулярный узел; *4* — пучок Гиса; *5* — ножки пучка Гиса; *6* — конечные волокна Пуркинье; *7* — сократительный миокард левого желудочка



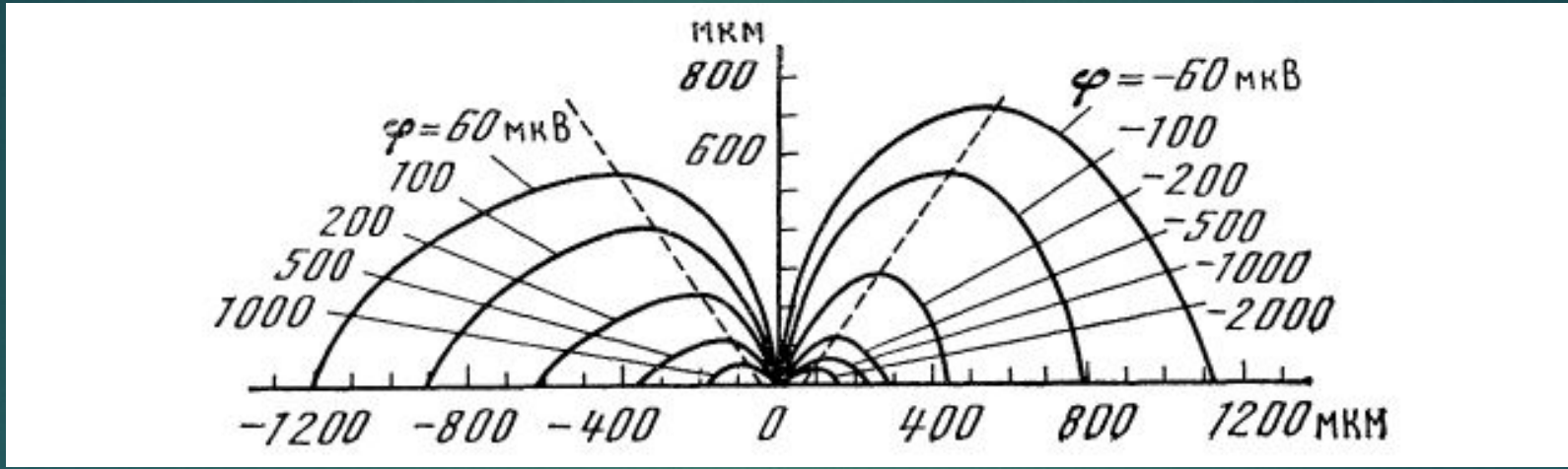
Импульсы потенциала действия на левом конце (*1*), в центральной точке (*2*) и на правом конце (*3*) волокна, рассчитанные при помощи математической модели

Возбуждение возникает на левом конце при $t = 0$



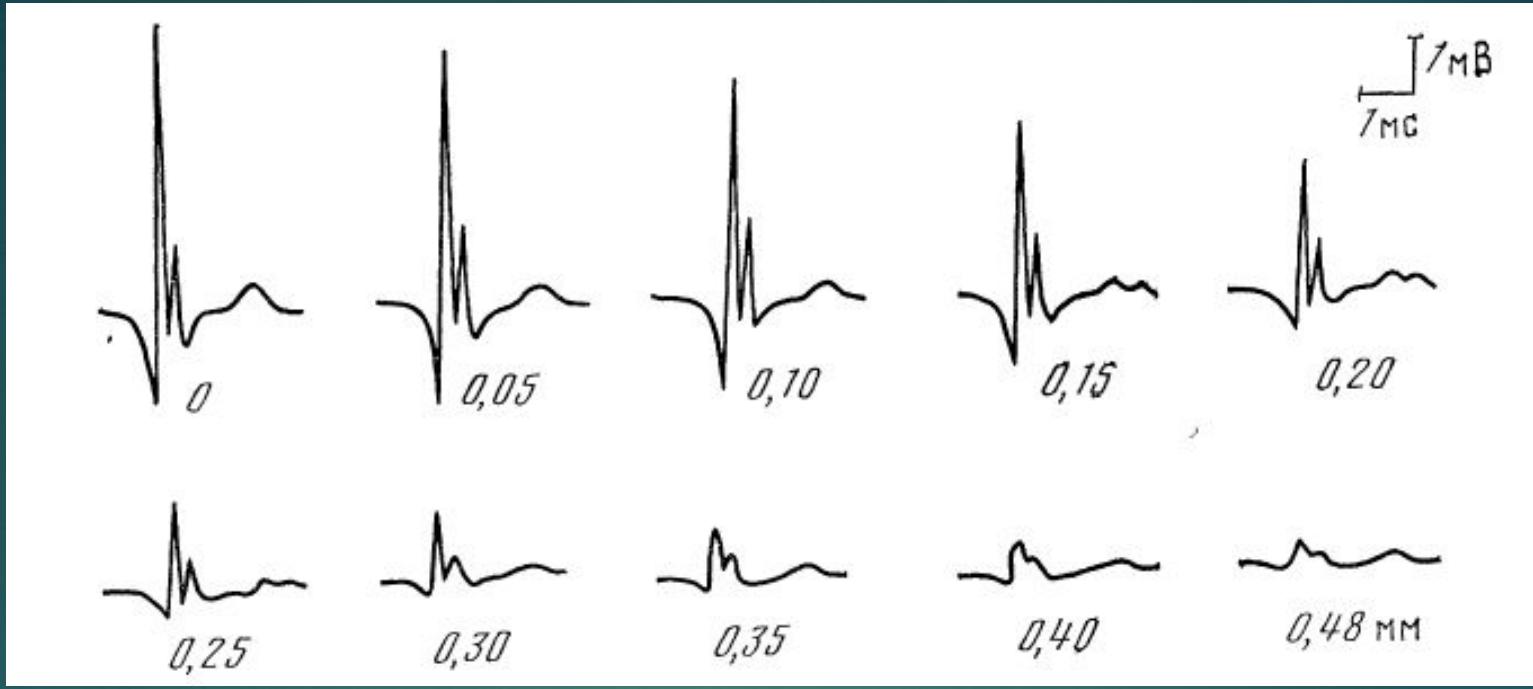
Импульсы внеклеточного потенциала, зарегистрированные в эксперименте при возбуждении полоски мышцы сердца собаки [21]

а — точка отведения вблизи стимулируемого конца полоски;
б — точка отведения в средней части полоски;
в — точка отведения вблизи конца полоски, противоположного стимулируемому



Пространственное распределение внеклеточного потенциала в фазе деполяризации при нормальном распространении возбуждения в отдельном волокне сердца, построенное по данным экспериментальных измерений

Ось абсцисс направлена вдоль волокна. Возбуждение распространяется справа налево со скоростью 145 см/с



. Зависимость амплитуды многофазной внеклеточной электрограммы от расстояния между отведением и возбуждающимся пучком волокон сердца (расстояние указано под каждой кривой)

Регистрация осуществляется биполярным отведением, ось которого параллельна оси пучка; препарат погружен в физиологический раствор

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \int\limits_V \frac{I}{r}\, dV$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int\limits_V \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{J}\, dV,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^n}{l!\, k!\, (n-l-k)!} C_{nkl} \frac{\partial^n}{\partial x^l \partial y^k \partial z^{n-l-k}} \left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^n}{l!\, k!\, (n-l-k)!} \left(\int\limits_V x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} I\, dV\right) \times$$
$$\times \frac{\partial^n}{\partial x^l \partial y^k \partial z^{n-l-k}} \left(\frac{1}{r}\right),$$

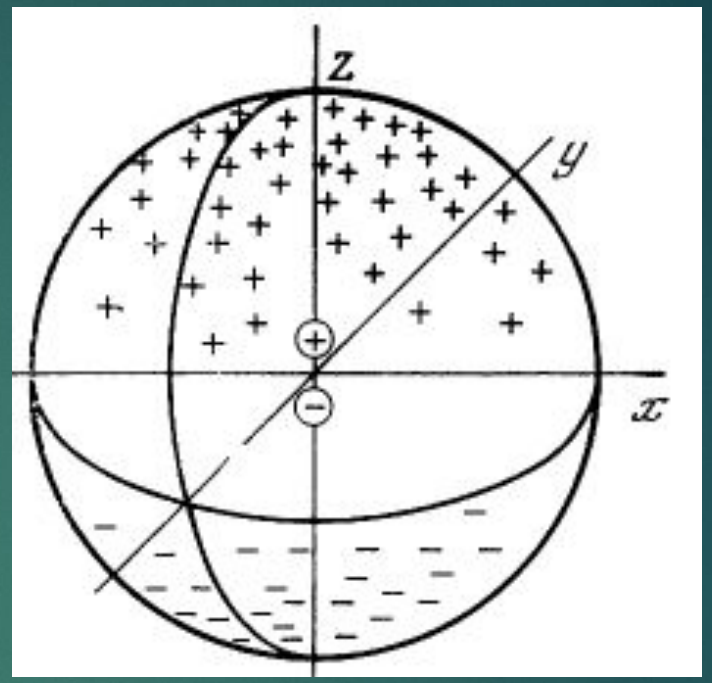
где V — область источников.

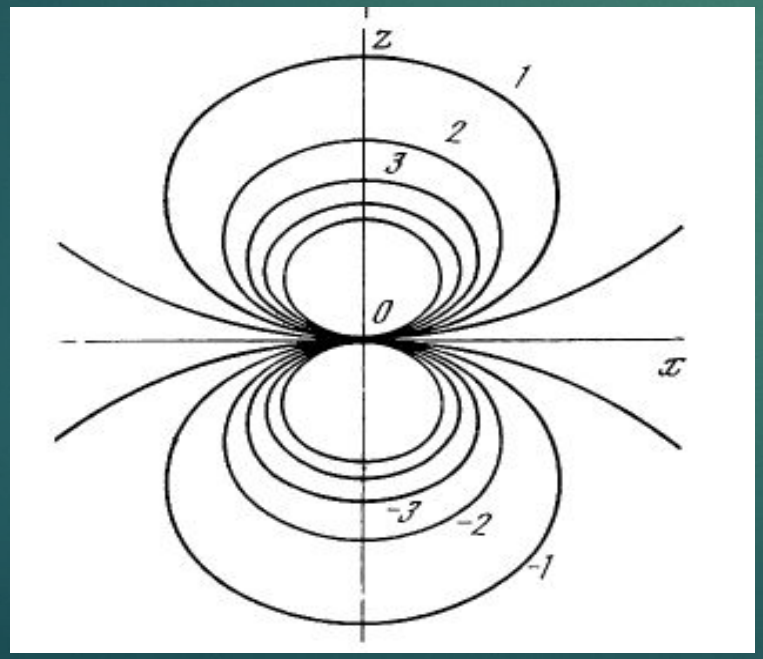
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-l} \frac{(-1)^n}{l!\, k!\, (n-l-k)!} C_{nkl} \frac{\partial^n}{\partial x^l \partial y^k \partial z^{n-l-k}} \left(\frac{1}{r}\right),$$

