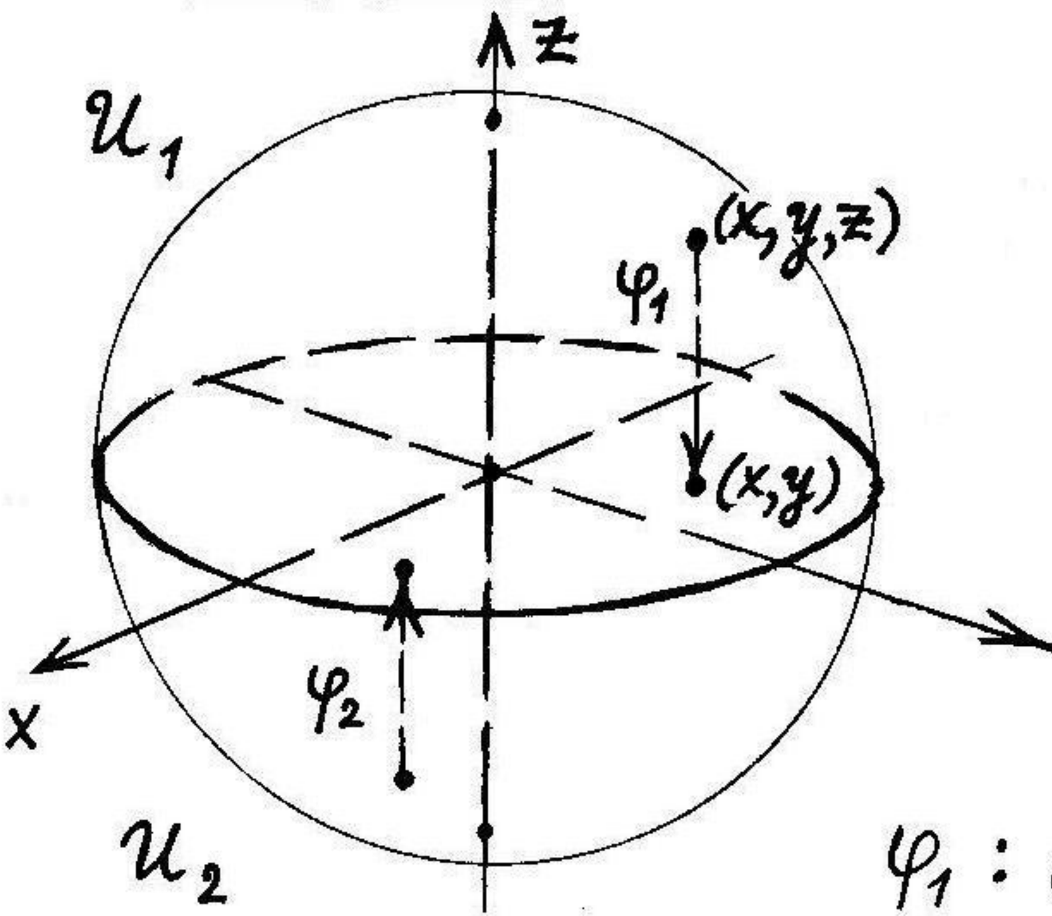
Элементы нелинейного функциональног о анализа

Глава 2.
Гладкие многообразия

§ 4. Атлас на сфере

1-й способ.

$$S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$



$\mathcal{U}_1 : z > 0$

$\mathcal{U}_2 : z < 0$

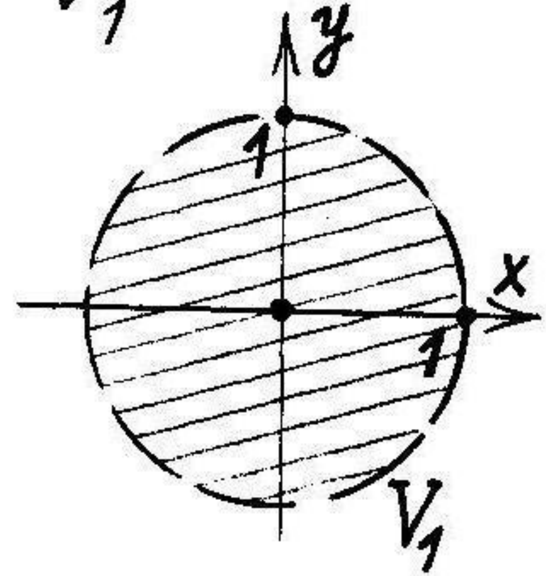
$$\varphi_1 = \pi_1\big|_{\mathcal{U}_1}$$

(π_1 – проекция)

$$\varphi_1 : (x, y, z) \longmapsto (x, y)$$

$$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$$

$$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$$



$$\mathcal{U}_1 = \{ (x,y,z) \in S^2 \mid z > 0 \},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{ (x,y,z) \in S^2 \mid z < 0 \}.$$

$V_1 = V_2$ — круг радиуса $R=1$ в пр-ве $\mathbb{R}^2$.

$$V_1 = V_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1 \}.$$

$$\varphi_1^{-1}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2} \right), \ \varphi_1^{-1} : V_1 \longrightarrow \mathcal{U}_1.$$

$\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1$ — гомеоморфизм.

