

Здравствуйте!

Лекция №2

Комплéксные числа

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

Алгебраическая форма комплексных чисел

Пусть x и y – обычные вещественные числа. Число вида

$$z = x + iy$$

называется комплексным числом в алгебраической форме.

x называют действительной частью числа z , и обозначают так: $x = \operatorname{Re}(z)$. y называют мнимой частью числа z и обозначают так: $y = \operatorname{Im}(z)$. Если $\operatorname{Im}(z) = 0$, то число z называют действительным числом; если $\operatorname{Re}(z) = 0$, то число z называют мнимым числом.

Число $\bar{z} = x - iy$ называется числом, комплексно сопряженным числу z . Действует следующее общее правило: чтобы получить число, комплексно сопряженное данному числу, надо в нем заменить i на $-i$.

Рассмотрим операции над комплексными числами в алгебраической форме. Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Равенство и сравнение комплексных чисел

Два комплексных числа считаются равными, если у них равны действительные части и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Но вот операции типа «больше» и «меньше» для комплексных чисел **не имеют смысла**, то есть бессмысленно писать $z_1 \geq z_2$ или $z_1 < z_2$. Совершенно непонятно, что больше: $2 + 3i$ или $3 + 2i$.

Комплексные числа не упорядочены.

Сложение и вычитание комплексных чисел

Сложение и вычитание двух комплексных чисел определяются совершенно естественно

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

то есть надо сложить (или вычесть) отдельно действительные и мнимые части.

Умножение комплексных чисел

Умножение двух комплексных чисел также чисел также определяется совершенно естественно. Надо лишь помнить, что $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Деление комплексных чисел

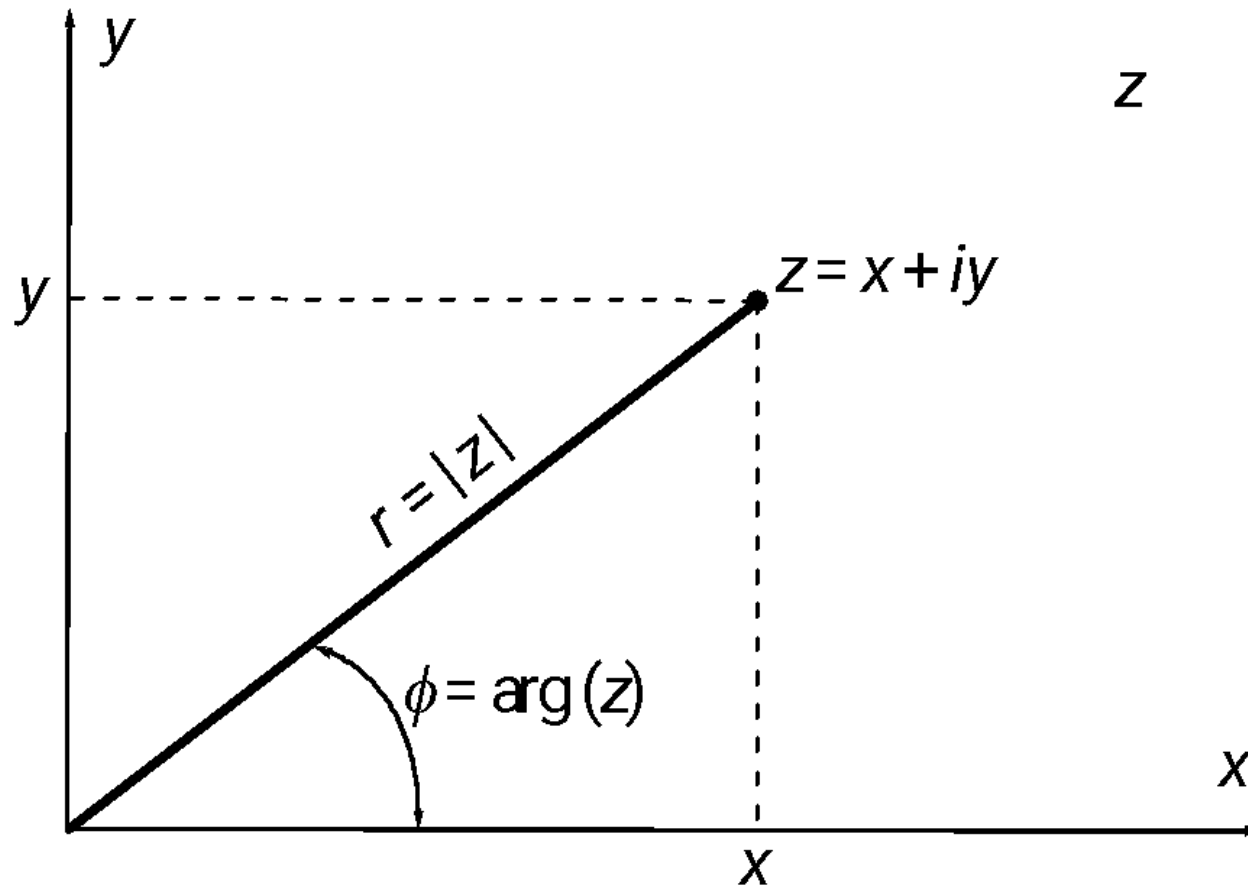
Для деления комплексных чисел полезно запомнить следующее правило: чтобы разделить два комплексных числа друг на друга надо числитель и знаменатель умножить на число, комплексно сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \end{aligned}$$