где

$$C_{nkl} = \int_V x_0^l y_0^k z_0^{n-l-k} I \, dV.$$

$$\varphi_1 = \frac{M_1}{4\pi\sigma}\frac{\cos\theta}{r^2}.$$





$$D = \int_{z_1}^{z_2} I_l z dz,$$

$$D = \pi a^2 \sigma_{in} [U(z_1) - U(z_2)].$$

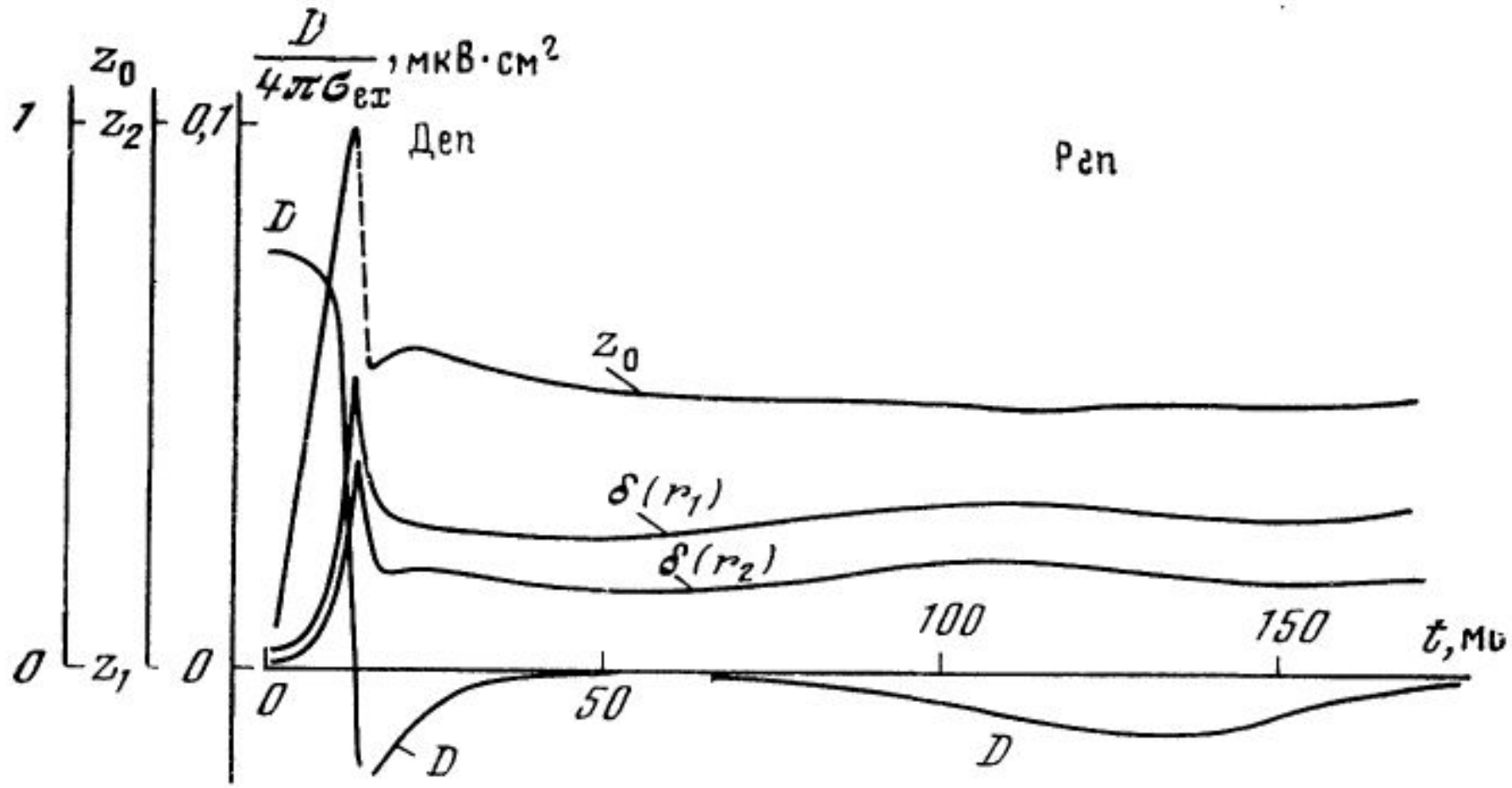
$$\varphi_D = \frac{D}{4\pi\sigma_{ex}} \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{a^2}{4} \frac{\sigma_{in}}{\sigma_{ex}} [U(z_1) - U(z_2)] \times$$

$$\times \frac{z - z_0}{[x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_{in}}{\sigma_{ex}}(U_r - U_a)\int_A \frac{\cos\theta}{r^2}\,dA,$$

где r — длина отрезка прямой, соединяющего точки на поверхности поперечного сечения клетки A с точкой наблюдения, и θ — угол между этим отрезком и осью z.

$$\varphi = -\frac{a^2}{4}\frac{\sigma_{in}}{\sigma_{ex}}(U_r - U_a)\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

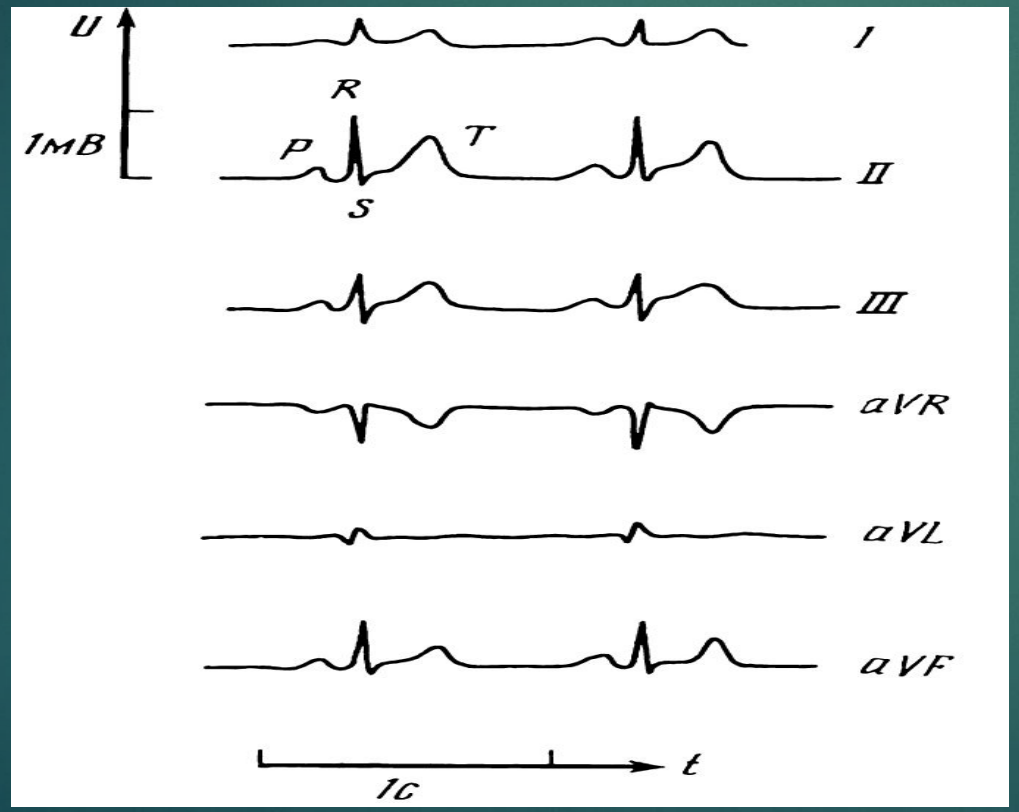


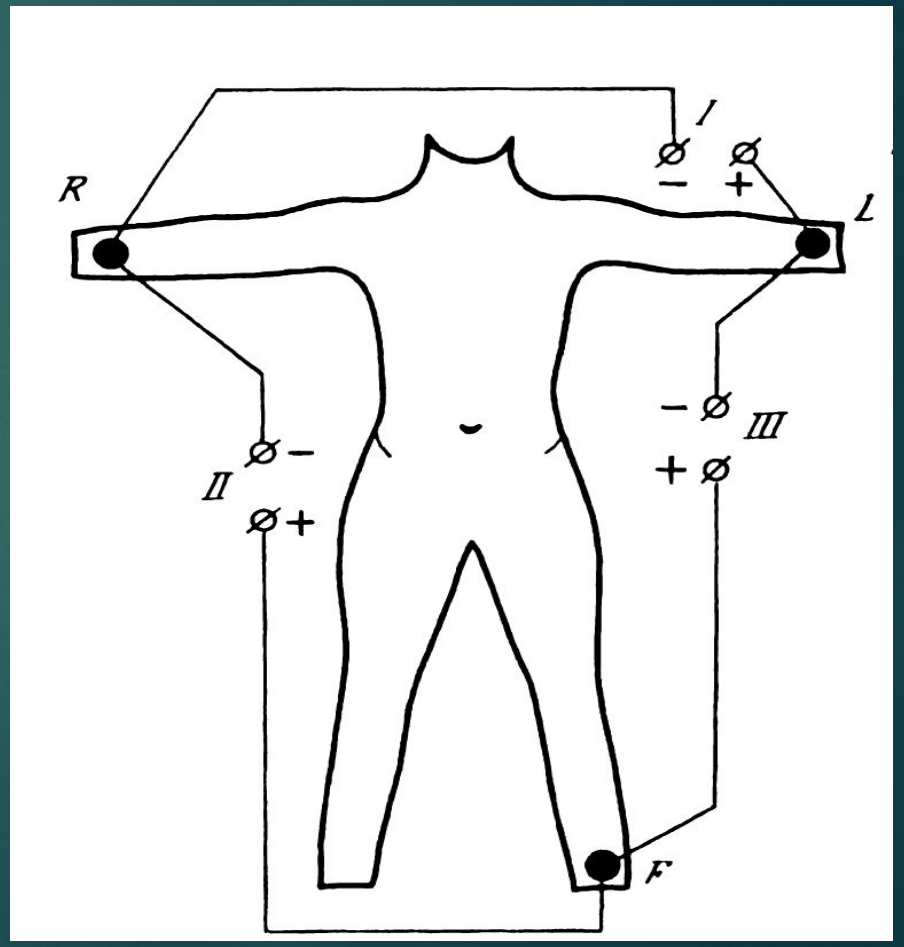
Характеристики дипольной аппроксимации клеточного генератора

Деп — область деполяризации, Реп — область реполяризации. D — дипольный момент, z_0 — координата положения диполя, δ — относительная среднеквадратичная ошибка аппроксимация потенциала (при двух значениях расстояния от центра волокна: $r_1 = 0{,}6L$, $r_2 = 0{,}8L$). Масштаб дипольного момента в фазе конечной реполяризации увеличен в 10 раз

Система отведений электрокардиограмм

- Первая группа отведений: три двухполюсных (стандартных) отведения Эйнтховена: I, II, III.





Разности потенциалов для отведения Эйнтховена:

$$U_{\mathrm{I}} = \varphi_L - \varphi_R$$

$$U_{\mathrm{II}} = \varphi_F - \varphi_R$$

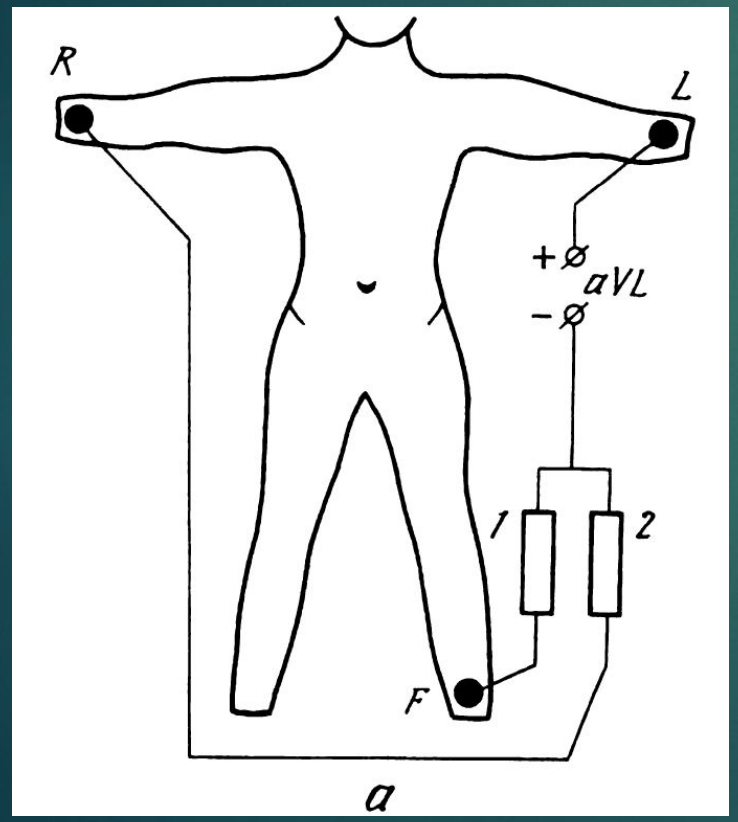
$$U_{\mathrm{III}} = \varphi_F - \varphi_L$$

