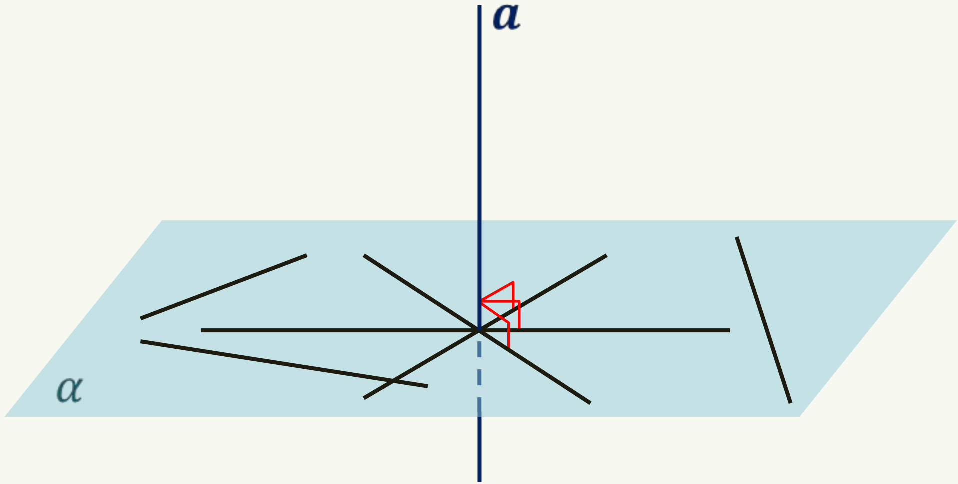
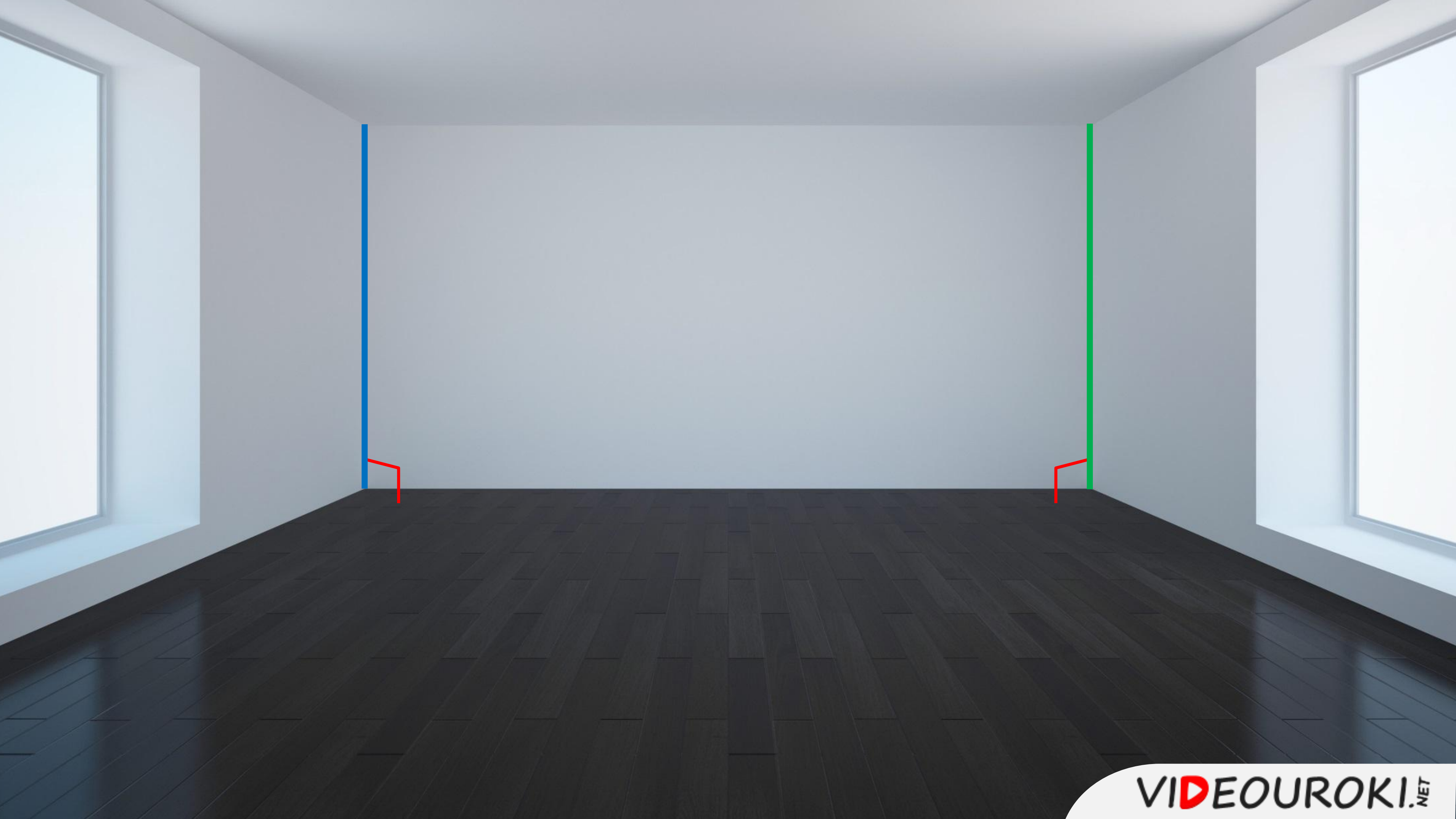
Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**,
если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

