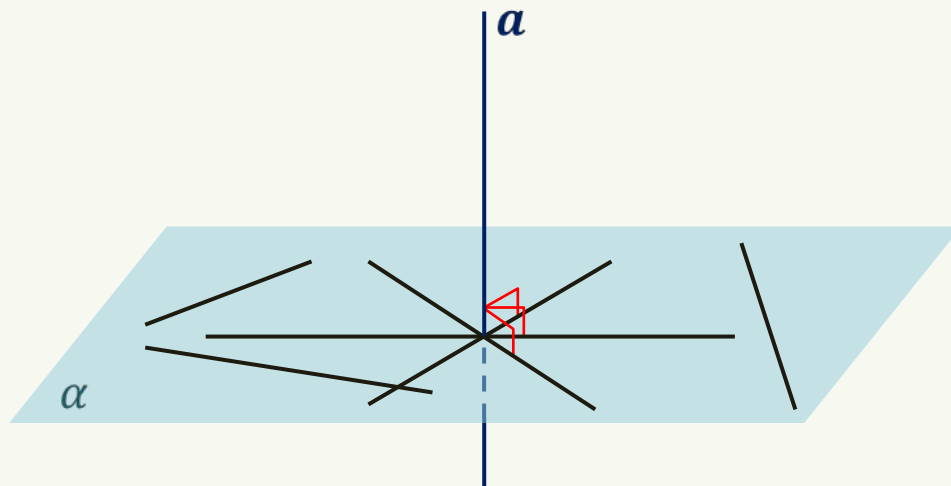
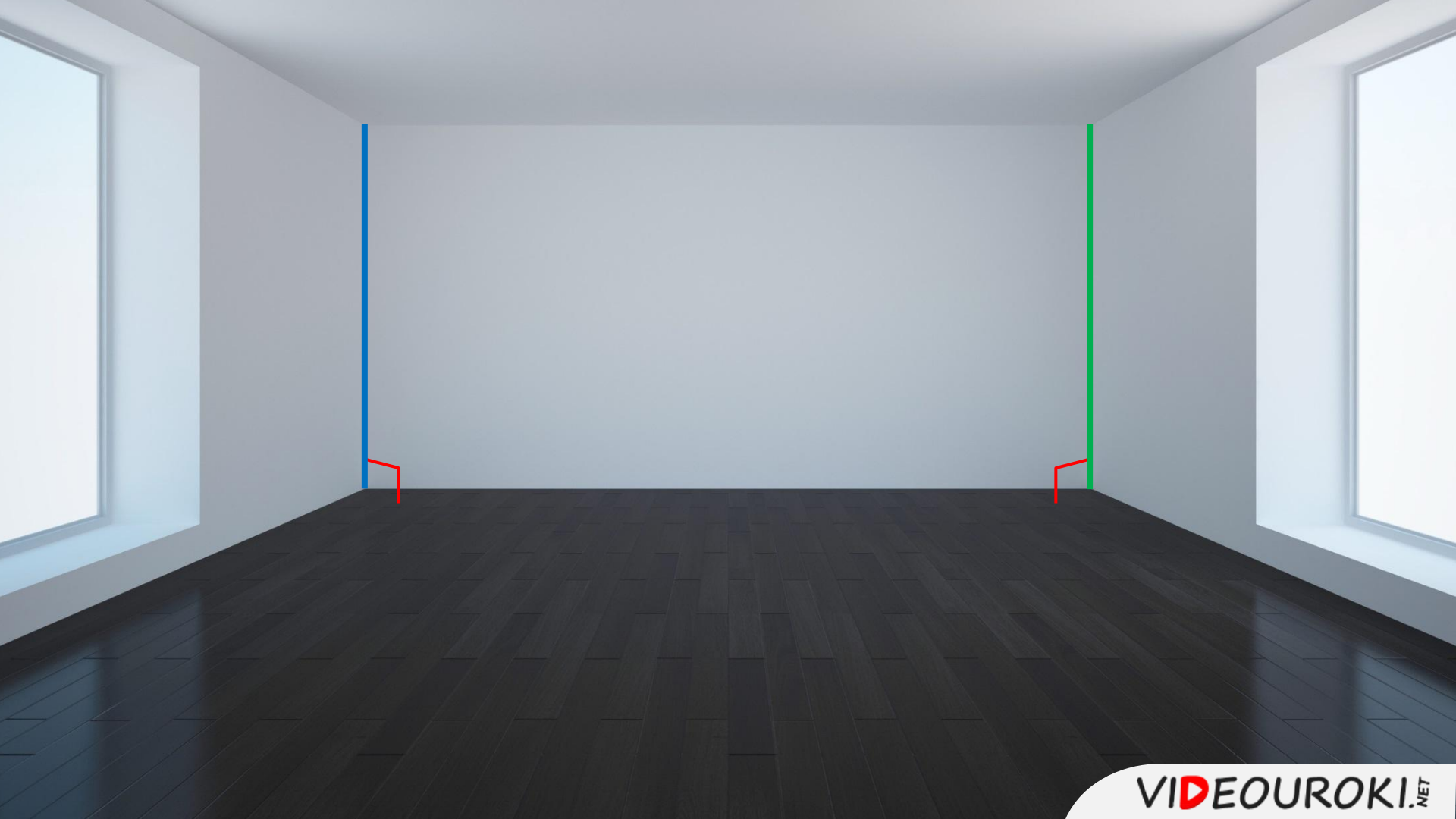


# Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.







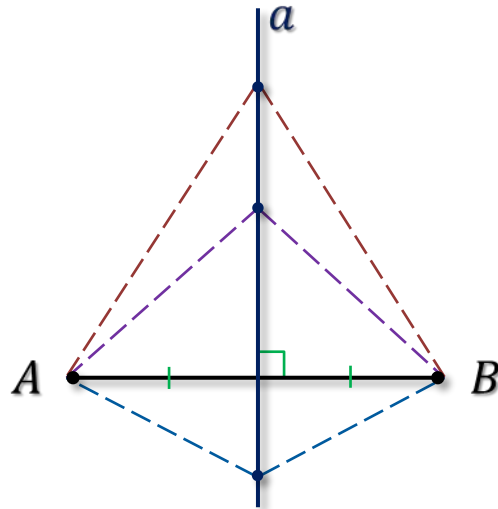


**Теорема.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Доказательство.**

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

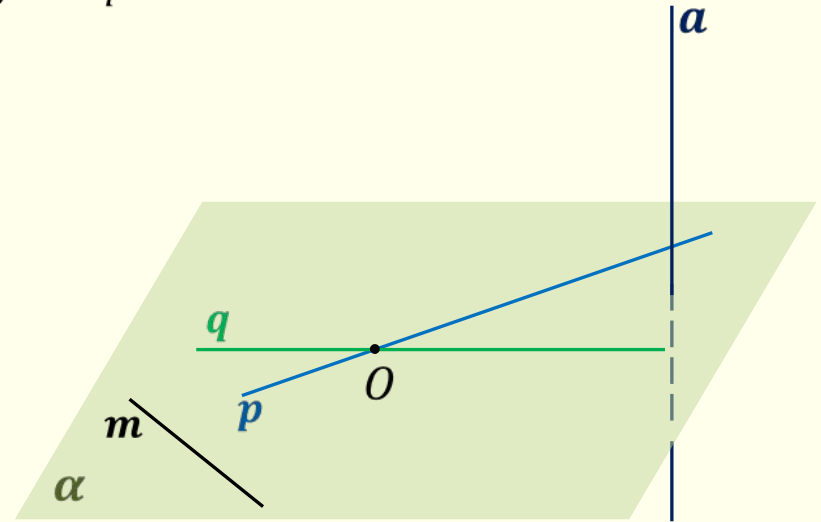
Серединный перпендикуляр к отрезку



**Теорема.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Доказательство.**

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

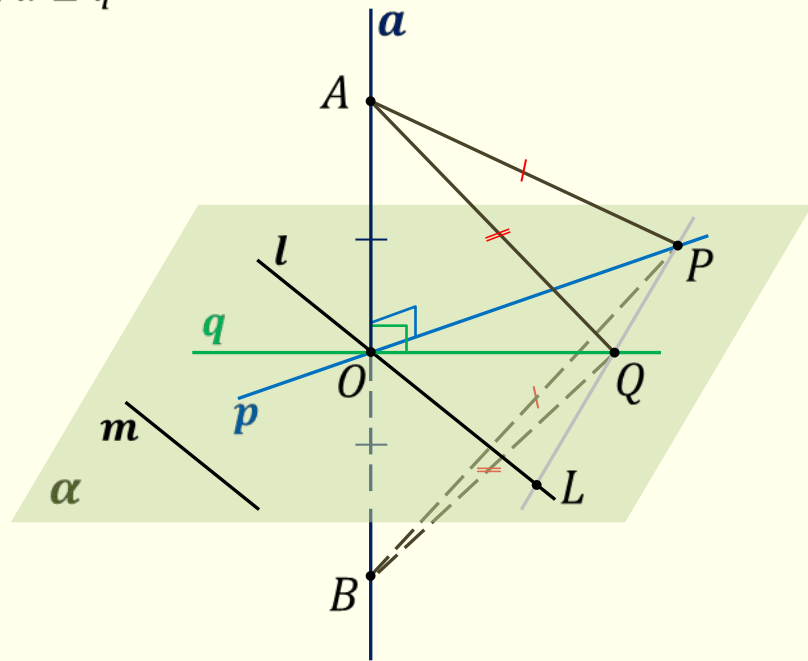


**Теорема.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Доказательство.**

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1.  $l \parallel m$
2.  $AO = OB$
3.  $p, q$  – серединные перпендикуляры к  $AB$
4.  $AP = BP, AQ = BQ$