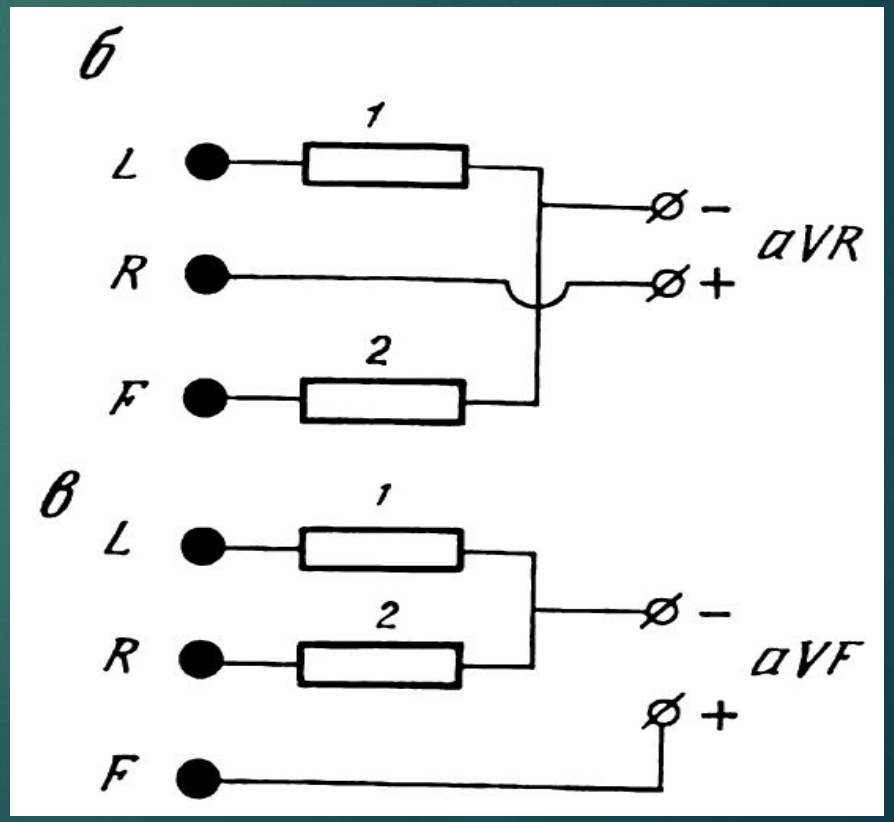
$$U_{\mathrm{I}} - U_{\mathrm{II}} + U_{\mathrm{III}} = 0.$$

$$\varphi_L + \varphi_R + \varphi_F = 0.$$

Усиленные однополюсные отведения:

aVL, aVR и *aVF*





Закон Ома и закон Кирхгофа для отведения aVL:

$$\varphi_1 = \varphi_R - IR_1$$

$$\varphi_1 = \varphi_F + IR_2.$$

$$\varphi_1 = (\varphi_R + R_F)/2 + I(R_2 - R_1)/2.$$

$$R_1 = R_2$$

$$\varphi_1 = (\varphi_R + \varphi_F)/2.$$

- Потенциалы терминалей φ_2 и φ_3 для отведений aVR b aVF равны соответственно:

$$(\varphi_L + \varphi_F)/2$$

$$(\varphi_L + \varphi_R)/2.$$

Для отведения aVL можно записать:

$$(\varphi_R + \varphi_F)/2 = -\varphi_L/2.$$

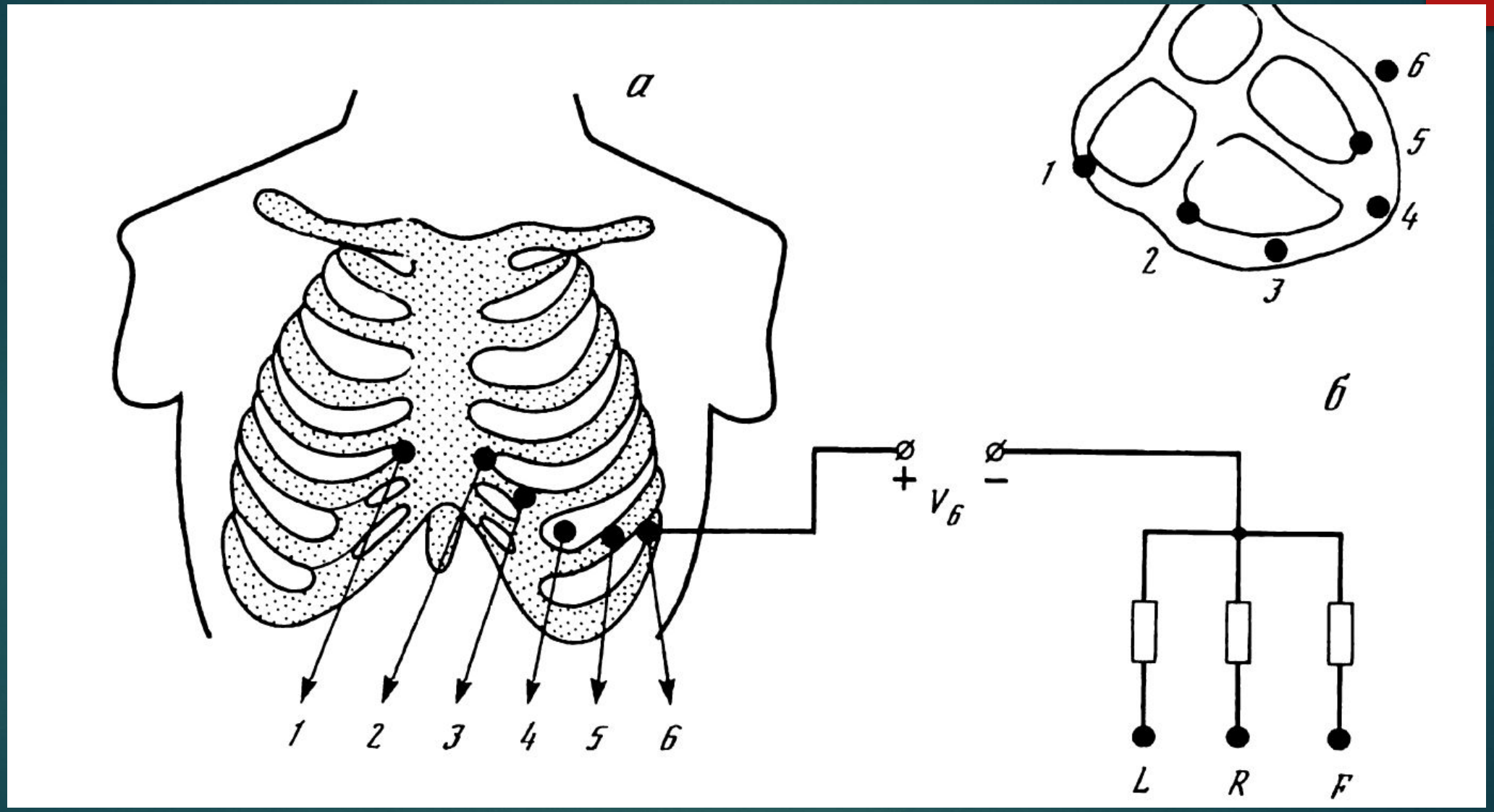
$$(\varphi_L - \varphi_1) = 3\varphi_L/2.$$

Для отведений aVR и aVF также будем иметь:

$$(\varphi_R - \varphi_2) = 3\varphi_R/2$$

$$(\varphi_F - \varphi_3) = 3\varphi_F/2.$$

Грудные отведения с центральной терминалью Вильсона:

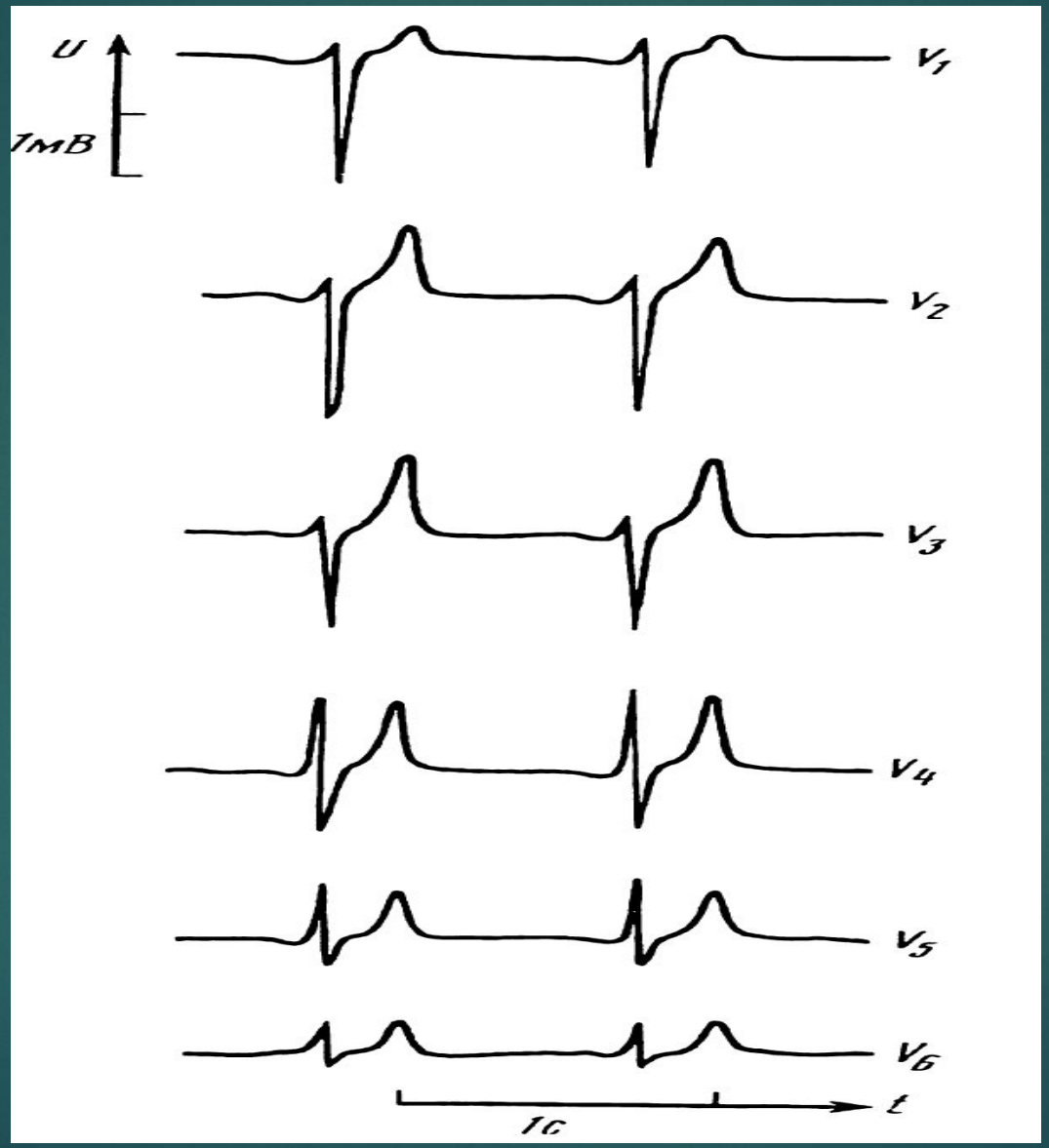


Потенциал центральной терминали выражается соотношением и приблизительно равен 0:

$$\varphi = (\varphi_L + \varphi_R + \varphi_F)/3$$

Грудные отведения V1 – V6 преимущественно описывают колебания под соответствующим активным электродом.