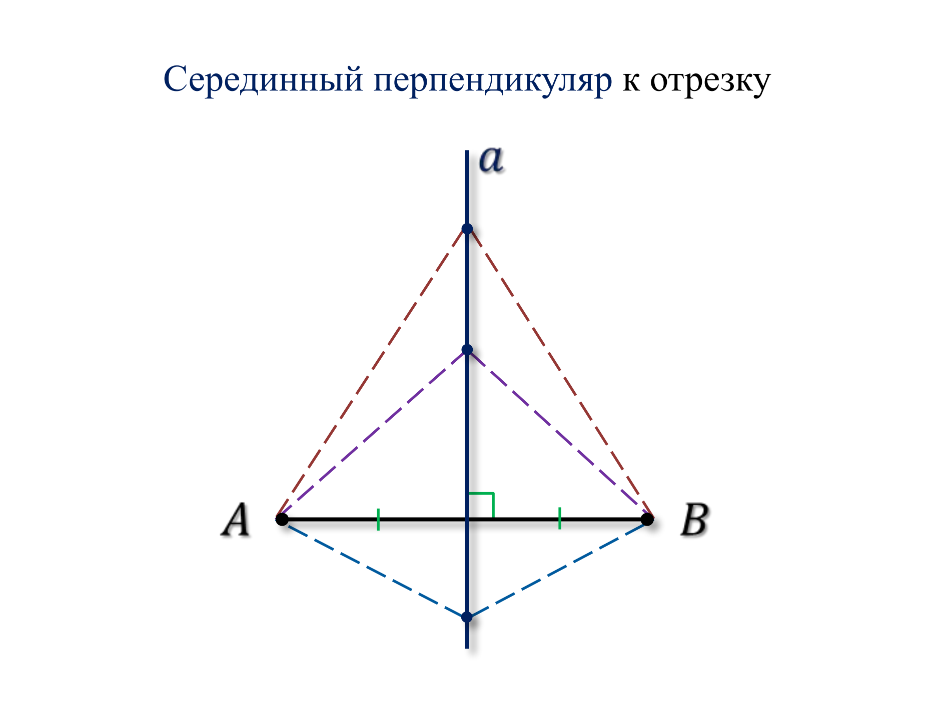




Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

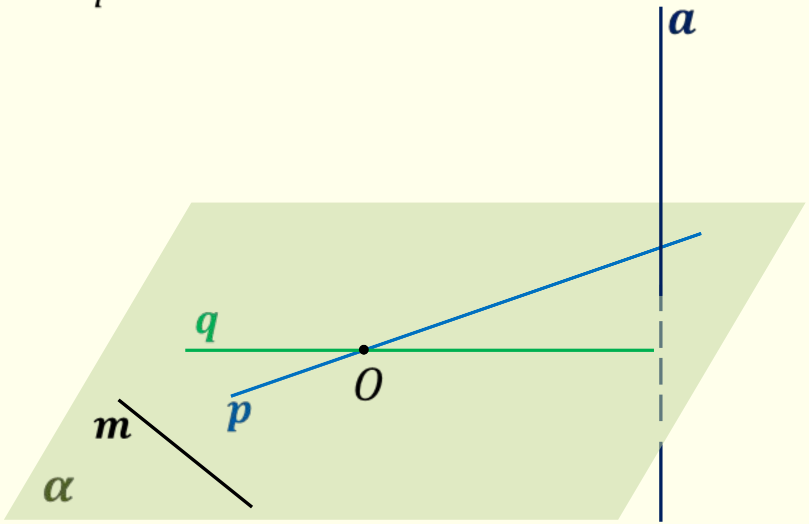
$p \cap q = O;\ a \perp p,\ a \perp q$



Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$

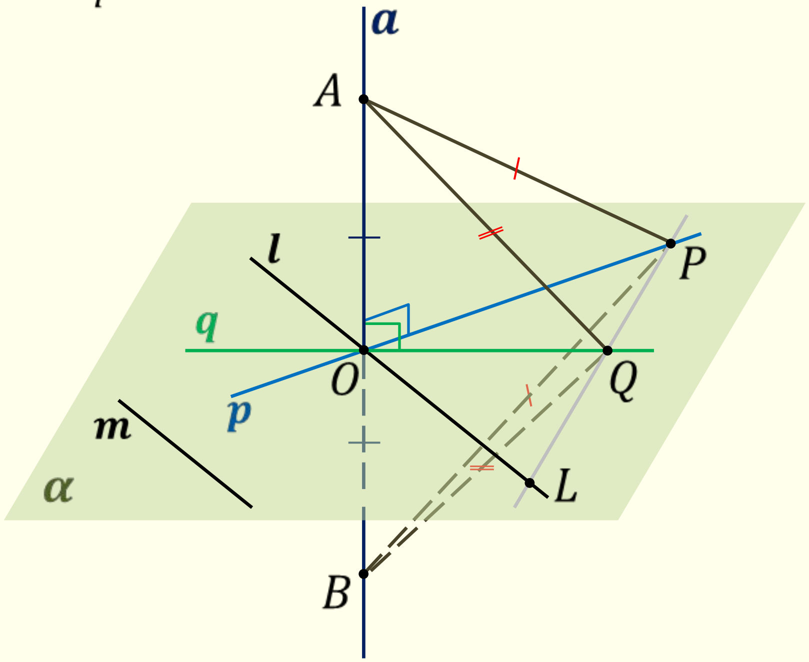