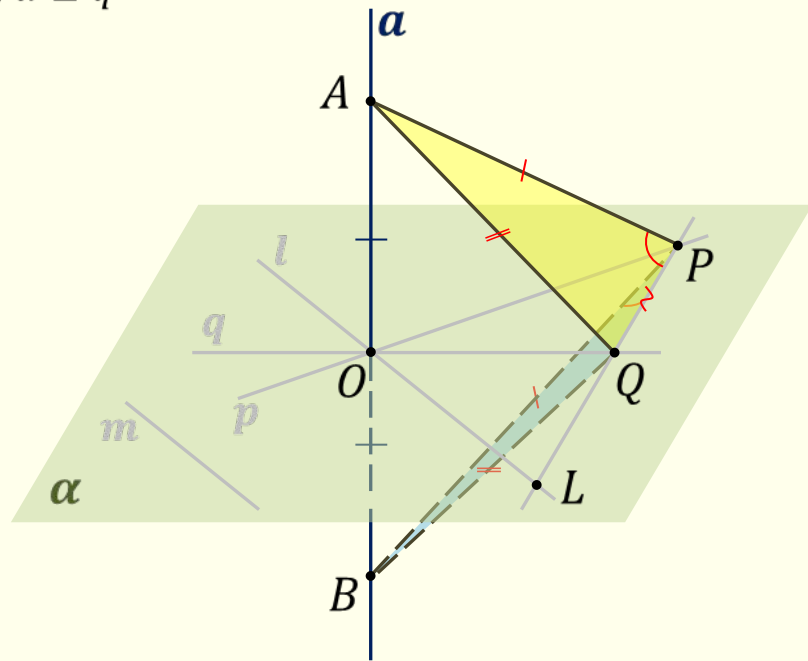


**Теорема.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Доказательство.**

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1.  $l \parallel m$
2.  $AO = OB$
3.  $p, q$  – серединные перпендикуляры к  $AB$
4.  $AP = BP, AQ = BQ$
5.  $\triangle APQ = \triangle BPQ$  (по 3-м сторонам)
6.  $\angle APQ = \angle BPQ$

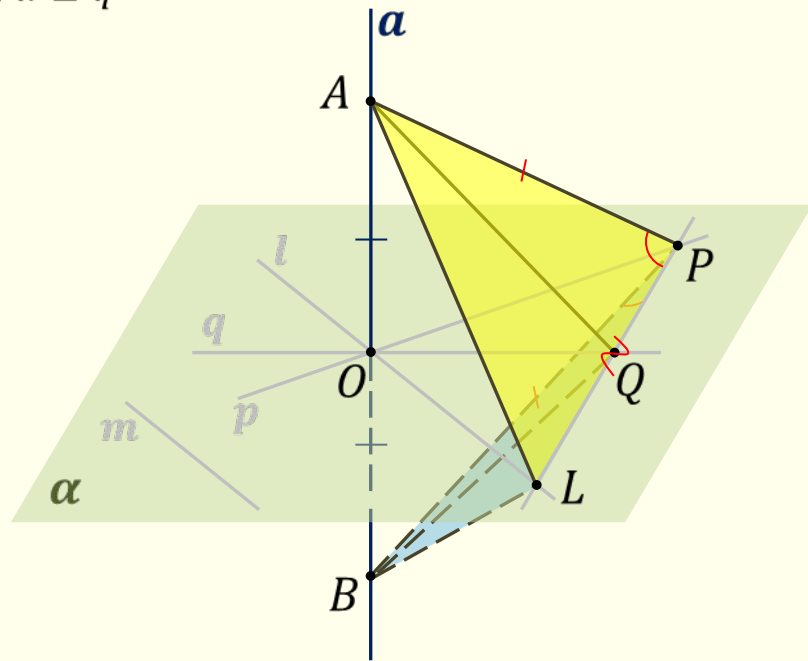


**Теорема.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Доказательство.**

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1.  $l \parallel m$
2.  $AO = OB$
3.  $p, q$  – серединные перпендикуляры к  $AB$
4.  $AP = BP, AQ = BQ$
5.  $\triangle APQ = \triangle BPQ$  (по 3-м сторонам)
6.  $\angle APQ = \angle BPQ$
7.  $\triangle APL = \triangle BPL$   
(по 2-м сторонам и углу между ними)
8.  $AL = BL$
9.  $l$  – серединный перпендикуляр к  $AB$