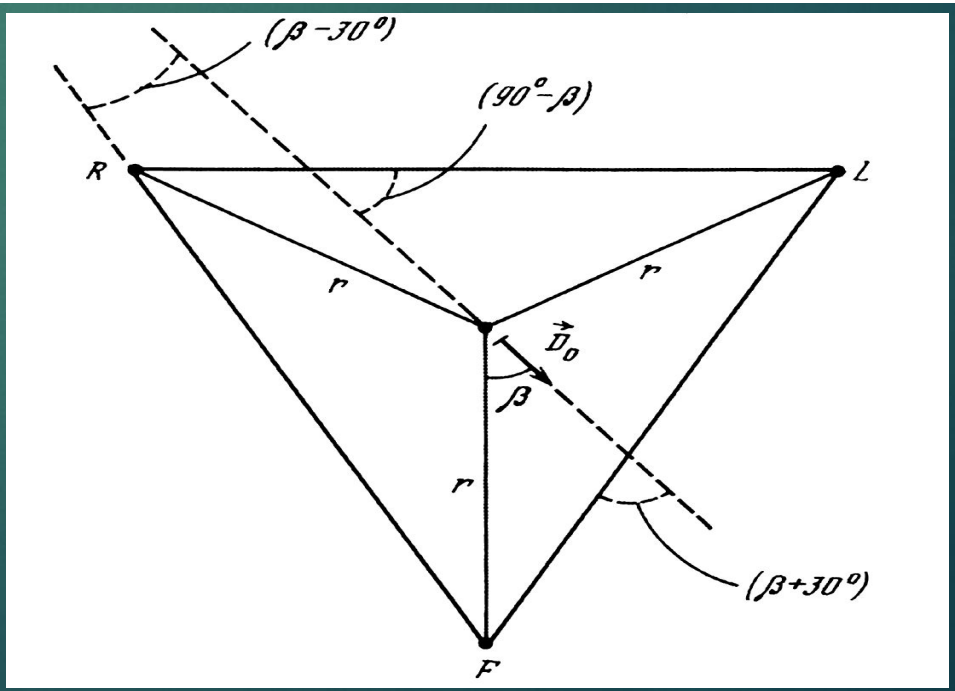
Грудные отведения



$$\varphi = (K\rho D_0 \cos\alpha)/4\pi r^2.$$

$$\vec{D}_0 = \sum_{p=1}^{N} \vec{D}_p.$$

$$\varphi_L + \varphi_R + \varphi_F = K\frac{\rho D_0}{4\pi r^2}[\cos(120^\circ - \beta) + \cos(120^\circ + \beta) + \cos\beta].$$



$$\varphi_L - \varphi_R = K\rho D_0[\cos(120^\circ - \beta) - \cos(120^\circ + \beta)] / 4\pi r^2 =$$
$$= (K\sqrt{3}\rho / 4\pi r^2) \times [D_0 \cos(90^\circ - \beta)];$$

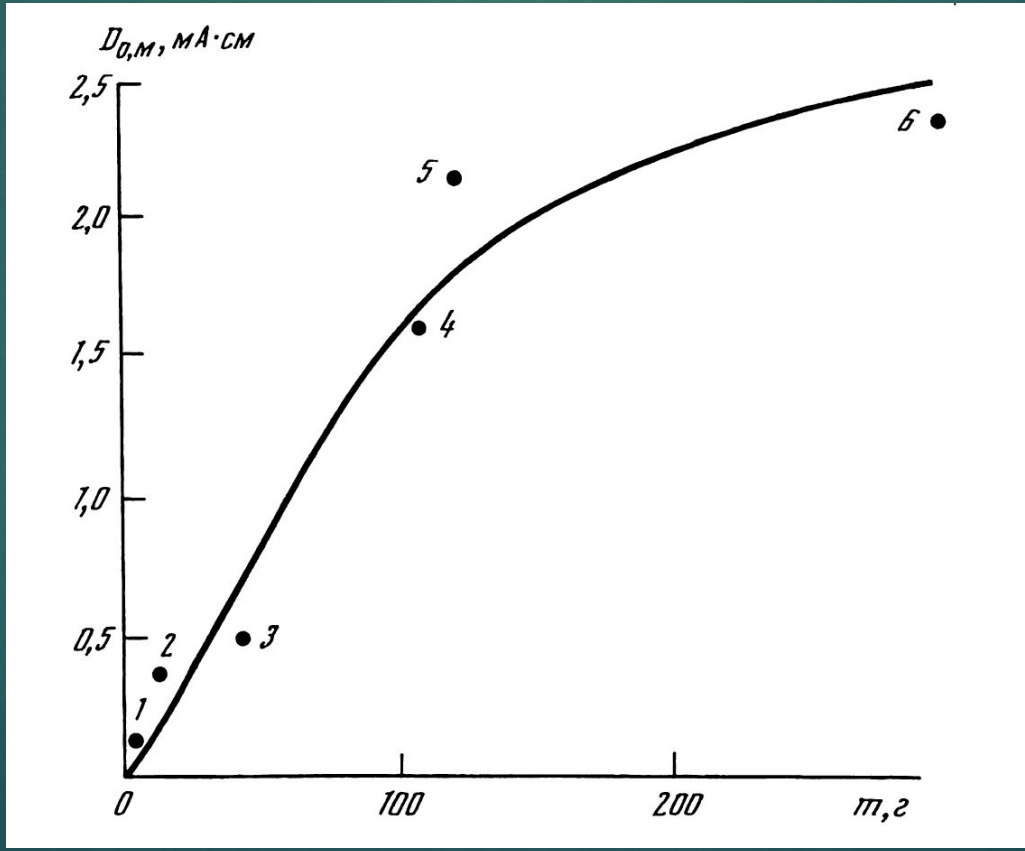
$$\varphi_F - \varphi_R = K\rho D_0[\cos\beta - \cos(120^\circ + \beta)] / 4\pi r^2 =$$
$$= (K\sqrt{3}\rho / 4\pi r^2) \times [D_0 \cos(\beta - 30^\circ)];$$

$$\varphi_F - \varphi_L = K\rho D_0[\cos\beta - \cos(120^\circ - \beta)] / 4\pi r^2 =$$
$$= (K\sqrt{3}\rho / 4\pi r^2) \times [D_0 \cos(\beta + 30^\circ)].$$

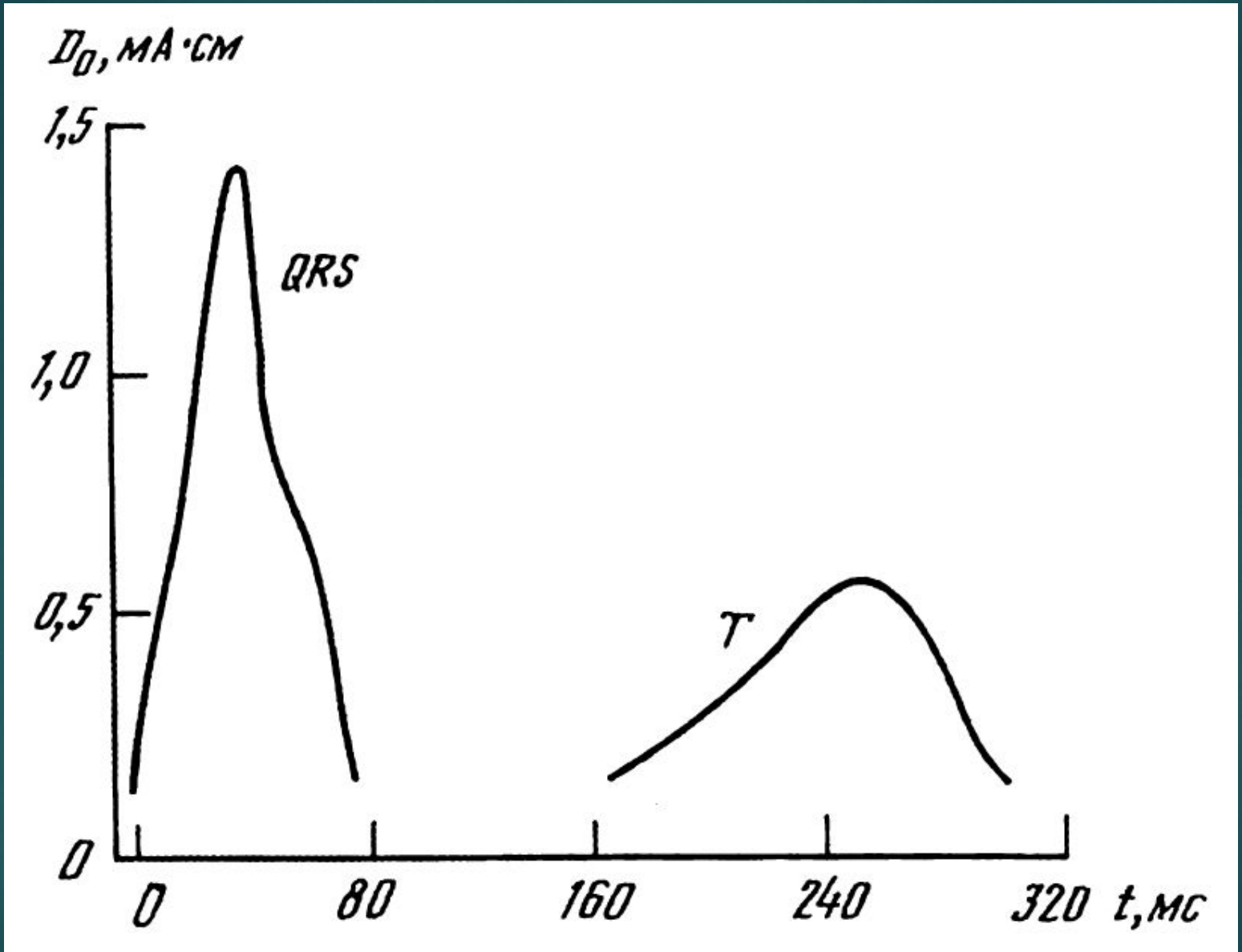
Векторные электрокардиограммы

$$D_{0,M} = b \cdot m^{0,77},$$

где b – постоянный коэффициент.

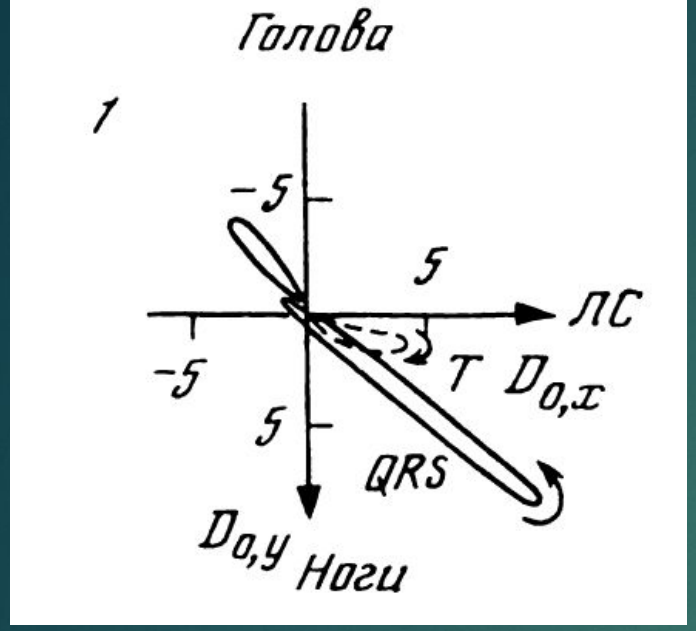


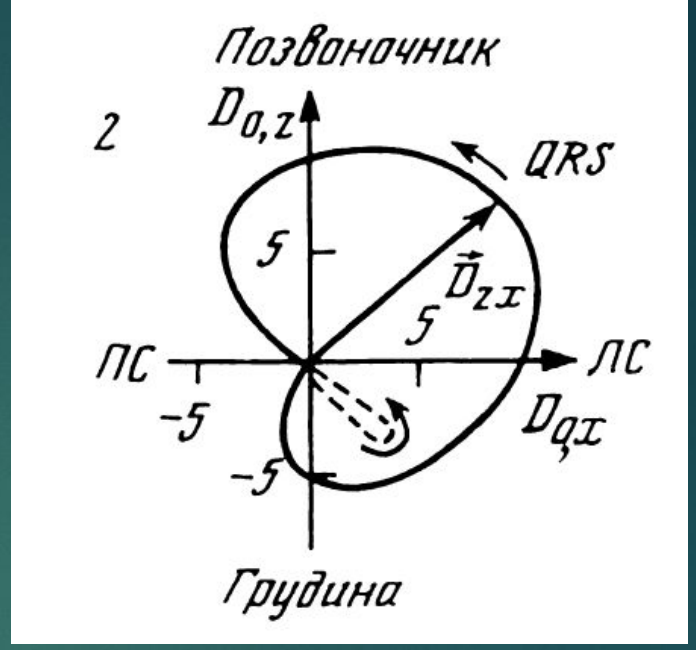
1 – крыса, 2 – кролик, 3 – обезьяна, 4 – свинья, 5 – овца, 6 – человек