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$p \cap q = O; a \perp p, a \perp q$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP$, $AQ = BQ$

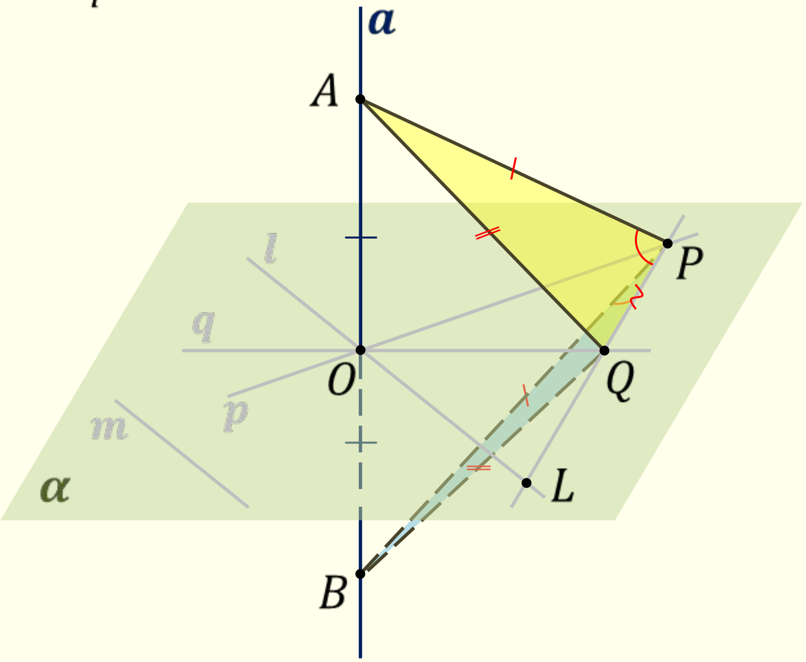


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$p \cap q = O;\ a \perp p,\ a \perp q$

