

**Элементы
нелинейного
функциональног
о анализа**

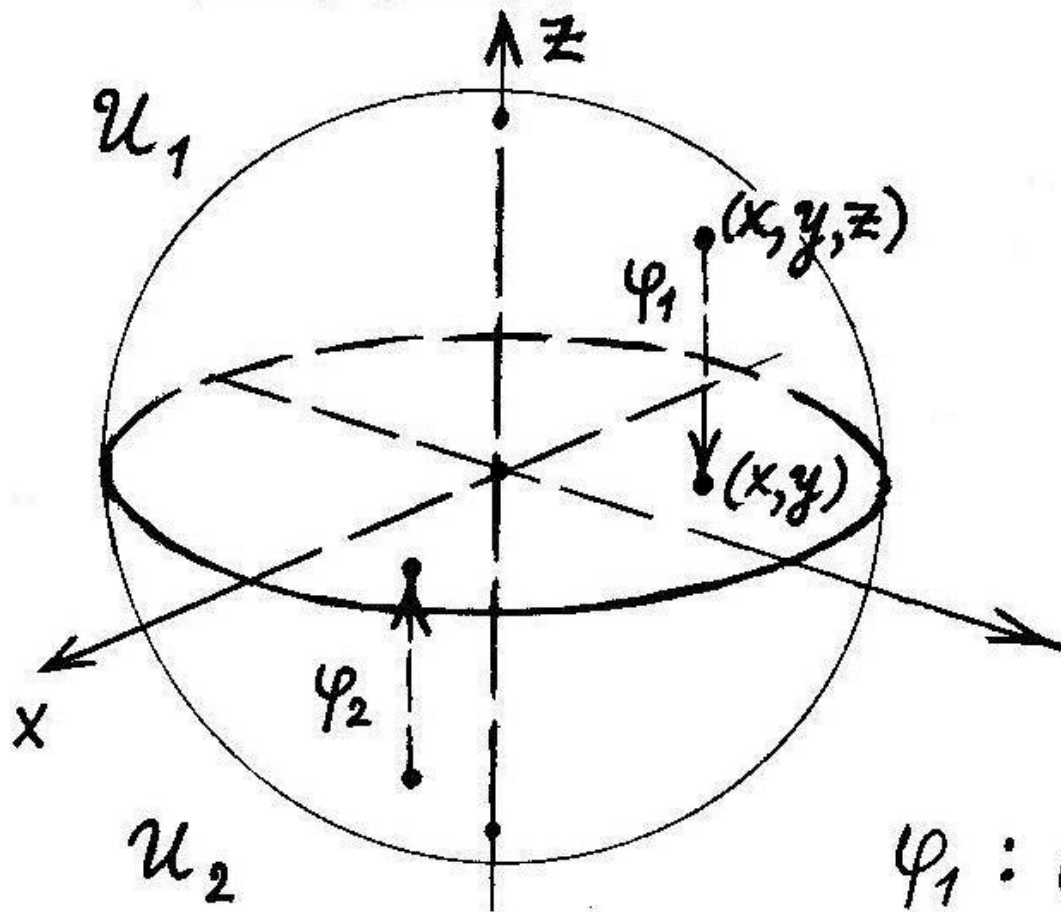
Глава 2.

Гладкие многообразия

§ 4. Атлас на сфере

1-й снос

$$S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$



$$U_1 : z > 0$$

$$U_2 : z < 0$$

$$\varphi_1 = \pi_1|_{U_1}$$

y (π_1 -проекция)

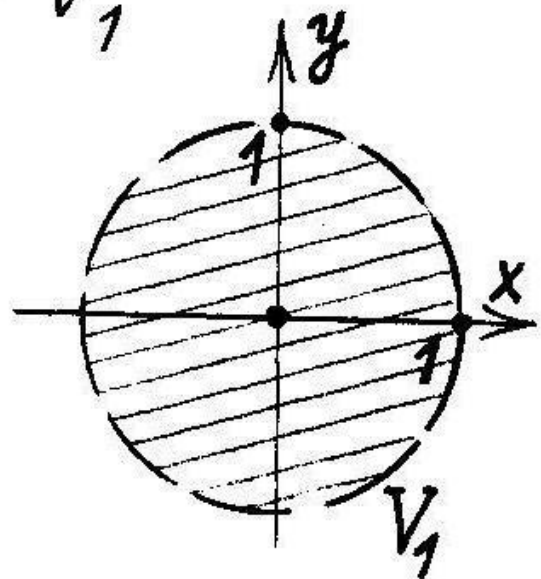
$$\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$$

$$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow V_1$$

$$\mathcal{U}_1 = \{ (x, y, z) \in S^2 \mid z > 0 \},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{ (x, y, z) \in S^2 \mid z < 0 \}.$$