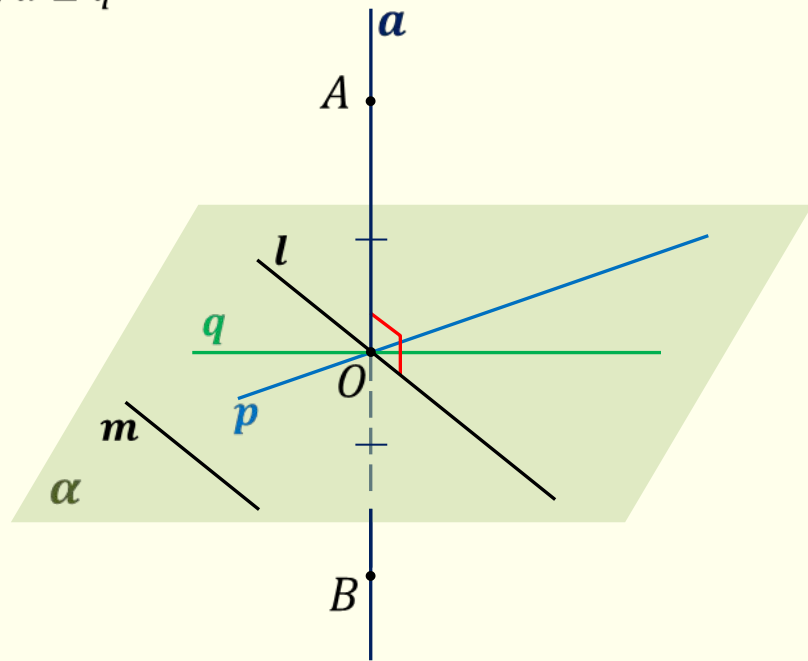


**Теорема.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Доказательство.**

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1.  $l \parallel m$
2.  $AO = OB$
3.  $p, q$  – серединные перпендикуляры к  $AB$
4.  $AP = BP, AQ = BQ$
5.  $\triangle APQ = \triangle BPQ$  (по 3-м сторонам)
6.  $\angle APQ = \angle BPQ$
7.  $\triangle APL = \triangle BPL$   
(по 2-м сторонам и углу между ними)
8.  $AL = BL$
9.  $l$  – серединный перпендикуляр к  $AB$
10.  $m \parallel l, l \perp a \Rightarrow m \perp a$

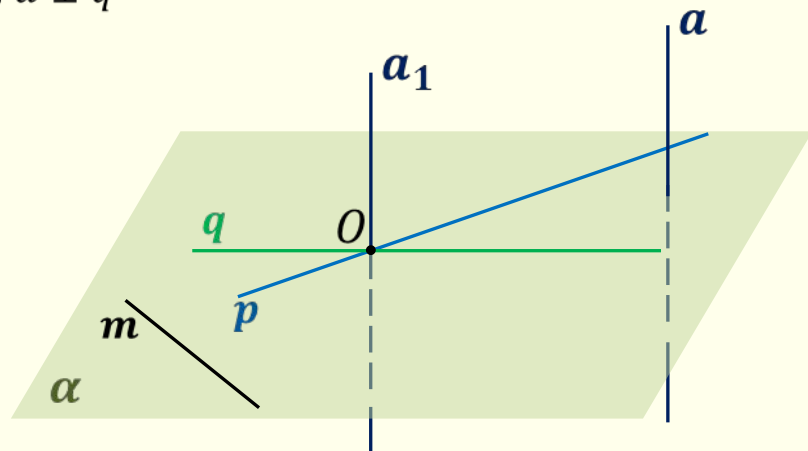


**Теорема.** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

**Доказательство.**

$$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$$

1.  $l \parallel m$
2.  $AO = OB$
3.  $p, q$  – серединные перпендикуляры к  $AB$
4.  $AP = BP, AQ = BQ$
5.  $\triangle APQ = \triangle BPQ$  (по 3-м сторонам)
6.  $\angle APQ = \angle BPQ$
7.  $\triangle APL = \triangle BPL$   
(по 2-м сторонам и углу между ними)
8.  $AL = BL$
9.  $l$  – серединный перпендикуляр к  $AB$
10.  $m \parallel l, l \perp a \Rightarrow m \perp a$



- |                               |                       |
|-------------------------------|-----------------------|
| 1. $a_1 \parallel a$          | 3. $a_1 \perp \alpha$ |
| 2. $a_1 \perp p, a_1 \perp q$ | 4. $a \perp \alpha$   |