где учтено, что $i^2 = -1$. Заметим, что при делении двух комплексных чисел снова получается комплексное число.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Пусть имеется комплексное число $z = x + iy$.



Тригонометрическая форма комплексных чисел

С геометрической интерпретацией связана и еще одна форма записи комплексных чисел, называемая тригонометрической формой.

Соединим точку (x, y) с началом координат отрезком прямой. Длина этого отрезка r называется **модулем** комплексного числа z и обозначается как $|z|$ или $\text{mod}(z)$.

Угол φ , который этот отрезок образует с осью абсцисс, называется **аргументом** комплексного числа z и обозначается как $\arg(z)$. Он определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$.

Из рисунка видно, что имеет место соотношение $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Отсюда следует, что $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, $\text{tg } \varphi = y/x$. Таким образом, мы можем записать $z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$, или

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Эта форма записи и получила название комплексного числа в тригонометрической форме.

Рассмотрим операции над комплексными числами в тригонометрической форме. Пусть имеется два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Равенство чисел

Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ считаются равными, если $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Умножение комплексных чисел

Имеем

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом, при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы – складываются.

Деление комплексных чисел

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \cdot \frac{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].\end{aligned}$$

Таким образом, при делении комплексных **чисел их модули делятся, а аргументы – вычитаются.**

Возведение в степень

Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Тогда, согласно сказанному выше,
 $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z}_{n \text{ раз}} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$

то есть при возведении в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на нее.

Отметим частный случай этой формулы. При $r = 1$ получаем $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$

Эта формула называется формулой Муавра.

Извлечение корней

Полученный выше результат позволяет вывести алгоритм извлечения корней из комплексных чисел.

Пусть имеется комплексное число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Что понимать под $\sqrt[n]{z}$?

Для ответа на этот вопрос вспомним прежде всего, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до $2\pi k$ то есть

$$z = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k)), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Допустим, что $\sqrt[n]{z}$ есть также комплексное число $\sqrt[n]{z} = z_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$. Но тогда должно иметь место соотношение $z = z_0^n$, или

$$r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k)) = r_0^n (\cos n\varphi_0 + i \sin n\varphi_0).$$

Отсюда получаем, что $r = r_0^n$, $\varphi + 2k\pi = n\varphi_0$, или $r_0 = \sqrt[n]{r}$, $\varphi_0 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Таким образом

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right).$$

Заметим, что разные значения $\sqrt[n]{z}$ получаются лишь для $k = \overline{0, n-1}$, далее все повторяется. Таким образом, **корень n -й степени из комплексного числа имеет ровно n различных значений.**

Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа

Вспомним ряды Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots.$$

Далее заметим, что $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$ и далее все повторяется.

Найдем теперь e^{ix} . Имеем

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots + i \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots \right) = \\ &= \cos x + i \sin x . \end{aligned}$$

Мы получили знаменитую формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x .$$

Полезно помнить некоторые следствия из этой формулы. Заменяя в ней i на $-i$, получим

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Складывая и вычитая эти две формулы, получим

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Вспоминая гиперболические функции, можем записать:

$$\cos x = \operatorname{ch}(ix), \quad \sin x = \operatorname{sh}(ix)/i,$$

что говорит о родстве этих функций.

Вернемся к комплексным числам. Имеем

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi},$$

что и дает так называемую показательную форму комплексного числа. Так как аргумент φ определяется с точностью до слагаемого $2k\pi$, то, в общем случае,

$$z = r e^{i(\varphi + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Эта формула позволяет определить логарифм комплексного числа:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Заметим, что логарифм – бесконечнозначная функция.

В частности, $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, так как $|-1| = 1$ и $\arg(-1) = \pi$.