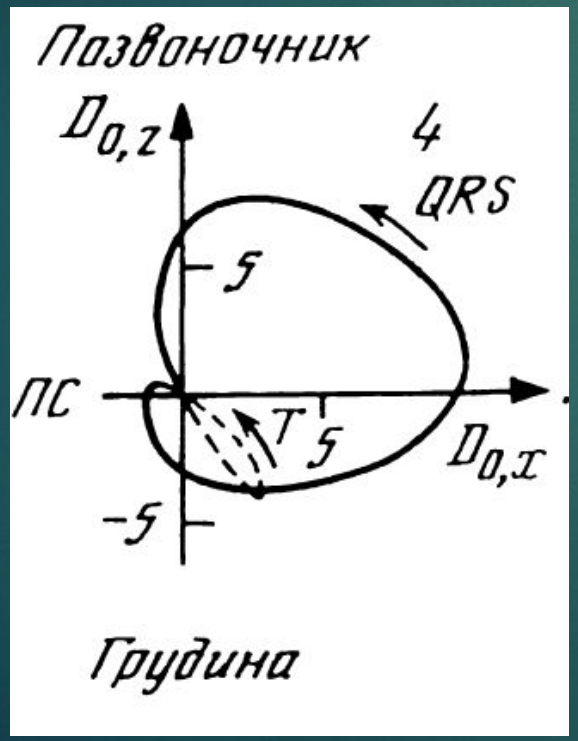

D_0, мА·см
1,5
1,0
0,5
0
QRS
T
0
80
160
240
320
t, мс

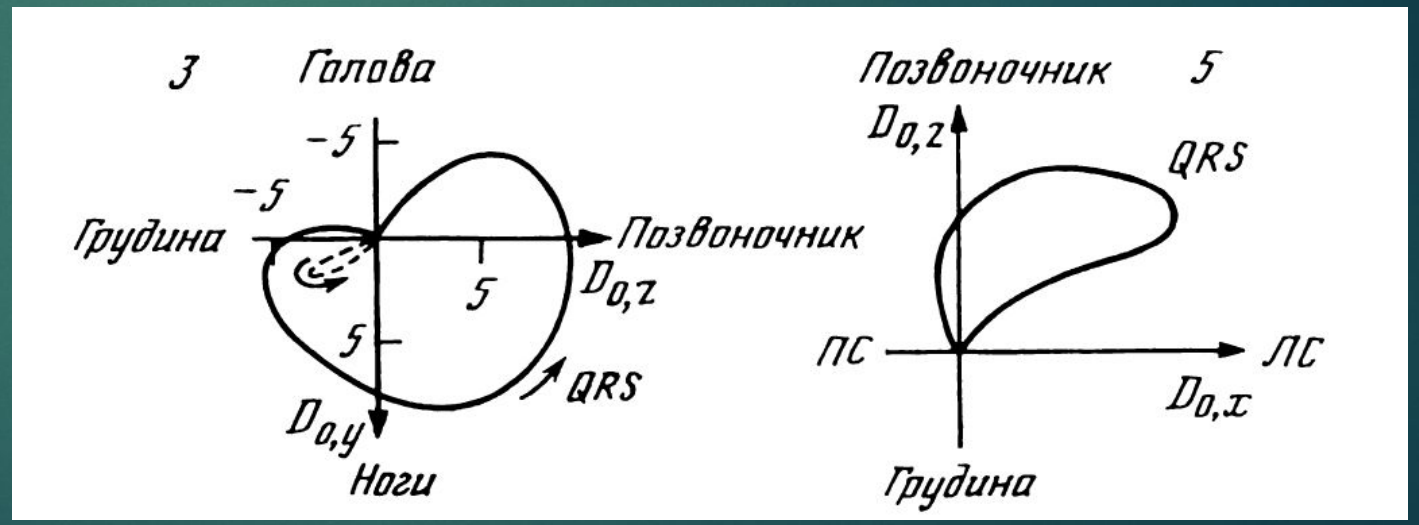
На практике используют два вида векторных электрокардиограмм (ВЭКГ): пространственную и плоскую.

Пространственная – представляет собой траекторию конца вектора D0 в трехмерном пространстве. Плоские ВЭКГ – это кривые, которые описываются концами проекций электрического вектора на координатные оси.


Голова
1
-5
5
ЛС
-5
T
$D_{0,x}$
5
QRS
$D_{0,y}$
Ноги


Позвоночник
2
$D_{0,z}$
QRS
5
$\vec{D}_{zx}$
5
ПС
ЛС
-5
$D_{0,x}$
-5
Грудина


Позвоночник
$D_{0,z}$
4
QRS
5
ПС
T
5
$D_{0,x}$
-5
Грудина


3
Голова
-5
-5
Грудина
Позвоночник
5
$D_{0,z}$
5
QRS
$D_{0,y}$
Ноги
Позвоночник
5
$D_{0,z}$
QRS
ПС
ЛС
$D_{0,x}$
Грудина

1, *3* – проекции на фронтальную и левую боковую плоскости; *2*, *4*, *5* – проекции на горизонтальную плоскость; *1–3* – один обследуемый, *4* – другой обследуемый. D_{0x}, $D_{0,y}$ и $D_{0,z}$ – проекции вектора сердца на координатные оси в единицах 1 мкА · м (*1–4*) или в условных единицах (*5*). *ПС* и *ЛС* – правая и левая стороны обследуемого. Кривые стрелки показывают направления перемещения конца проекции вектора сердца в периоды *QRS*-комплекса и *T*-зубца

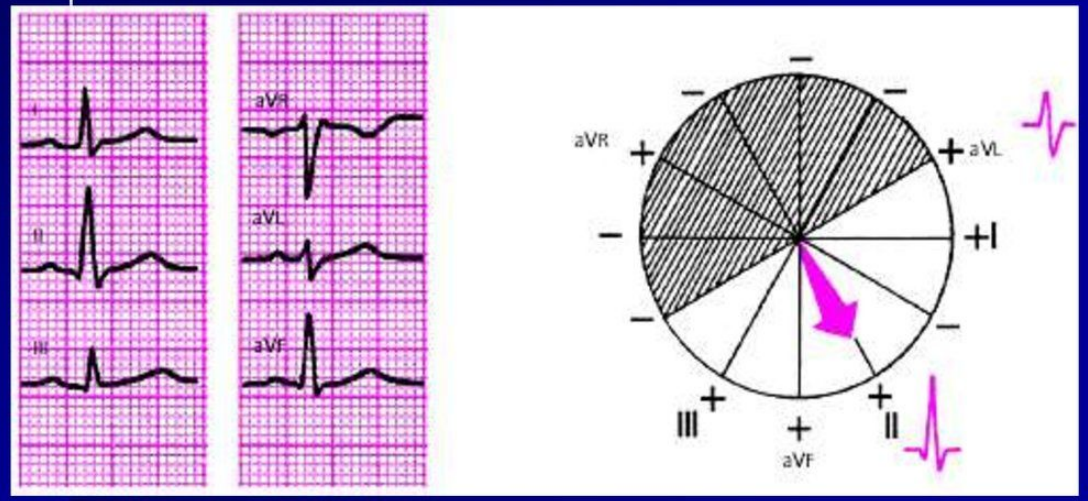
$$\vec{D}_{0,x} + \vec{D}_{0,y} + \vec{D}_{0,z}$$

Электрическая ось сердца

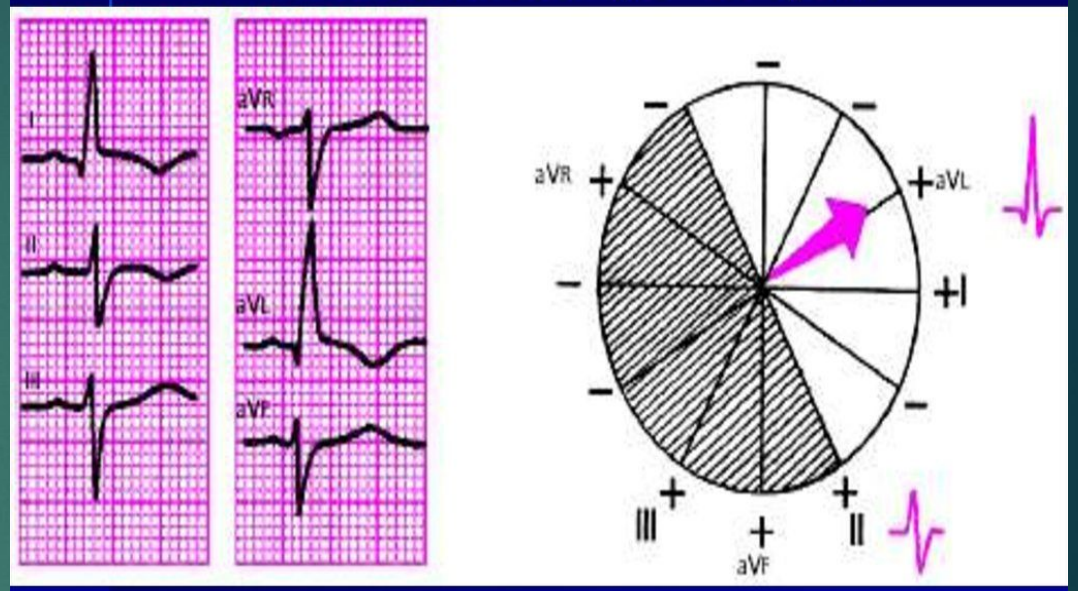
Электрической осью сердца называют направление электрического вектора в момент его максимальной абсолютной величины (D_0)

Нормальное положение электрической оси сердца.

Угол альфа + 60 град.

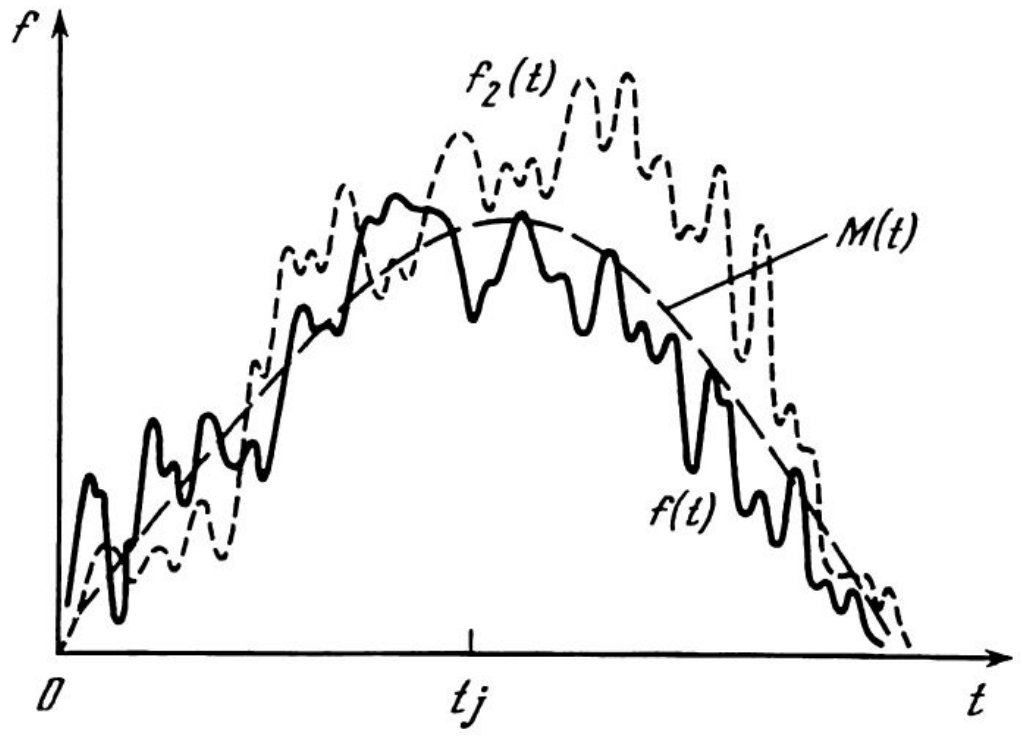


Отклонение электрической оси сердца влево. Угол альфа - 30 град.



Элементы теории случайных процессов

Процесс, который точно не воспроизводится, именуется случайным, а некоторую количественную характеристику (ординату) f в зависимости от другой переменной, чаще всего, времени, t – *случайной функцией.*



- Отдельная конкретная зависимость f1(t) – реализация случайного процесса. Набор ординат f1(tj), f2(tj), ….. fp(tj),……fm(tj), где m равен общему количеству реализаций, называются *сечением случайной функции*. При анализе этого набора величин используют известные статистические (вероятностные) характеристики: M(tj) – среднее значение, σ(tj) и σ^2(tj) – стандартное отклонение и дисперсия. Данные характеристики являются неслучайными функциями t.