$\mathcal{U}_3 = \{(x,y,z) \in S^2 \,/\, y > 0\}$,

$\mathcal{U}_4 = \{(x,y,z) \in S^2 \,/\, y < 0\}$.

$\varphi_3 : (x,y,z) \longmapsto (x,z)$, $\varphi_3 : \mathcal{U}_3 \longrightarrow V_3$;

$\varphi_4 : (x,y,z) \longmapsto (x,z)$, $\varphi_4 : \mathcal{U}_4 \longrightarrow V_4$;

$V_3 = V_4 = \{(x,z) \,/\, x^2 + z^2 < 1\}$ — круг в пр-ве $\mathbb{R}^2$

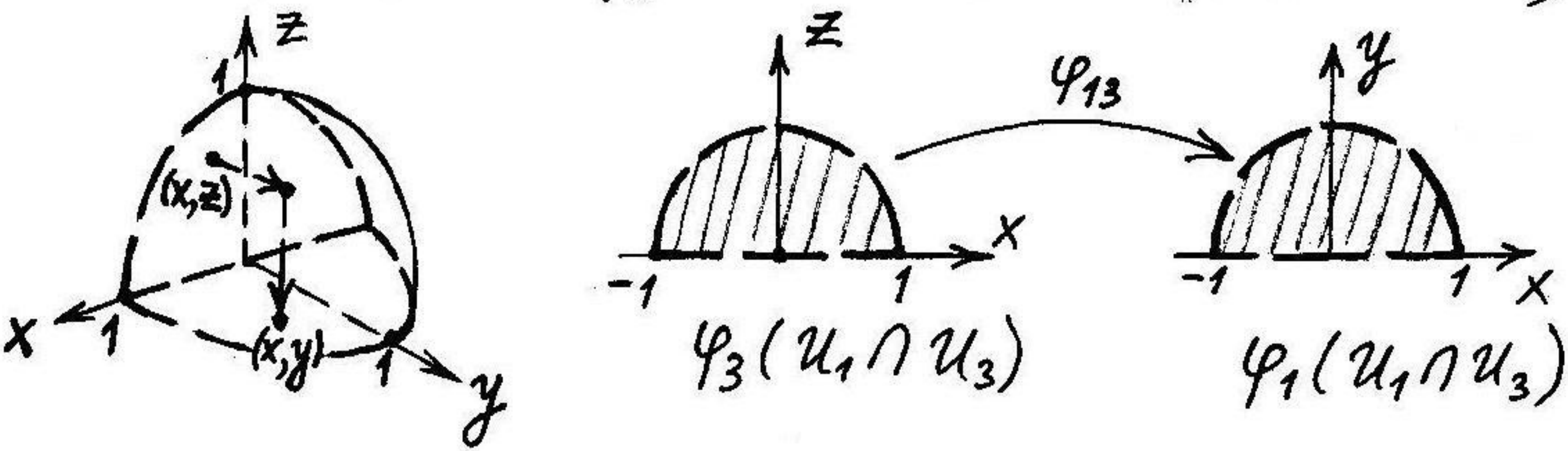
И ещё 2 карты: $\mathcal{U}_5 = \{(x,y,z) \in S^2 / x > 0\}$,

$\mathcal{U}_6 = \{(x,y,z) \in S^2 / x < 0\}$;

гомеоморфизмы φ_5 и φ_6 описать самостоят-но!

Рассмотрим функцию перехода от карты (U_1, φ_1) к карте (U_3, φ_3):

$$\varphi_{13} = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3)$$



$$(x, z) \xmapsto{\ \varphi_3^{-1}\ } (x, \underbrace{\sqrt{1-x^2-z^2}}_{y}, z) \xmapsto{\ \varphi_1\ } (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$$

$\varphi_{13}(x, z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2})$ — гладкое

от-е (кл. C^∞) — доказать!

<u>Упр.</u> Выписать от-е $\varphi_{31} = \varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ и

доказать его гладкость (кл. C^∞).