$V_1 = V_2$ — круг радиуса $R=1$ в пр-ве \mathbb{R}^2 .

$$V_1 = V_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}.$$

$$\varphi_1^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathcal{U}_1.$$

$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

$$U_3 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\},$$

$$U_4 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid y < 0\}.$$

$$\varphi_3 : (x, y, z) \mapsto (x, z), \quad \varphi_3 : U_3 \rightarrow V_3;$$

$$\varphi_4 : (x, y, z) \mapsto (x, z), \quad \varphi_4 : U_4 \rightarrow V_4;$$

$$V_3 = V_4 = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 < 1\} \text{ — круг}$$

в пр-ве \mathbb{R}^2

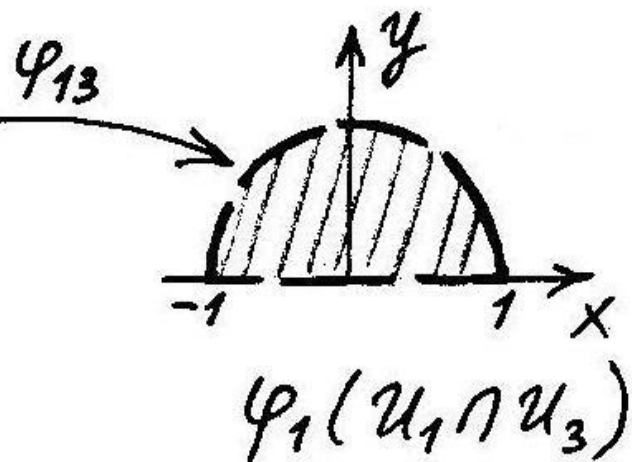
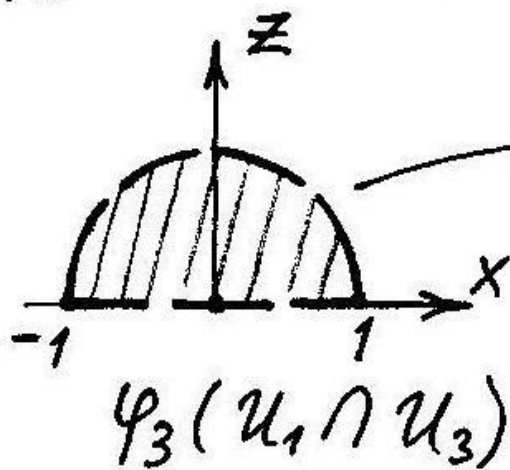
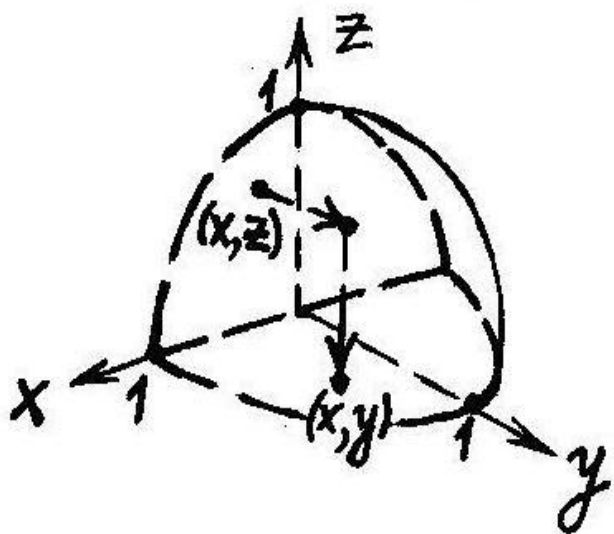
И ещё 2 карты: $U_5 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\},$

$$U_6 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x < 0\};$$

гомеоморфизмы φ_5 и φ_6 описать
самостоятельно!

Рассмотрим структуру перелома от
карты (U_1, φ_1) к карте (U_3, φ_3) :

$$\varphi_{13} = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3)$$



$$(x, z) \xrightarrow{\varphi_3^{-1}} (x, \underbrace{\sqrt{1-x^2-z^2}}_y, z) \xrightarrow{\varphi_1} (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$$

$\varphi_{13}(x, z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$ — гладкое
от-е (кл. C^∞) — доказать!