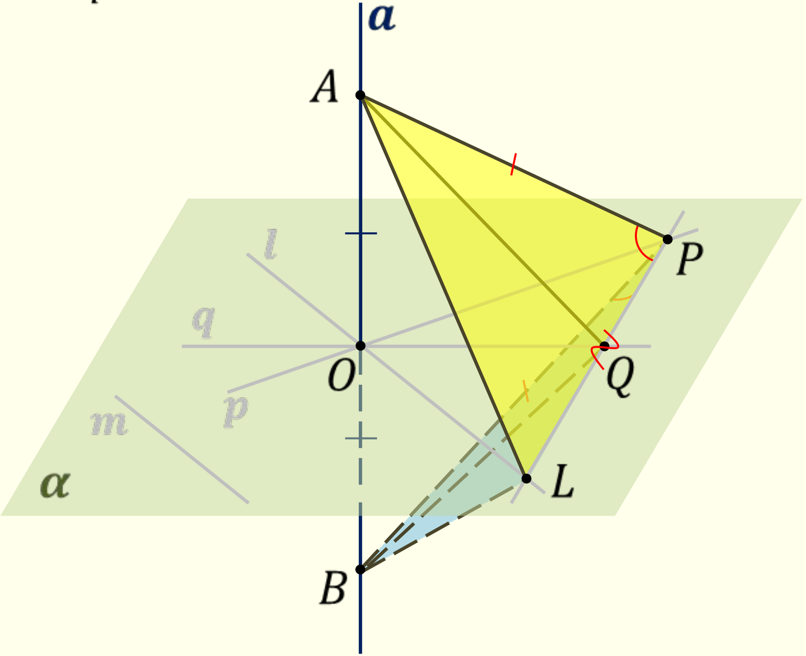
1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP,\ AQ = BQ$
5. $\Delta APQ = \Delta BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$



Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство. $p \cap q = O;\ a \perp p,\ a \perp q$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP,\ AQ = BQ$
5. $\Delta APQ = \Delta BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$
7. $\Delta APL = \Delta BPL$
   (по 2-м сторонам и углу между ними)
8. $AL = BL$
9. l – серединный перпендикуляр к AB

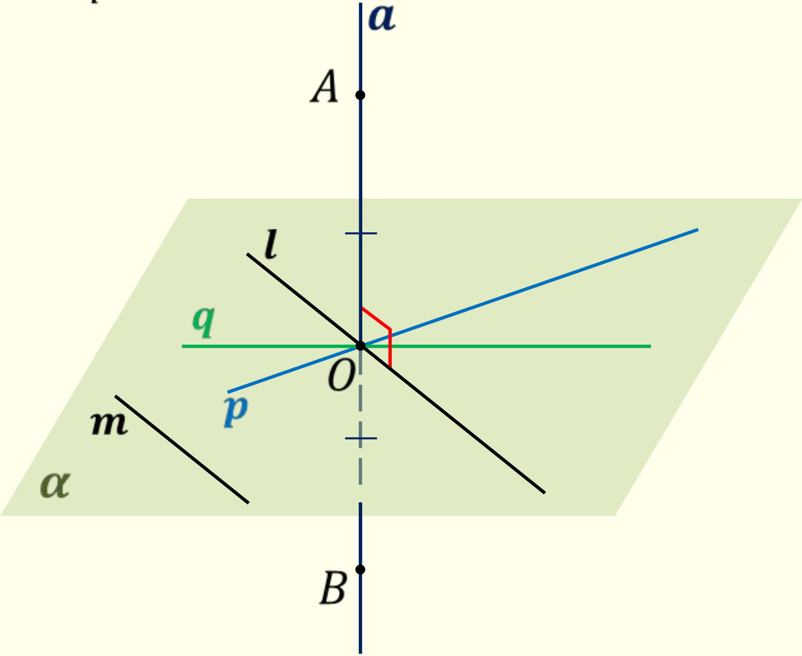


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство.