**Что и требовалось доказать.**

**Дано.**

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед

**Доказать.**

$AA_1 \perp ABCD$

**Доказательство.**

1.  $AA_1 \perp AB$

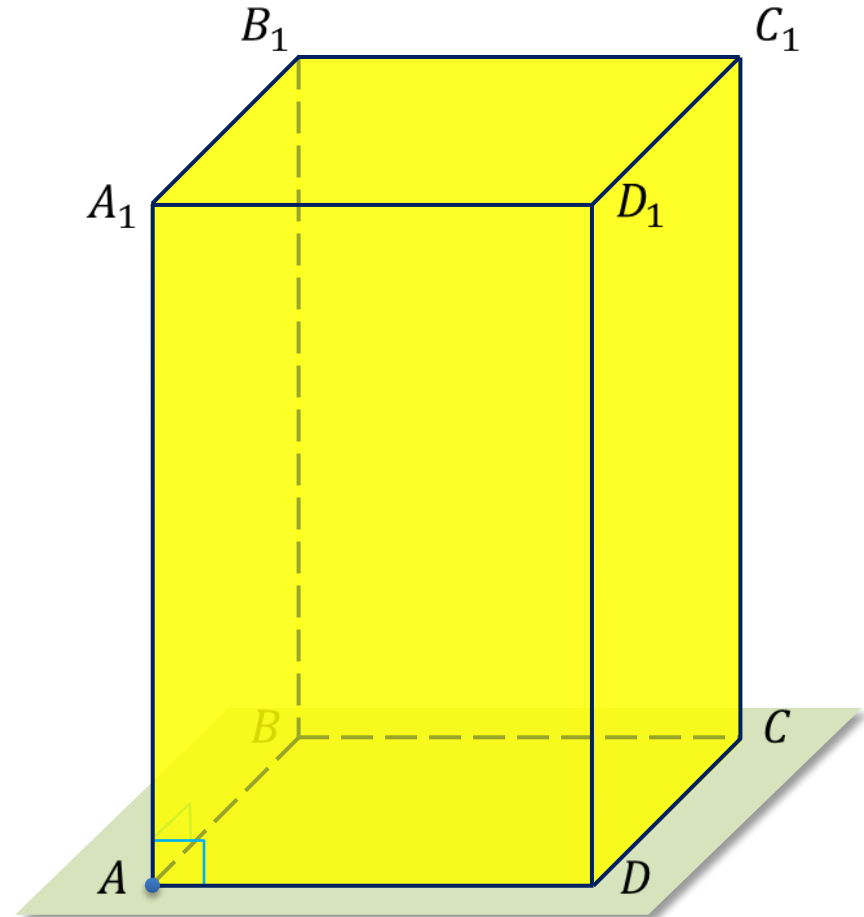
2.  $AA_1 \perp AD$

3.  $AB \cap AD = A$

4.  $AB \subset ABCD, AD \subset ABCD$

5.  $AA_1 \perp ABCD$

**Что и требовалось доказать.**



**Задача.** Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

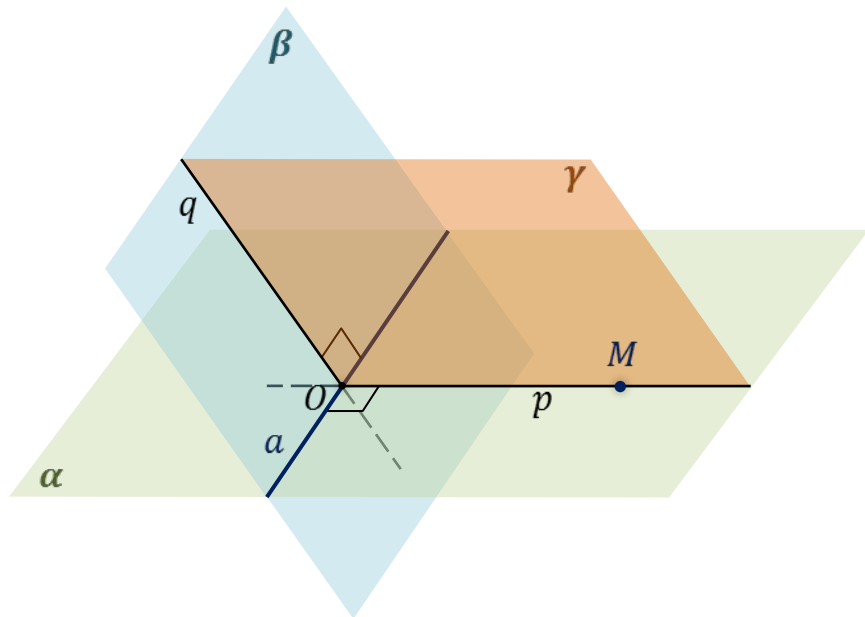
**Построение.**

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| 1. Прямая $a$ .            | 6. $a \cap p = O$                       |
| 2. Точка $M$ .             | 7. $O \in q, a \perp q$                 |
| 3. $\alpha \cap \beta = a$ | 8. $p \cap q = \emptyset$               |
| 4. $M \in \alpha$          | 9. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$ |
| 5. $M \in p, p \perp a$    |   |