Упр. Выписать от-е $\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ и
доказать его гладкость (кл. C^∞).

Итак, от-е перехода φ_{13} — C^∞ -диффе-
оморфизм \Rightarrow 1-я и 3-я карты C^∞ -соглас.

Аналогично провер-ся C^∞ -согласность
оставшихся пар карт.

След-но, атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^6$ — C^∞ -атлас.

§ 5. Гладкие функции на многообразии

Пусть M — C^∞ -многообразие,
БПЕ — его модельное пр-во.

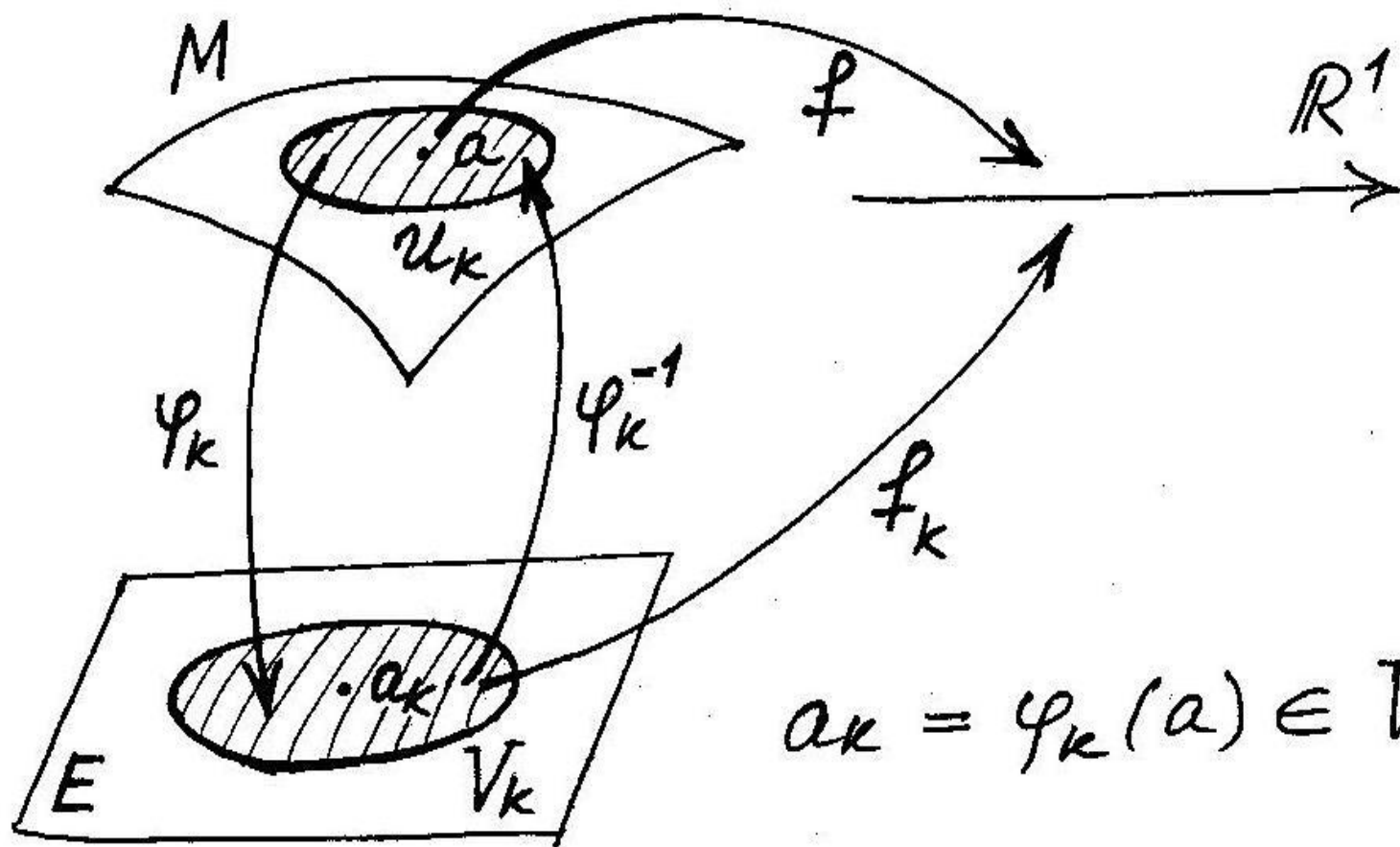
Рассм-м непрер. функцию
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ и некот. $t, a \in M$.

