Основы матричной алгебры

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Операция сложения матриц определяется для двух матриц одинакового размера. Если А, В – это матрицы, то элементы матрицы (А+В) получаются в результате алгебраического сложения соответствующих элементов матрицы А и матрицы В.

$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$

<u>Пример</u>

Матрица А Матрица В Матрица А+В

2 3 4 5 6 8

6 7 8 9 14 16

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Операция умножения матриц имеет смысл в том случае, когда количество столбцов первого сомножителя равно количеству строк второго сомножителя.

Если А, В – это матрицы, то элементы матрицы (АВ) получаются в результате алгебраического сложения произведений элементов соответствующей строки матрицы А и соответствующего столбца матрицы В.

Если матрица А имеет **n** столбцов, матрица В **n** строк, то элемент матрицы (АВ) с троке i и в столбце j вычисляется по следующей формуле:

$$(AB)_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + A_{i,3}B_{3,j} + \ldots + A_{i,n}B_{n,j}$$

Обратим внимание на тот факт, что в общем случае умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. результат умножения зависит от порядка сомножителей (АВ ≠ ВА)!

Пример.

Матрица А Матрица В Матрица АВ

2 3   4 5   2*4 + 3*8 = 32   2*5 + 3*9 =37

6 7   8 9   6*4 + 7*8 = 80   6*5 + 7*9=93

На основе операции умножения можно определить понятие целой положительной степени матрицы. Степень матрицы – это матрица, полученная путём многократного умножения на саму себя:

A^n = A A A A …A (n раз)

Частный случай умножения: одна из матриц-сомножителей имеет один столбец или одну строку. Если считать матрицу строку или матрицу-столбец формой представления вектора, то мы получаем правило умножения матрицы на вектор.

Пример.

Матрица A	Матрица B	Матрица AB
1 2 3	1	1*1 + 2*2 + 3*3 = 14
4 5 6	2	4*1 + 5*2 + 6* 3 = 32
7 8 9	3	7*1 + 8*2 +9*3 =50

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА СКАЛЯР

Если A – это матрица, h – это скалярная величина (число), то результатом умножения A на h считается такая матрица (hA), элементы которой получаются в результате умножения каждого элемента матрицы A на число h (это же определение даёт правило деления матрицы на число).

$(hA_{i,j}) = h \cdot A_{i,j}$

Пример.

Матрица A	Скаляр h=2	Матрица hA
2 3		4 6
6 7		12 14

ОПЕРАЦИЯ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ

Операция транспортирования матрицы – это замена всех строк матрицы на столбцы, а всех столбцов - на строки.

При этом первая строка становится первым столбцом и наоборот _ первый столбец – первой строкой. То же самое происходит с другими строками и столбцами.

При транспортировании квадратной матрицы меняются местами все элементы, которые симметричны относительно главной диагонали.

Кроме обычного транспортирования можно рассматривать транспортирование «по побочной диагонали». При этом первая строка матрицы меняется с последним столбцом так, что первый элемент в строке становится последним элементом в столбце.

Пример.
Исходная матрица А

Алгебраические свойства матриц

КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА – это матрица, у которой количество строк и столбцов равно.

ДИАГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА – это матрица, у которой равны нулю все элементы, кроме элементов на главной диагонали.

Пример.

$$\begin{matrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 93 & 0 \\ 0 & 0 & 98 \end{matrix}$$

ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА – это диагональная матрица, у которой все элементы на главной диагонали равны 1. Обычно единичную матрицу обозначают буквой ***Е***.

Пример.

$$E= \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

КОММУТАТИВНЫЕ МАТРИЦЫ.

Две матрицы называются коммутативными (перестановочными), если произведение матриц не зависит от порядка сомножителей.

СИММЕТРИЧНЫЕ МАТРИЦЫ.

Симметричность матрицы означает, что операция транспортирования матрицы не изменяет вид матрицы – матрица симметрична относительно своей главной диагонали.

Очевидно, что любая диагональная или единичная матрица симметрична.

Пример.

Матрица A			Матрица A*		
1	2	3	1	2	3
2	1	4	2	1	4
3	4	1	3	4	1

ЗАДАЧИ.

Задача 1. Дана квадратная матрица действительных чисел А. Получить новую матрицу с помощью операций матричной алгебры (вычислить значение матричного выражения).

E – это единичная матрица,

I – матрица со всеми единичными элементами,

2 – скаляр. Все матрицы имеют одинаковые размеры.

$$2(A^2 + E + I)$$

```
...
{Получим квадрат матрицы – произведение матриц (АА)}
For i:=1 To n Do
For j:=1 To n Do
Begin   a2[i,j]:=0;
        For k:=1 To n Do
        a2[i,j]:=a2[i,j] + a[i,k] * a[k,j] End;
{Прибавим единичную матрицу и матрицу с единицами}
{Результат умножим на 2}
For i:=1 To n Do
For j:=1 To n Do
If i=j Then a2[i,j]:=(a2[I,j] + 2) *2 else a2[i,j]:=(a2[I,j] + 1) *2;
WriteLn (‘Результат вычислений:’);
For i:=1 To n Do
Begin
     writeLn;
          For j:=1 To n Do
              Write(a2[I,j]:10:4,’ ‘)
End;
...
```