Итак, от-е перехода φ_{13} — C^∞-диффе-

оморфизм $\Rightarrow$ 1-я и 3-я карты C^∞-соглас.

Аналогично провер-ся C^∞-согласованность

остальных пар карт.

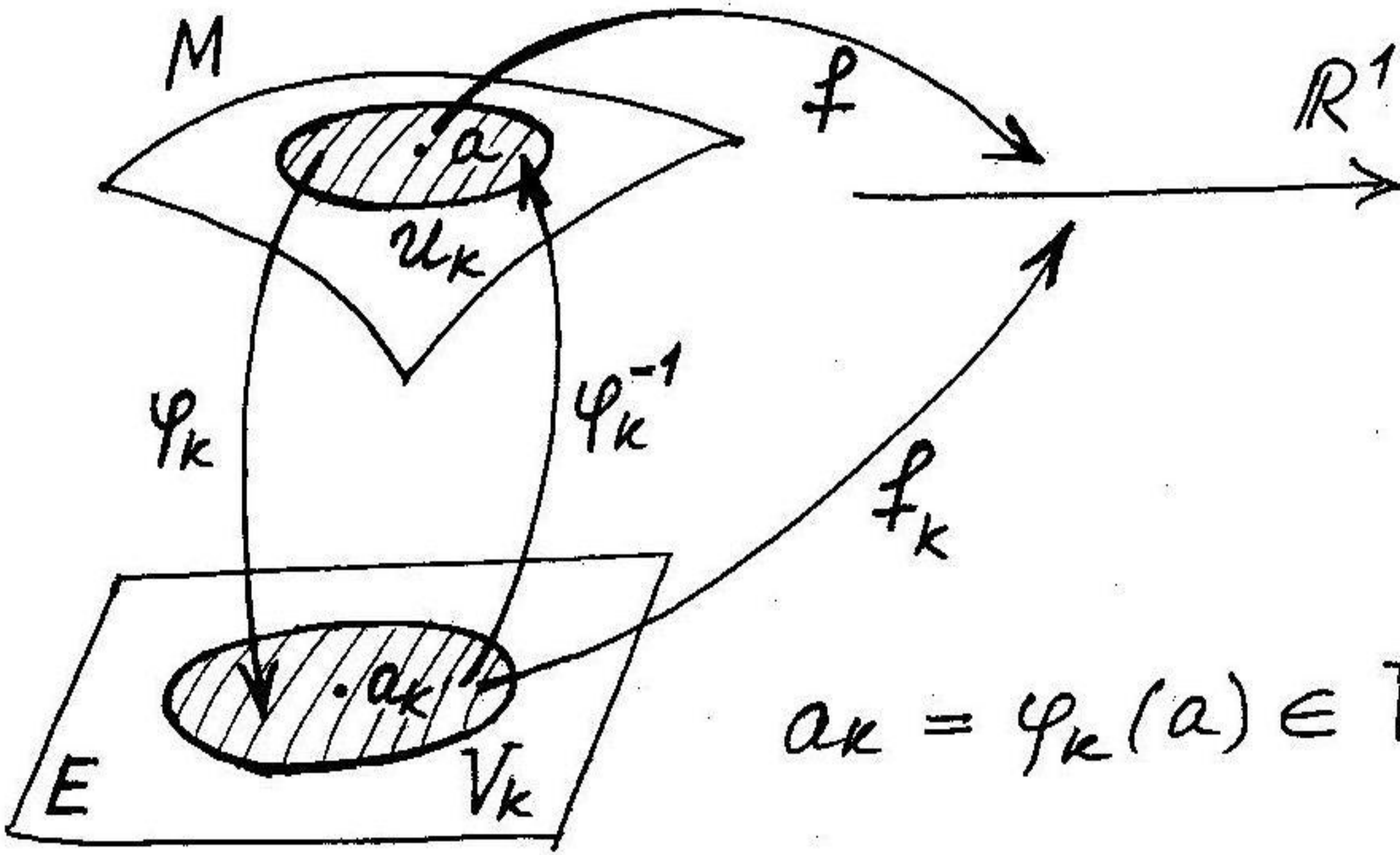
След-но, атлас $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{6}$ — C^∞-атлас.

§ 5. Гладкие функции на многообразии

Пусть M — C^{∞}-многообразие, БПЕ E — его модельное пр-во. Рассм-м непрер. функцию $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^1$ и непог. т. $a \in M$.

Пусть (U_k, φ_k) — карта из атласа многообразия M, такая, что $a \in U_k$. Тогда $V_k = \varphi_k(U_k)$ — открытое мн-во в E. Рассм-м функцию $f_k = f \circ \varphi_k^{-1} : V_k \longrightarrow \mathbb{R}^1$.