**Доказательство.**

- |                |   |                              |
|----------------|---|------------------------------|
| 1. $a \perp p$ | 3. $p \cap q = O$                       | $\Rightarrow a \perp \gamma$ |
| 2. $a \perp q$ | 4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$ |                              |

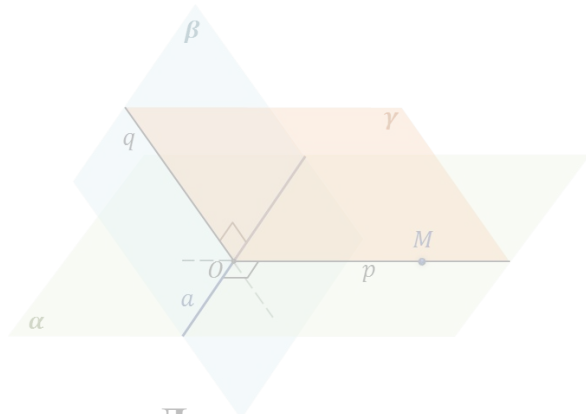
**Что и требовалось доказать.**



**Задача.** Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

**Построение.**

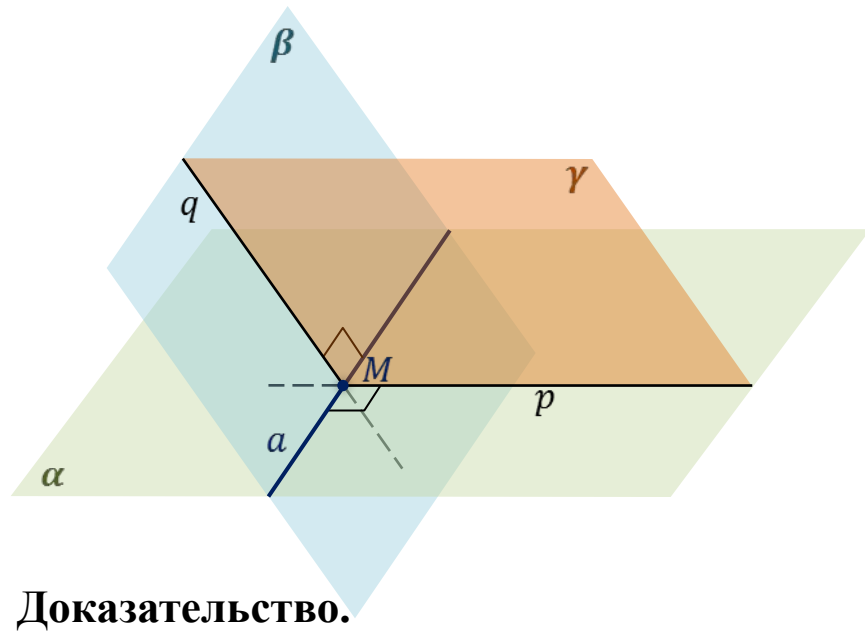
1. Прямая  $a$ .
2. Точка  $M$ .
3.  $\alpha \cap \beta = a$
4.  $M \in \alpha$
5.  $M \in p, p \perp a$
6.  $a \cap p = O$
7.  $O \in q, q \perp a$
8.  $p \cap q = O$
9.  $p \subset \gamma, q \subset \gamma$



**Доказательство.**

1.  $a \perp p$
2.  $a \perp q$
3.  $p \cap q = O$
4.  $p \subset \gamma, q \subset \gamma$   
 $\Rightarrow a \perp \gamma$

Что и требовалось доказать.



**Доказательство.**

- |                |   |                              |
|----------------|---|------------------------------|
| 1. $a \perp p$ | 3. $p \cap q = O$                       | $\Rightarrow a \perp \gamma$ |
| 2. $a \perp q$ | 4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$ |                              |

Что и требовалось доказать.