$p \cap q = O;\ a \perp p,\ a \perp q$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP,\ AQ = BQ$
5. $\Delta APQ = \Delta BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$
7. $\Delta APL = \Delta BPL$
   (по 2-м сторонам и углу между ними)
8. $AL = BL$
9. l – серединный перпендикуляр к AB
10. $m \parallel l,\ l \perp a \ \Rightarrow \ m \perp a$

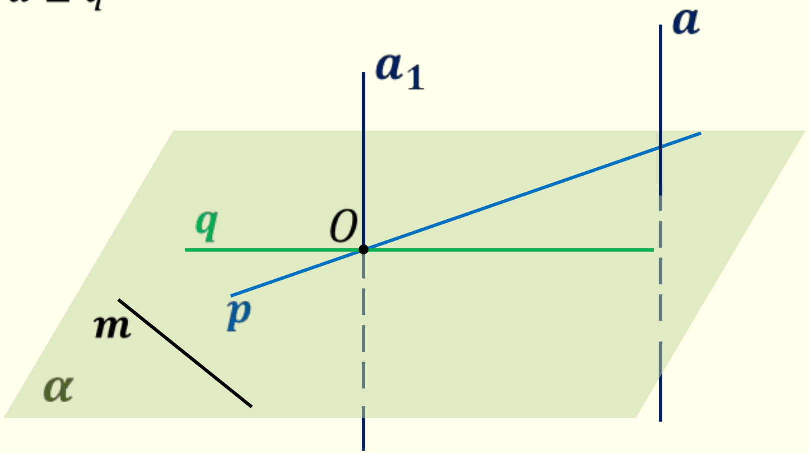


Теорема. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство. $p \cap q = O;\ a \perp p,\ a \perp q$

1. $l \parallel m$
2. $AO = OB$
3. p, q – серединные перпендикуляры к AB
4. $AP = BP,\ AQ = BQ$
5. $\Delta APQ = \Delta BPQ$ (по 3-м сторонам)
6. $\angle APQ = \angle BPQ$
7. $\Delta APL = \Delta BPL$

   (по 2-м сторонам и углу между ними)
8. $AL = BL$
9. l – серединный перпендикуляр к AB
10. $m \parallel l,\ l \perp a \implies m \perp a$



1. $a_1 \parallel a$
2. $a_1 \perp p,\ a_1 \perp q$
3. $a_1 \perp \alpha$
4. $a \perp \alpha$

Что и требовалось доказать.

Дано.
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед

Доказать.
$AA_1 \perp ABCD$

Доказательство.