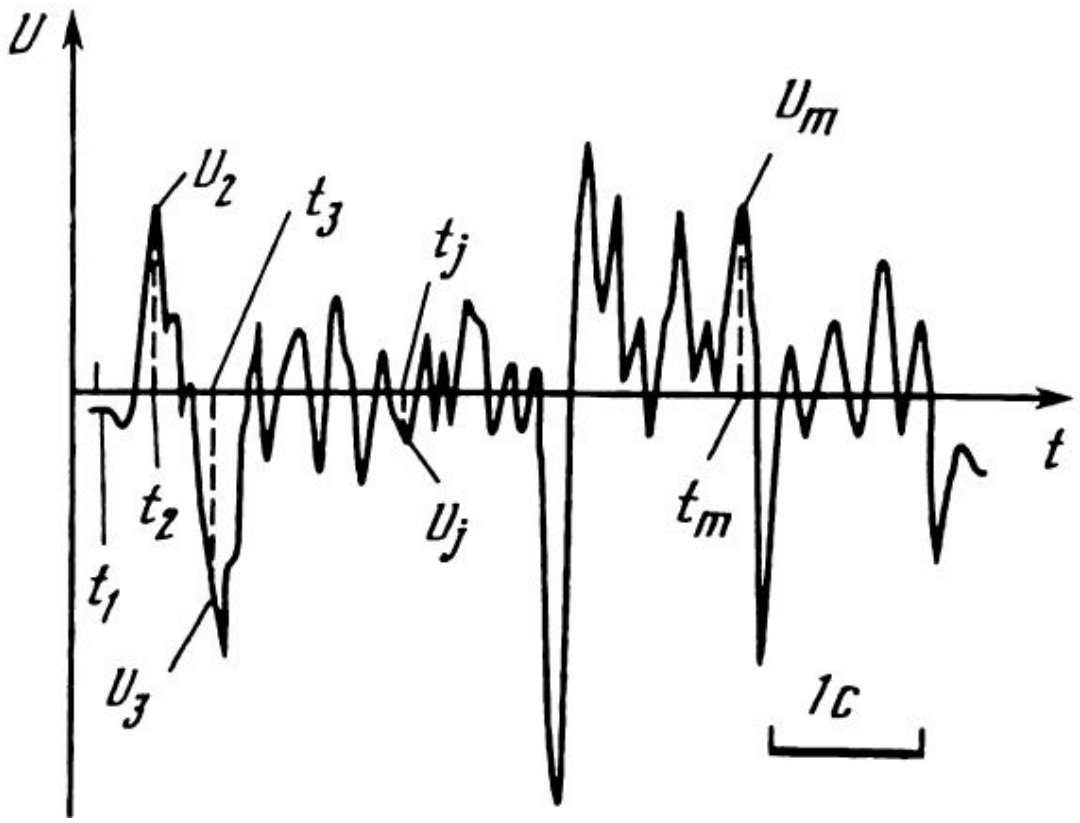
Корреляционный момент

$$K(t_i, t_j) = \frac{1}{m-1} \sum_{p=1}^{m} [f_p(t_i) - M(t_i)] \cdot [f_p(t_j) - M(t_j)],$$

где p – текущий номер измерения (реализации) процесса.

Корреляционная функция

- Корреляционный момент зависит от (tj – ti). Эту зависимость описывают с помощью корреляционной функции. По строгому определению, *корреляционная функция* K(t, t+τ) – такая неслучайная функция, которая при любой паре аргументов t и t+τ равна соответствующему значению корреляционного момента (τ – величина смещения второго аргумента относительно первого).



- ЭЭГ относят к так называемым стационарным случайным процессам, для которых их статистические характеристики не зависят от t: M(t) = M = const, $\sigma(t) =$ $= \sigma$ = const.

Нормированная корреляционная функция Kτ

$$R_\tau = K_\tau / \sigma^2.$$

- Этот вид корреляционной функции представляет собой коэффициенты корреляции между сечениями. Если R $\tau \neq 0$, то это свидетельствует о синхронизации процесса в разных сечениях. Положительные и отрицательные R τ получаются при однонаправленных и противофазных изменениях соответственно.

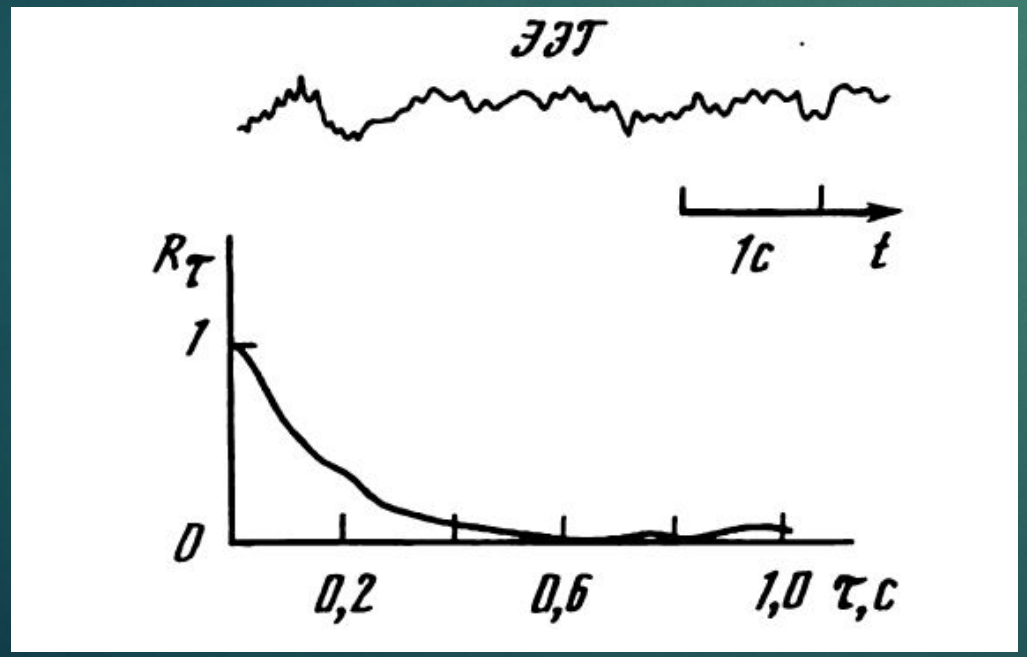
Кросскорреляционный момент - $K_{fg}(t_i, t_j)$,
кросскорреляционная функция - $K_{fg}(t, t+\tau)$

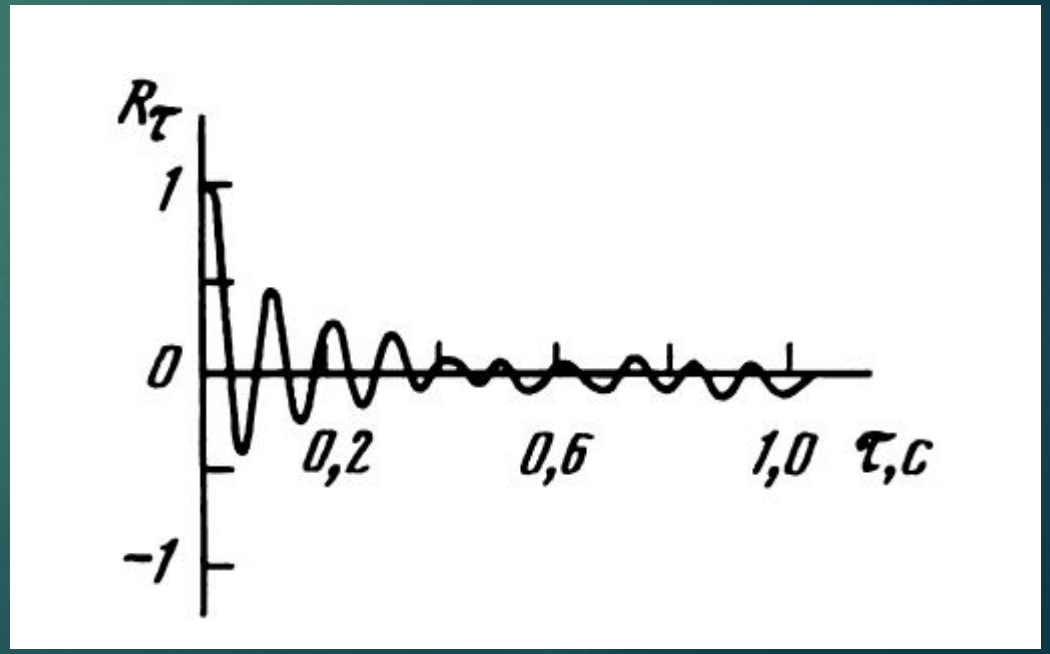
Для эргодических случайных процессов нормированная кросскорреляционная

$$(a)\quad R_{fg,\tau} = K_{fg,\tau} / \sigma_f \sigma_g; \quad (б)\quad K_{fg,\tau} = R_{fg,\tau} \sigma_f \sigma_g,$$

где σ_f и σ_g – стандартные отклонения процессов f и g.

Свойства ЭЭГ в данном отведении можно установить по одной реализации (регистрации), но при условии большого периода наблюдения. При этом все вероятностные





Пример гармонического колебания:

$$U = U_0 \cos 2\pi\nu t.$$

$$[U_0 \cos 2\pi\nu t].\ [U_0 \cos 2\pi\nu(t + \tau)]$$

$$[(U_2^0/2)\ (\cos 2\pi\nu\tau + \cos 2\pi\nu(2t + \tau))]$$

$$K_\tau = \frac{U_0^2}{2(T-\tau)} \int_0^{T-\tau} [\cos 2\pi\nu\tau + \cos 2\pi\nu(2t+\tau)]\,dt.$$

$$K_\tau = (U_0^2/2)\cdot\cos(2\pi\nu\tau) + U_0^2[\sin(2\pi\nu(T-\tau))\cdot\cos(2\pi\nu T)]/4\pi\nu(T-\tau).$$

При $T - \tau \gg 1/\nu$

$$K_\tau = (U_0^2/2)\cdot\cos 2\pi\nu\tau.$$

$$\sigma^2 = \frac{U_0^2}{T}\int_0^T \cos^2 2\pi\nu t \cdot dt.$$

$$\tau = 0$$

$$\sigma^2 = U_0^2 / 2.$$

$$R = \cos 2\pi\nu\tau.$$

Для оценки ритмической активности ЭЭГ применяется спектр мощности – зависимость квадрата амплитуды от частоты с использованием преобразования Фурье.

Статистические характеристики ЭЭГ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m}(U_j - \overline{U})^2}{m-1}},$$

где j – номер отсчета, $\overline{U}$ – среднеарифметическое значение разности потенциалов.

$\sigma = U_0 / \sqrt{2}$, где U_0 – амплитуда колебаний.

$$R_\tau = \frac{\frac{1}{m-p}\sum_{j=1}^{m-p} U_j \cdot U_{j+p}}{\sqrt{\frac{1}{m-p}\sum_{j=1}^{m-p} U_j^2}\ \sqrt{\frac{1}{m-p}\sum_{j=1}^{m-p} U_{j+p}^2}},$$

где j и p – целочисленные величины, $\tau = p\Delta t$. Аргумент разности потенциалов U_{j+p} смещен относительно U_j на интервал $p\Delta t$.

$$(1/(m-p)\sum_{j=1}^{m-p} (A_0^2/2)\cos 2\pi\nu p\Delta t,$$

которая равна $(A_0^2/2)\cos 2\pi\nu p\Delta\tau$, или $(A_0^2/2)\cos 2\pi\nu\tau$.

Мощность ЭЭГ

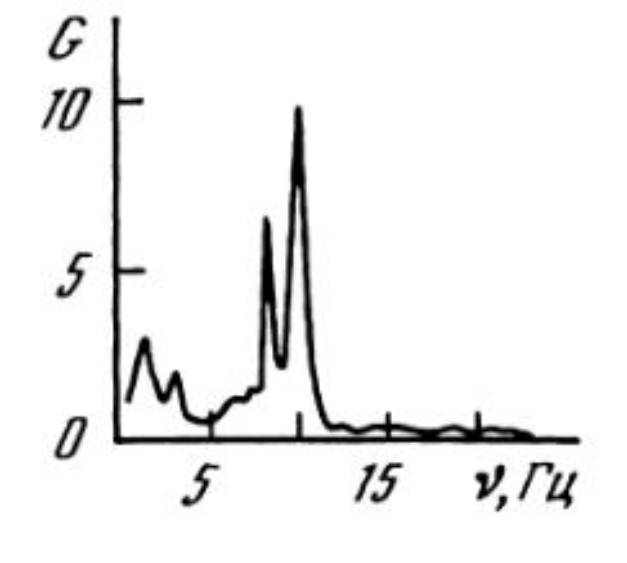
$$G = \frac{2}{m-1} \sum_{j=1}^{m} F_\tau [R_\tau \cdot \cos 2\pi\nu j\Delta\tau],$$

в которой $\Delta\tau$ – шаг разбиения оси τ корреляционной функции; $\tau = j\Delta\tau$; j – целочисленная величина, m – общее количество отсчетов;

$$[(A_0^2/2) \cdot \cos 2\pi\nu j\Delta\tau \cdot \cos 2\pi\nu j\Delta\tau]$$

$$[A_0^2/4 + (A_0^2/4)\cos 4\pi\nu j\Delta\tau].$$

$$G \approx A_0^2/4.$$



Общая формула дисперсии биопотенциалов головного мозга

$$\varphi = \sum_{l=1}^{N} \varphi_l,$$

где φ_l – потенциал клетки l;

$$\sigma^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j - \overline{\varphi})(\varphi_j - \overline{\varphi}),$$

