

Основы матричной алгебры

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Операция сложения матриц определяется для двух матриц одинакового размера. Если A , B – это матрицы, то элементы матрицы $(A+B)$ получаются в результате алгебраического сложения соответствующих элементов матрицы A и матрицы B .

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$$

Пример

Матрица A Матрица B Матрица A+B

2	3	4	5	6	8
6	7	8	9	14	16

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Операция умножения матриц имеет смысл в том случае, когда количество столбцов первого сомножителя равно количеству строк второго сомножителя.

Если A , B – это матрицы, то элементы матрицы (AB) получаются в результате алгебраического сложения произведений элементов соответствующей строки матрицы A и соответствующего столбца матрицы B .

Если матрица A имеет n столбцов, матрица B n строк, то элемент матрицы (AB) с троке i и в столбце j вычисляется по следующей формуле:

$$(AB)_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + A_{i,3}B_{3,j} + \dots + A_{i,n}B_{n,j}$$

Обратим внимание на тот факт, что в общем случае умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. результат умножения зависит от порядка сомножителей ($AB \neq BA$)!

Пример.

Матрица A Матрица B Матрица AB

2	3	4	5	$2*4 + 3*8 = 32$	$2*5 + 3*9 = 37$
6	7	8	9	$6*4 + 7*8 = 80$	$6*5 + 7*9 = 93$

На основе операции умножения можно определить понятие целой положительной степени матрицы. Степень матрицы – это матрица, полученная путём многократного умножения на саму себя:

$$A^n = A A A A \dots A \text{ (n раз)}$$

Частный случай умножения: одна из матриц-сомножителей имеет один столбец или одну строку. Если считать матрицу строку или матрицу-столбец формой представления вектора, то мы получаем правило умножения матрицы на вектор.

Пример.

Матрица A	Матрица B	Матрица AB
1 2 3	1	$1*1 + 2*2 + 3*3 = 14$
4 5 6	2	$4*1 + 5*2 + 6*3 = 32$
7 8 9	3	$7*1 + 8*2 + 9*3 = 50$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА СКАЛЯР

Если A – это матрица, h – это скалярная величина (число), то результатом умножения A на h считается такая матрица (hA) , элементы которой получаются в результате умножения каждого элемента матрицы A на число h (это же определение даёт правило деления матрицы на число).

$$(hA)_{i,j} = h \cdot A_{i,j}$$

Пример.

Матрица A	Скаляр $h=2$	Матрица hA
2 3	4 6	
6 7	12 14	



ОПЕРАЦИЯ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ

Операция транспортирования матрицы – это замена всех строк матрицы на столбцы, а всех столбцов – на строки.

При этом первая строка становится первым столбцом и наоборот – первый столбец – первой строкой. То же самое происходит с другими строками и столбцами.



При транспортировании квадратной матрицы меняются местами все элементы, которые симметричны относительно главной диагонали.

Кроме обычного транспортирования можно рассматривать транспортирование «по побочной диагонали». При этом первая строка матрицы меняется с последним столбцом так, что первый элемент в строке становится последним элементом в столбце.

Пример.

Исходная матрица A

Алгебраические свойства матриц

КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА – это матрица, у которой количество строк и столбцов равно.

ДИАГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА – это матрица, у которой равны нулю все элементы, кроме элементов на главной диагонали.

Пример.

	32	0	0
0	93	0	
0	0	98	

ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА – это диагональная матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны 1. Обычно единичную матрицу обозначают буквой **E**.

Пример.

E =	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1

КОММУТАТИВНЫЕ МАТРИЦЫ.

Две матрицы называются коммутативными (перестановочными), если произведение матриц не зависит от порядка сомножителей.

СИММЕТРИЧНЫЕ МАТРИЦЫ.

Симметричность матрицы означает, что операция транспонирования матрицы не изменяет вид матрицы – матрица симметрична относительно своей главной диагонали.

Очевидно, что любая диагональная или единичная матрица симметрична.

Пример.

Матрица A			Матрица A*		
1	2	3	1	2	3
2	1	4	2	1	4
3	4	1	3	4	1

ЗАДАЧИ.

Задача 1. Дана квадратная матрица действительных чисел A .
Получить новую матрицу с помощью операций матричной алгебры
(вычислить значение матричного выражения).

E – это единичная матрица,

I – матрица со всеми единичными элементами,

2 – скаляр. Все матрицы имеют одинаковые размеры.

$$2(A^2 + E + I)$$

...

{Получим квадрат матрицы – произведение матриц (AA)}

For i:=1 To n Do

For j:=1 To n Do

Begin a2[i,j]:=0;

For k:=1 To n Do

a2[i,j]:=a2[i,j] + a[i,k] * a[k,j] End;

{Прибавим единичную матрицу и матрицу с единицами}

{Результат умножим на 2}

For i:=1 To n Do

For j:=1 To n Do

If i=j Then a2[i,j]:=(a2[i,j] + 2) *2 else a2[i,j]:=(a2[i,j] + 1) *2;

WriteLn ('Результат вычислений:');

For i:=1 To n Do

Begin

writeLn;

For j:=1 To n Do

Write(a2[i,j]:10:4,' `')

End;

...