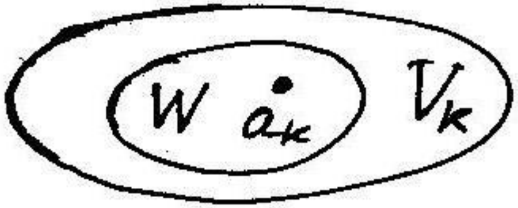
$$f_k = f \circ \varphi_k^{-1} : V_k \longrightarrow \mathbb{R}^1.$$



$$a_k = \varphi_k(a) \in V_k \subset E$$

Функция f_k наз-ся <u>представлением</u> ф-ции f в карте $(\mathcal{U}_k, \varphi_k)$.

Опр. 1. Если ф-ция f_k является гладкой кл. C^r $(r \geq 1)$ в некот. окрестности $W \subset V_k$ точки $a_k = \varphi_k(a)$, то ф-я f наз-ся гладкой кл. C^r в окрестности т. a (или C^r-функцией в окрестности т. a).



W – окрестность т. a_k (W – открытое мн-во в E, $a_k \in W$).

Упр. Покажите, что это понятие (гладкость в окрестности т. a) не зависит от выбора карты.

Упр. Покажите, что это понятие (гладкость в окрестности т. a) не зависит от выбора карты.

Замечание. Для этого нужно рассмотреть др. карту (U_j, φ_j), такую, что $a \in U_j$. Тогда $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ и представление $f_j = f \circ \varphi_j^{-1}$ ф-ции f в карте (U_j, φ_j) будет также C^2-функцией в некот. окрестности т. $a_j = \varphi_j(a)$.

След-но, определение 1 корректно.

Опр.2. Функция $f: M \to \mathbb{R}^1$ наз-ся C^r-функцией на M, если она явл-ся C^r-функцией в окрестности каждой т. $a \in M$.

Пусть f — C^r-функция на M.

<u>Опр. 3.</u> Т. $a \in M$ наз-ся <u>критической точкой</u> ф-ции f, если $\exists$ карта (U_k, φ_k), такая, что $a \in U_k$ и т. $a_k = \varphi_k(a) \in V_k = \varphi_k(U_k)$ явл-ся критической точкой ф-ции $f_k = f \circ \varphi_k^{-1}$, т.е. $\underbrace{f'_k(a_k)}_{\text{пр-я Фреше ф-ции } f_k \text{ в т. } a_k} = \theta$.

явл-ся критической точкой ф-ции

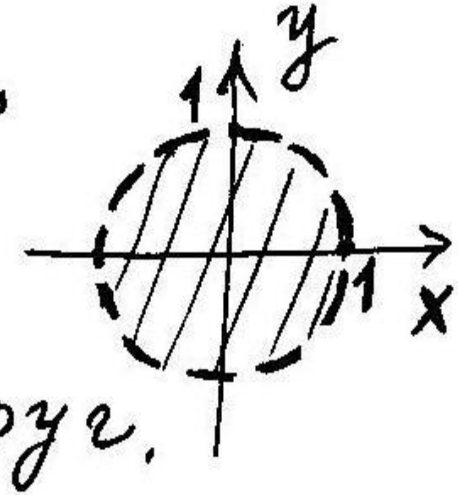
$$f_k = f\circ\varphi_k^{-1}, \text{ т.е. } \underbrace{f_k'(a_k)}_{\substack{\text{пр-е Фреше ф-ции } f_k \\ \text{в т. } a_k}} = \theta .$$

<u>Упр.</u> Докажите, что понятие критич-ой точки также не зависит от выбора карты (т.е. если $f_k'(a_k)=\theta$, то $f_j'(a_j)=\theta$ для любой карты (U_j, φ_j), такой, что $a\in U_j$).

Пример. $f(x,y,z) = x+y+z$ на S^2.

Карта (U_1, φ_1); $U_1 : z > 0$,

$\varphi_1(x,y,z) = (x,y) \in V_1 \subset \mathbb{R}^2$;



$V_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$ — круг.

Представление f в карте (U_1, φ_1):

$$f_1(x,y) = (f \circ \varphi_1^{-1})(x,y) = x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

$f_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ — кл. C^∞ (док-ть!)

Найдем крит. точки f в этой карте.

Найдем крит. точки f в этой карте.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1 - \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем:

$$\underbrace{x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{локальные к-ты крит. точки}} \Rightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(т.к. $z>0$).

Итак, ф-я f в карте (U_1, φ_1) имеет единств-ю крит. точку $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»