где m – общее количество отчетов, $\overline{\varphi}$ – среднее значение.

$$\varphi_j = \varphi_{1j} + \varphi_{2j} + \varphi_{3j}.$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi^2{}_{1j} + \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{2j}^2 + \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{3j}^2 +$$

$$+\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j}\varphi_{2j} + \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{2j}\varphi_{1j} + \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{1j}\varphi_{3j} +$$

$$+\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{3j}\varphi_{1j} + \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{2j}\varphi_{3j} + \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \varphi_{3j}\varphi_{2j}.$$

$$\sigma^2 = \sum_{l=1}^{N} \sigma_{\varphi,l}^2 + \sum_{k \neq p}^{N}\sum^{N} K_{kp},$$

$$\sigma^2 = \sum_{l=1}^{N} \sigma_{\varphi,l}^2 + \sum_{k \neq p}^{N}\sum^{N} R_{kp}\sigma_{\varphi,k}\sigma_{\varphi,p},$$

где R_{kp} – коэффициент корреляции, который еще именуют коэффициентом *взаимной попарной* корреляции для клеток k и p; $\sigma_{\varphi,k}$ и $\sigma_{\varphi,p}$ – стандартные отклонения потенциалов, генерируемых указанными клетками.

$$\varphi_l = \phi_l D_l,$$

$$\phi_l \equiv \rho\cos\alpha/4\pi r^2$$

$$\sigma_{\varphi,l} = \phi_l \sigma_{Д,l}.$$

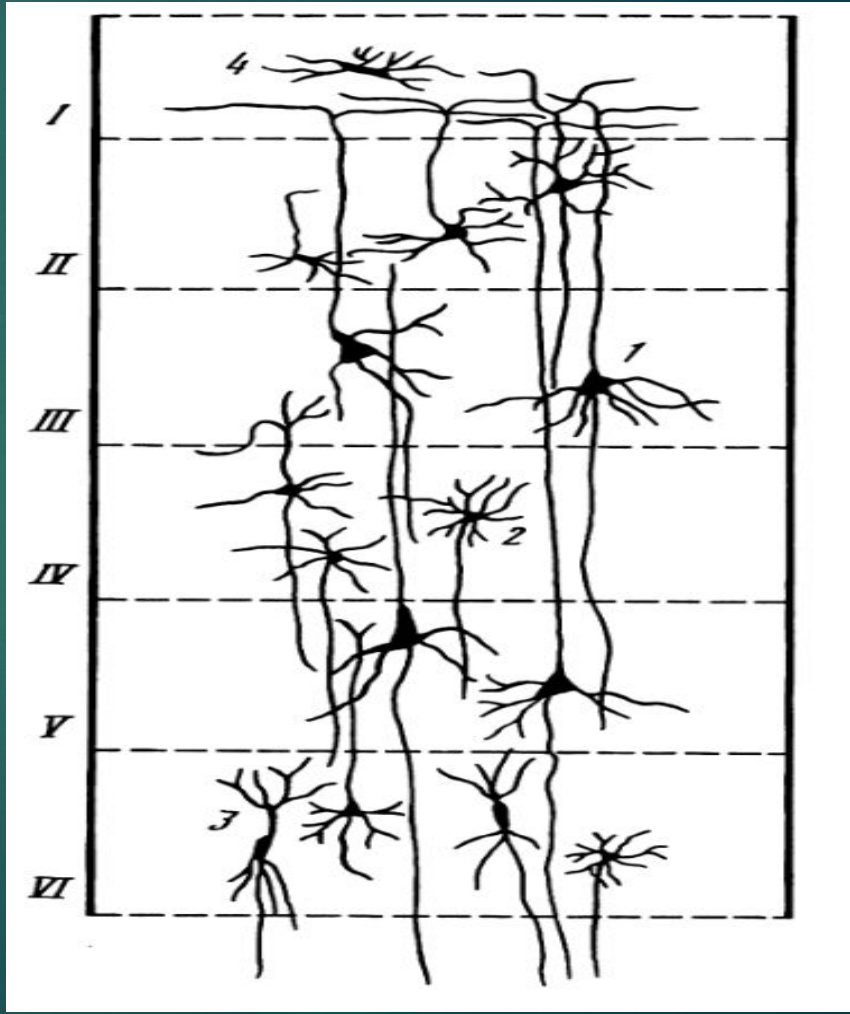
$$\sigma^2 = \sum_{l=1}^{N} \phi_l^2 \sigma_{Д,l}^2 + \sum_{k \neq p}^{N} \sum^{N} R_{kp} \phi_k \phi_p \sigma_{Д,k} \sigma_{Д,p}.$$

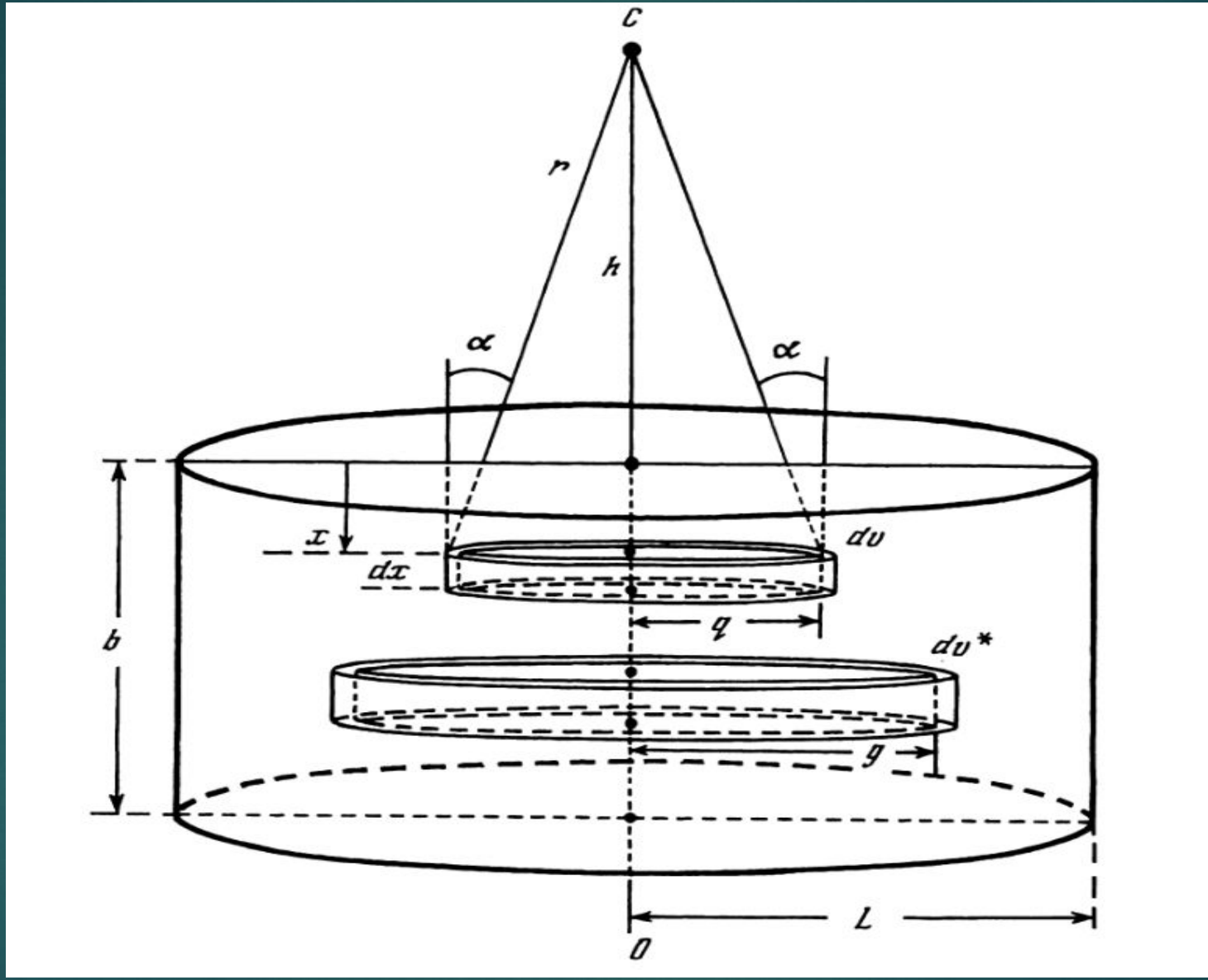
$$H_{нс} \equiv \sum_{l=1}^{N} \phi_l^2 \sigma_{Д,l}^2; \quad H_c \equiv \sum_{k \neq p}^{N} \sum^{N} R_{kp} \phi_k \phi_p \sigma_{Д,k} \sigma_{Д,p}.$$

Интегральная формула дисперсии ЭЭГ для плоского участка коры

Схема послойного расположения различных нейронов в новой коре большого мозга

1–4 – пирамидная, звездчатая, веретенообразная и горизонтальная клетки соответственно




C
r
h
α
α
x
dx
dv
q
dv*
b
g
L
0

$$dH_{HC} = \phi^2 \sigma_Д n dv ,$$

где ndv – общее количество ЭЭГ-генерирующих нейронов в элементарном объеме (стенке кольца), $\sigma_Д$ – среднее (или одинаковое для всех клеток) значение стандартного отклонения дипольного момента клеток; ϕ – одинаковая для всех клеток элементарного объема координатная функция.

$$dv = 2\pi q dx dq.$$

$$\phi = \rho \cos \alpha / 4\pi r^2$$

$$r^2 = (h+x)^2 + q^2; \quad \cos\alpha = (h+x) / \sqrt{(h+x)^2 + q^2} .$$

$$dH_{HC} = \frac{n\rho^2\sigma_Д^2}{8\pi}(h+x)^2\,dx\,\frac{q}{[(h+x)^2+q^2]^3}\,dq.$$

$$H_{HC} = \frac{n\rho^2\sigma_Д^2}{8\pi}\int_0^b (h+x)^2\,dx\int_0^L \frac{q}{[(h+x)^2+q^2]^3}\,dq,$$

где b – толщина коры; L – радиус основания.

$$H_{HC} = \frac{n\rho^2\sigma_Д^2}{32\pi}\left[\frac{b}{h(h+b)} + \frac{h}{2(h^2+L^2)} + \frac{1}{2L}\operatorname{arctg}\frac{h}{L} - \right.$$

$$\left. - \frac{h+b}{2[(h+b)^2+L^2]} - \frac{1}{2L}\operatorname{arctg}\frac{h+b}{L}\right].$$

$$dH_c = Rn^2\sigma_Д^2\phi dv \cdot \phi^* dv^*.$$

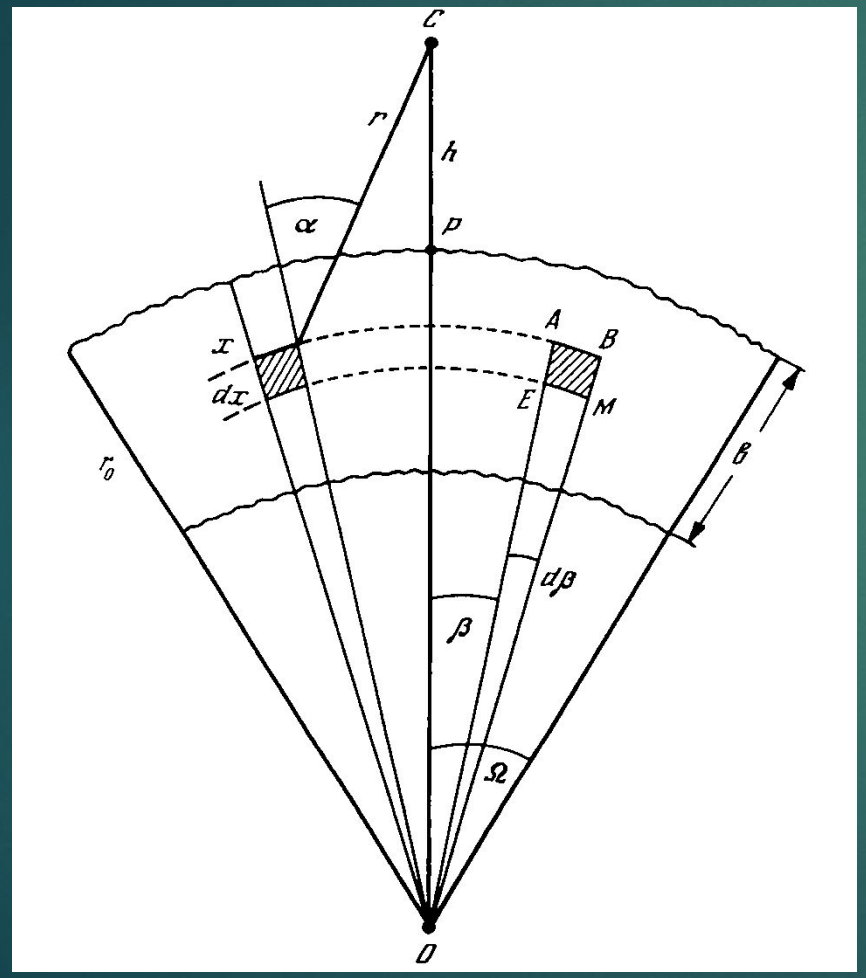
$$H_c = Rn^2\sigma_Д^2 \int_V \phi dv \int_V \phi^* dv^*;$$