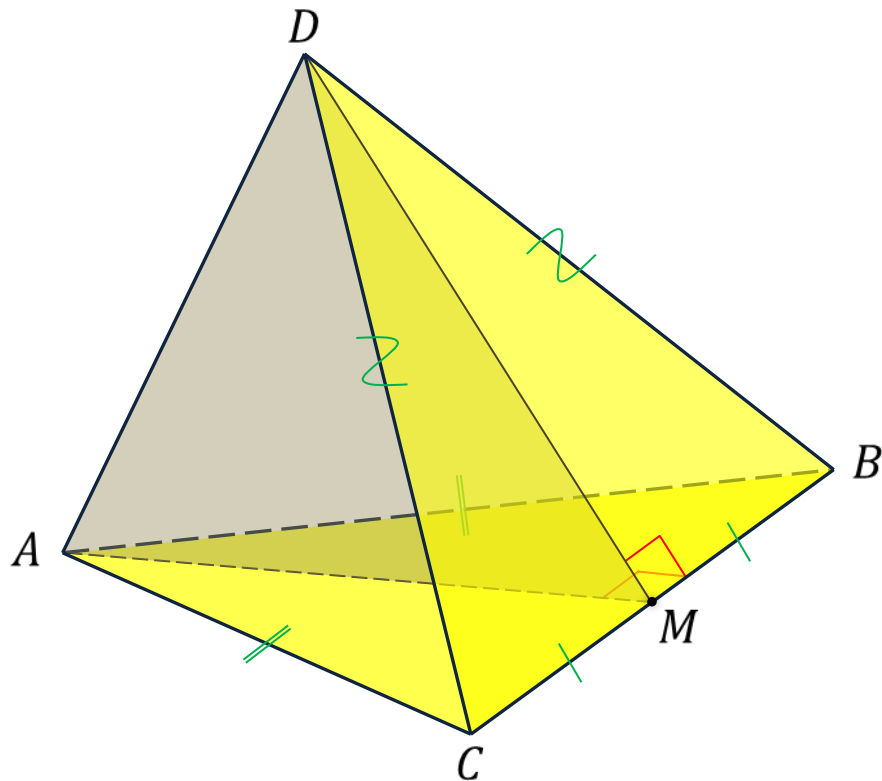
**Задача.**  $ABCD$  — тетраэдр, где точка  $M$  — середина ребра  $BC$ .  $AB = AC$ ,  $DB = DC$ .

Доказать, что плоскость треугольника  $ADM$  перпендикулярна к прямой  $BC$ .

**Доказательство.**

1.  $\triangle ABC$  (равнобедренный):  
медиана  $AM$  — высота и биссектриса
2.  $BC \perp AM$
3.  $\triangle BDC$  (равнобедренный):  
медиана  $DM$  — высота и биссектриса
4.  $BC \perp DM$
5.  $AM \cap DM = M$   
 $AM \subset ADM$ ,  $DM \subset ADM$
6.  $BC \perp ADM$

**Что и требовалось доказать.**





**Задача.** В треугольнике  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $CM$  — медиана.  $CK \perp AB$ . Найти  $KM$ , если  $CK = 12$  см.

**Решение.**

1. Рассмотрим  $\triangle ABC$  (прямоугольный):

по т. Пифагора  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)}$$

2. Середина гипотенузы равноудалена от вершин треугольника.

$$AM = BM = CM = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ см}$$

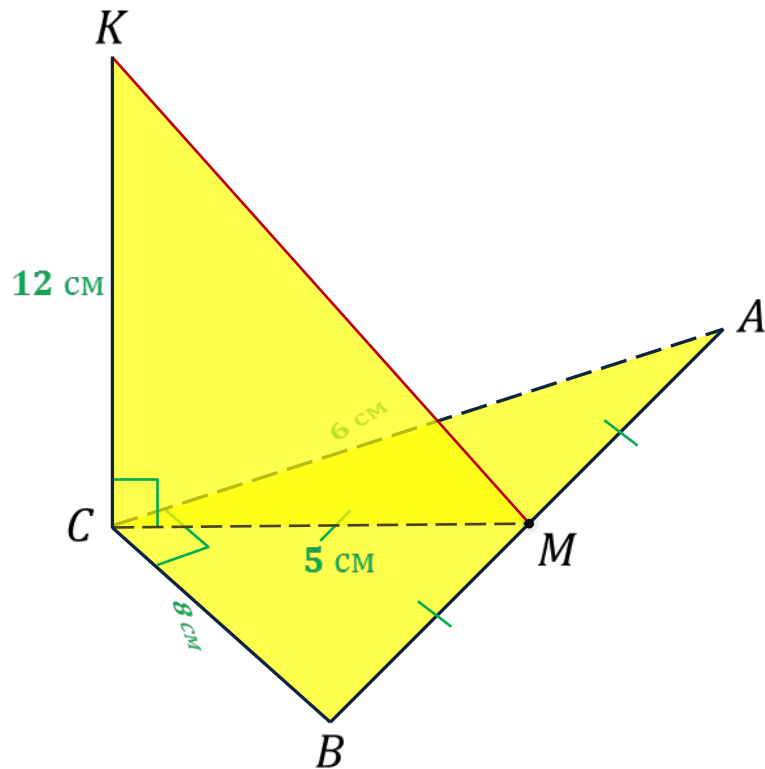
3. Рассмотрим  $\triangle KCM$  (прямоугольный):