Пусть (U_k, φ_k) — карта из атласа
много-я M , такая, что $a \in U_k$.

Тогда $V_k = \varphi_k(U_k)$ — открытое
мн-во в E . Рассм-м функцию

$$f_k = f \circ \varphi_k^{-1} : V_k \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

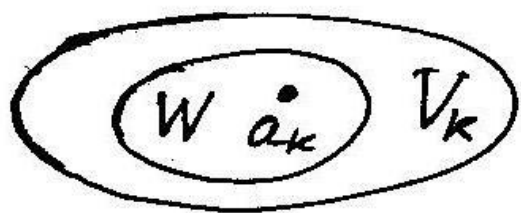
$$f_k = f \circ \varphi_k^{-1} : V_k \rightarrow \mathbb{R}^1.$$



$$a_k = \varphi_k(a) \in V_k \subset E$$

Функция f_k наз-ся представлением функции f в карте (U_k, φ_k) .

Опр. 1. Если ср-уше f_k является
 гладкой ил. C^r ($r \geq 1$) в некоем опре-
 ености $W \subset V_k$ тогда $a_k = \varphi_k(a)$, то
 ср-е f наз-ся гладкой ил. C^r
в определности т. а (или C^r -функцией
в определности т. а).



W - определность т. a_k
 (W - открытое мн-во в E ,
 $a_k \in W$).

Упр. Покажите, что это понятие
 (гладности в определности т. а) не
зависит от выбора карты.

Упр. Покажите, что это покрытие
(задается в определенности т.а) не
зависит от выбора карты.

Замечание. Для этого лучше расси-
ть гр. карту (U_j, φ_j) , такую, что
 $a \in U_j$. Тогда $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ и
представление $f_j = f \circ \varphi_j^{-1}$ ср-ции f
в карте (U_j, φ_j) будет таким C^2 -функ-
цией в некот. определенности т. $a_j = \varphi_j(a)$.

След-но, определение 1 корректно.

Опр. 2. Функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется C^2 -функцией на M , если она является C^2 -функцией в окрестности каждой $T. a \in M$.

Пусть f — C^1 -функция на M .

Опр. 3. Т. $a \in M$ наз-ся критической

точкой ф-ции f , если \exists карта

(U_k, φ_k) , такая, что $a \in U_k$ и

т. $a_k = \varphi_k(a) \in V_k = \varphi_k(U_k)$

явл-ся критической точкой ф-ции

$$f_k = f \circ \varphi_k^{-1}, \text{ т.е. } \underbrace{f'_k(a_k)} = \theta.$$

кр-я Фреше ф-ции f_k
в т. a_k

явл-ая критической точкой ф-ции

$$f_k = f \circ \varphi_k^{-1}, \text{ т.е. } \underbrace{f'_k(a_k)} = \theta.$$

кр-я Фреше ф-ции f_k
в т. ак

Упр. Докажите, что понятие критичес-ой

точки такое не зависит от выбора

карты (т.е. если $f'_k(a_k) = \theta$, то

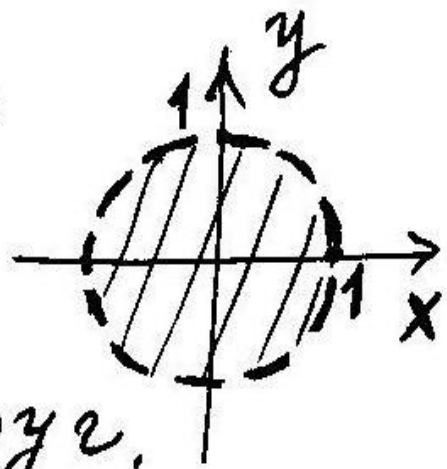
$f'_j(a_j) = \theta$ для любой карты (U_j, φ_j) ,

такой, что $a \in U_j$).

Пример. $f(x, y, z) = x + y + z$ на S^2 .

Карта $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$; $\mathcal{U}_1: z > 0$,

$\varphi_1(x, y, z) = (x, y) \in V_1 \subset \mathbb{R}^2$,



$V_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ — круг.

Представление f в карте $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$:

$$f_1(x, y) = (f \circ \varphi_1^{-1})(x, y) = x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$f_1: V_1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — кл. C^∞ (гладко!).

Найдем крит. точки f в этой карте.

Найдем крит. точку f в этой карте.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 1 - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем:

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Локальные экстр. точки (т.к. $z > 0$).

Итак, ф-я f в карте (u, φ) имеет единств-ю крит. точку $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»