$$H_c = Rn^2\sigma_Д^2 [\int_V \phi dv]^2.$$

$$H_c = \frac{Rn^2\rho^2\sigma_Д^2}{4}\left(\int_0^b (h+x)dx \int_0^L \frac{q}{[(h+x)^2+q^2]^{3/2}} dq\right)^2.$$

$$H_c = 0,25Rn^2\rho^2\sigma_Д^2[b - \sqrt{(h+b)^2+L^2} - \sqrt{h^2+L^2}]^2.$$

Интегральная формула дисперсии ЭЭГ для сферического участка коры



Показано сечение участка коры плоскостью, проходящей через его вершину P и ось OC. C – точка отведения ЭЭГ, r_0 – радиус внешней поверхности участка коры. Элементарный объем, в котором все клетки имеют одинаковые координаты функции, есть тело вращения фигуры $ABME$

$$2\pi(r_0 - x)^2 \sin\beta \, d\beta$$

$$dv = 2\pi (r_0 - x)^2 \sin\beta \, d\beta \, dx.$$

$$\phi = \frac{\rho[(r_0 + h)\cos\beta - (r_0 - x)]}{4\pi[(r_0 + h)^2 + (r_0 - x)^2 - 2(r_0 + x)(r_0 - x)\cos\beta]^{3/2}}.$$

$$H_c = 0,25 R n^2 \rho^2 \sigma_Д^2 \left[\int_0^b (r_0 - x)^2 dx \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\Omega \frac{[(r_0 + h)\cos\beta - (r_0 - x)]\sin\beta}{[(r_0 + h)^2 + (r_0 - x)^2 - 2(r_0 + h)(r_0 - x)\cos\beta]^{3/2}} d\beta \right]^2,$$

Случай 1: ЭЭГ создается обширным участком

$$H_c = \frac{Rn^2\rho^2\sigma_Д^2}{8\sqrt{2}}\left[\int_0^b dx \int_0^\Omega \frac{(-\sin\beta)}{(1-\cos\beta)^{1/2}} d\beta\right]^2.$$

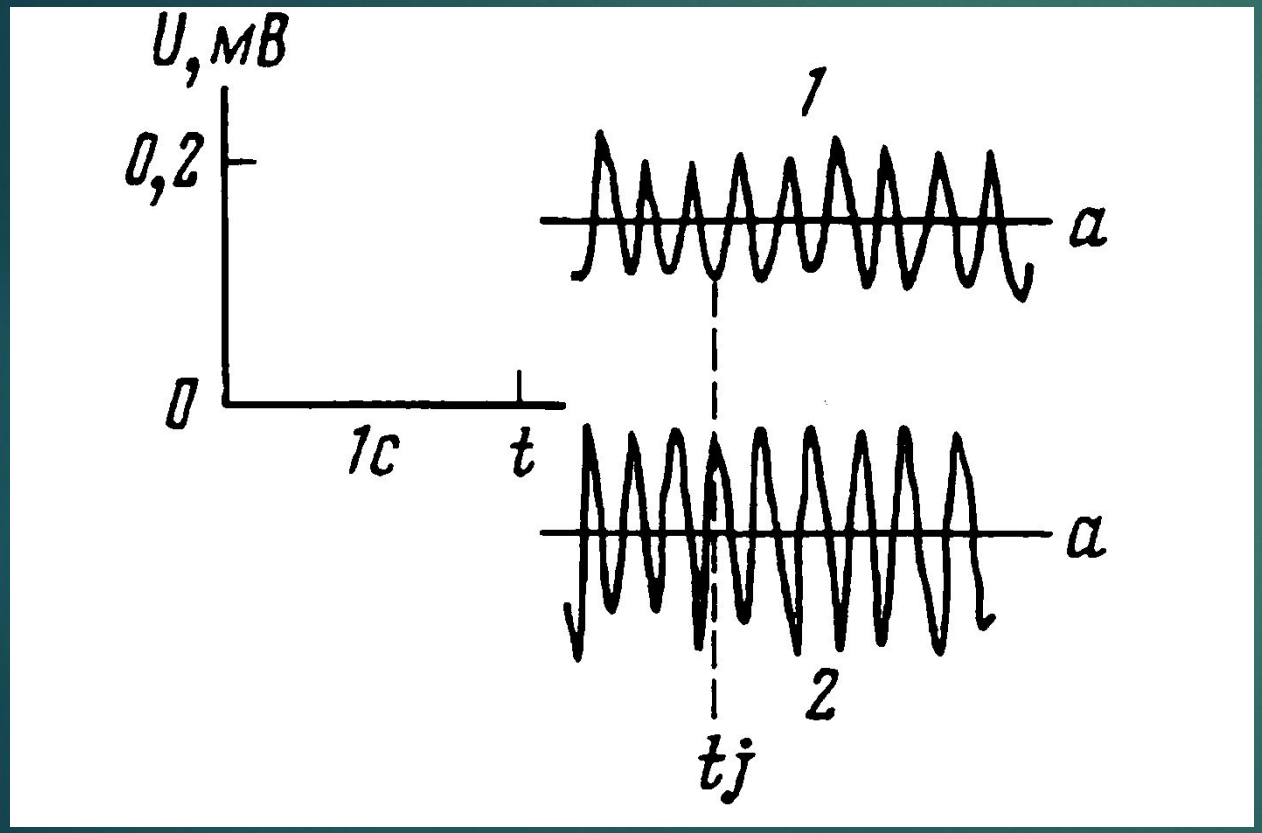
$$H_c = \frac{Rn^2\rho^2\sigma_Д^2 b^2(1-\cos\Omega)}{8}.$$

Случай 2: ЭЭГ определяется активностью малого участка

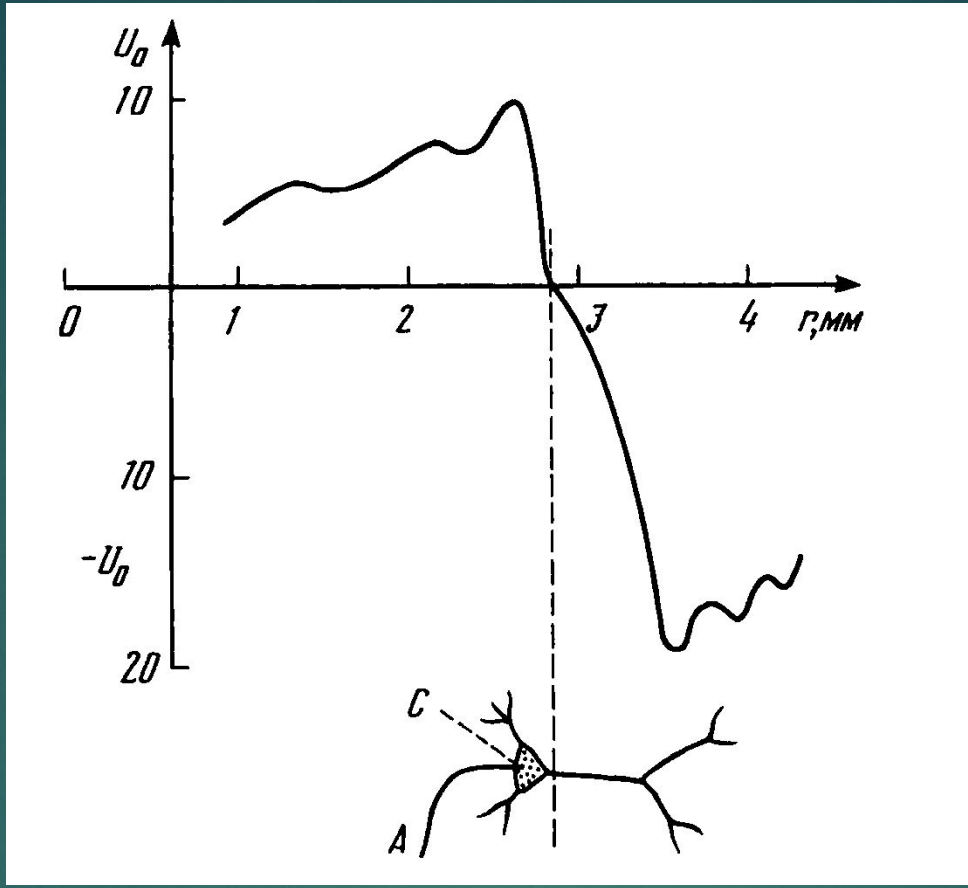
$$H_c = \frac{Rn^2\rho^2\sigma_Д^2}{4}\left[\int_0^b \frac{(r_0 - x)^2}{(h+x)^2}\, dx \int_0^\Omega \sin\beta\, d\beta\right]^2.$$

$$H_c = \frac{Rn^2\rho^2\sigma_Д^2 b^2}{4} \cdot \frac{r_0^4(1-\cos\Omega)^2}{h^2(h+b)^2}.$$

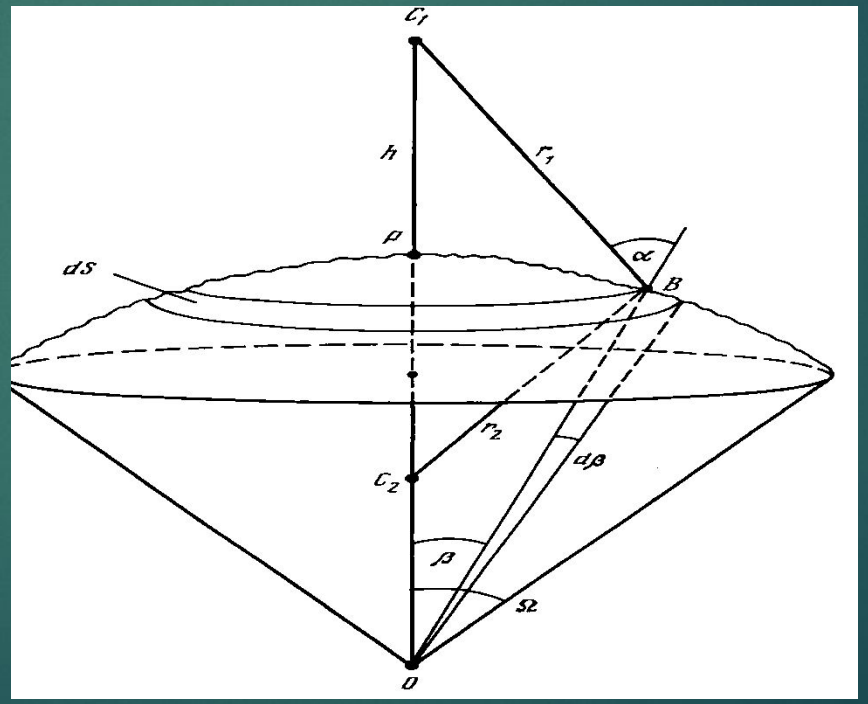
Особенности формирования электрического поля гиппокампа



1, 2 – точка отведения расположена выше слоя тел нейронов примерно на 0,12 мм и ниже этого слоя на 0,5 мм. Горизонтальные линии *a* отмечают средние значения *U*



r, мм – расстояние, отсчитываемое от поверхности головного мозга; U_0 – амплитуда электрограммы, относительная величина. C и A – сома и аксон нейрона. Вертикальная штриховая прямая – отметка позиции нейрона

Две характерные черты электрограммы гиппокампа

- 1. Амплитуды двух электрограмм, зарегистрированных с противоположных сторон слоя клеток, находятся в потивофазе.
- 2. На некотором удалении от тел пирамидных нейронов величина амплитуды с дорсальной стороны заметно ниже, чем с вентральной.