по т. Пифагора  $KM^2 = MC^2 + KC^2$

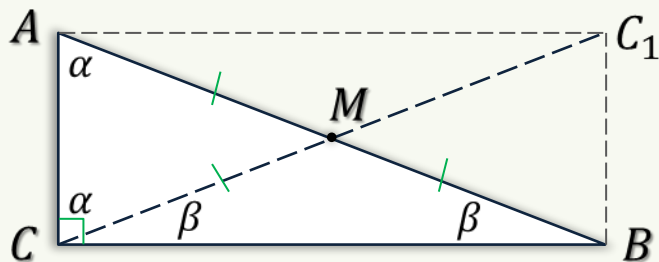
$$KM = \sqrt{MC^2 + KC^2}$$

$$KM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}$$

**Ответ:** 13 см.



В  $\triangle ABC$   $\angle C$  равен  $90^\circ$  тогда и только тогда,  
когда медиана  $CM$  равна половине гипотенузы  $AB$ .



Если в  $\triangle ABC$   $\angle C$  равен  $90^\circ$ , то  
медиана  $CM$  равна половине гипотенузы  $AB$ .

$$AB = CC_1 \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CC_1$$

$$\frac{1}{2}AB = CM$$

Если в  $\triangle ABC$  медиана  $CM$  равна  
половине гипотенузы  $AB$ , то  $\angle C$  равен  $90^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\angle C = \alpha + \beta \Rightarrow \angle C = 90^\circ$$

# Признак перпендикулярности прямой и плоскости

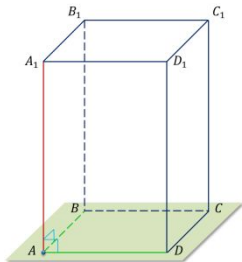
**Дано.**  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед

**Доказать.**  
 $AA_1 \perp ABCD$

**Доказательство.**

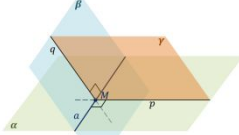
- $AA_1 \perp AB$
- $AA_1 \perp AD$
- $AB \cap AD = A$
- $AB \subset ABCD, AD \subset ABCD$
- $AA_1 \perp ABCD$

**Что и требовалось доказать.**



VIDEouroki.net

Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой.



**Доказательство.**

- $a \perp p$
- $a \perp q$
- $p \cap q = O$
- $p \subset \gamma, q \subset \gamma$
- $\Rightarrow a \perp \gamma$

**Что и требовалось доказать.**

**Доказательство.**

- $a \perp p$
  - $a \perp q$
  - $p \cap q = O$
  - $p \subset \gamma, q \subset \gamma$
- $\Rightarrow a \perp \gamma$

**Что и требовалось доказать.**

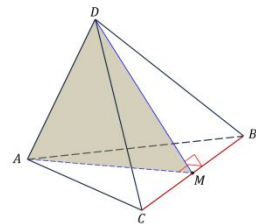
VIDEouroki.net

**Задача.**  $ABCD$  — тетраэдр, где точка  $M$  — середина ребра  $BC$ .  $AB = AC, DB = CD$ . Доказать, что плоскость треугольника  $ADM$  перпендикулярна к прямой  $BC$ .

**Доказательство.**

- $\triangle ABC$  (равнобедренный):  
 медиана  $AM$  — высота и биссектриса
- $BC \perp AM$
- $\triangle BDC$  (равнобедренный):  
 медиана  $DM$  — высота и биссектриса

$AM \perp BC$   
 $DM \perp BC$   
 $AM \cap DM = M$   
 $AM, DM \subset ADM$   
 $BC \perp ADM$   
**Что и требовалось доказать.**



VIDEouroki.net

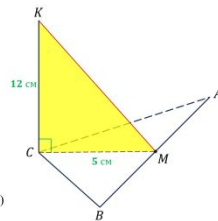
В треугольнике  $ABC \angle C = 90^\circ, AC = 6 \text{ см}, BC = 8 \text{ см}, CM$  — медиана. Если  $CK = 12 \text{ см}$ .

Рассмотрим  $\triangle KCM$  (прямоугольный):  
 $KM^2 = AC^2 + BC^2$   
 $KM = \sqrt{AC^2 + BC^2}$   
 $KM = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)}$

Рассмотрим  $\triangle KCM$  (прямоугольный):  
 $KM$  — равноудалена от вершин треугольника.  
 $AM = BM = CM = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ см}$

3. Рассмотрим  $\triangle KCM$  (прямоугольный):  
 по т. Пифагора  $KM^2 = MC^2 + KC^2$   
 $KM = \sqrt{MC^2 + KC^2}$   
 $KM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}$

**Ответ:** 13 см.



VIDEouroki.net