1. $AA_1 \perp AB$

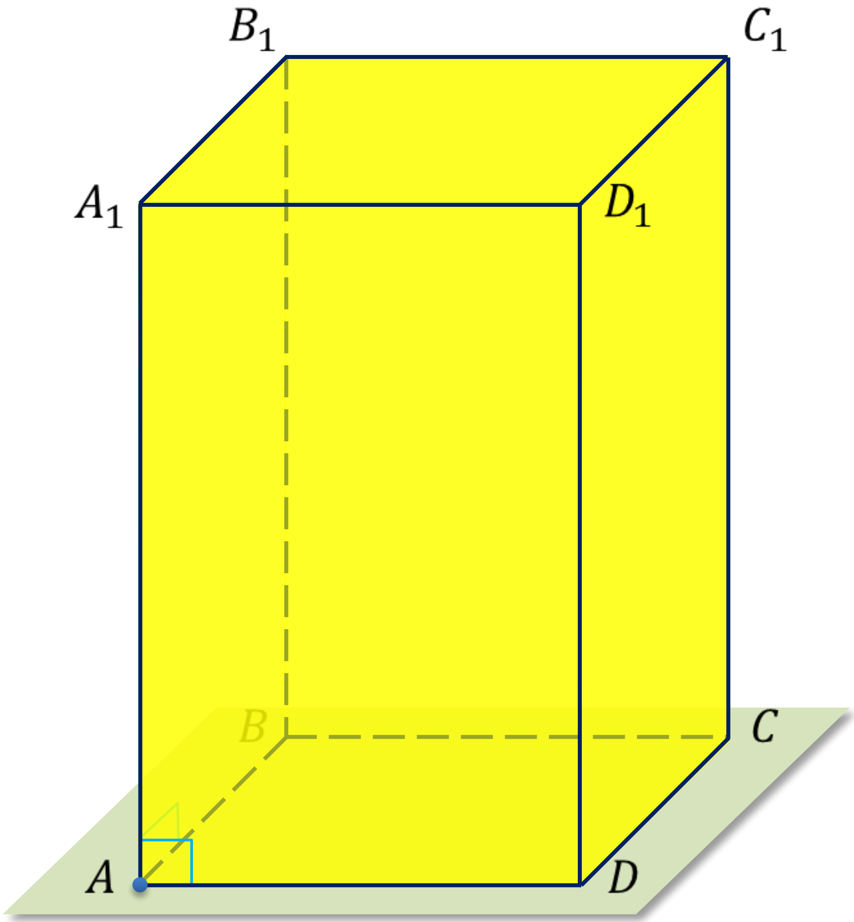
2. $AA_1 \perp AD$

3. $AB \cap AD = A$

4. $AB \subset ABCD,\ AD \subset ABCD$

5. $AA_1 \perp ABCD$

Что и требовалось доказать.



Задача. Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

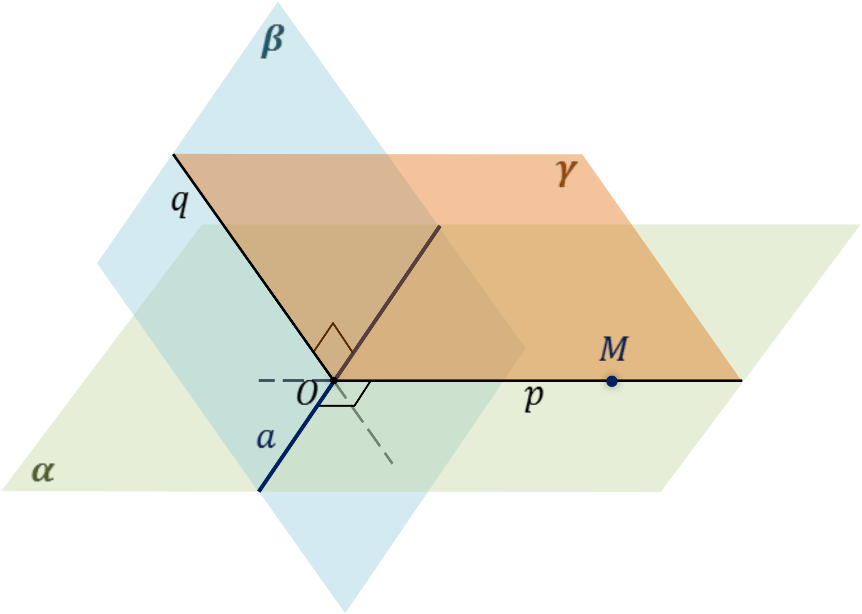
Построение.

1. Прямая a.
2. Точка M.
3. $\alpha \cap \beta = a$
4. $M \in \alpha$
5. $M \in p,\ p \perp a$
6. $a \cap p = O$
7. $O \in q,\ q \perp a$
8. $p \cap q = O$
9. $p \subset \gamma,\ q \subset \gamma$

Доказательство.

1. $a \perp p$
2. $a \perp q$
3. $p \cap q = O$
4. $p \subset \gamma,\ q \subset \gamma$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a \perp \gamma}$

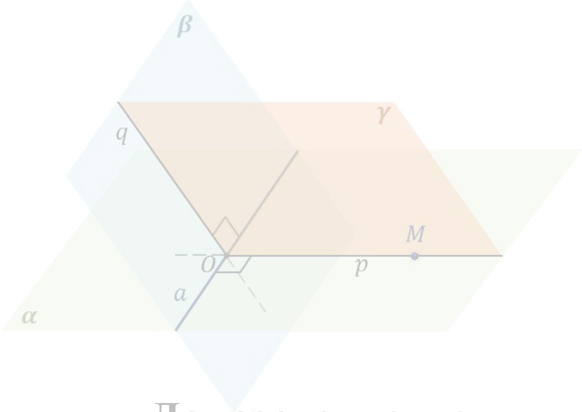


Что и требовалось доказать.

Задача. Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Построение.

1. Прямая a.
2. Точка M.
3. $\alpha \cap \beta = a$
4. $M \in \alpha$
5. $M \in p, p \perp a$
6. $a \cap p = O$
7. $O \in q, q \perp a$
8. $p \cap q = O$
9. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$

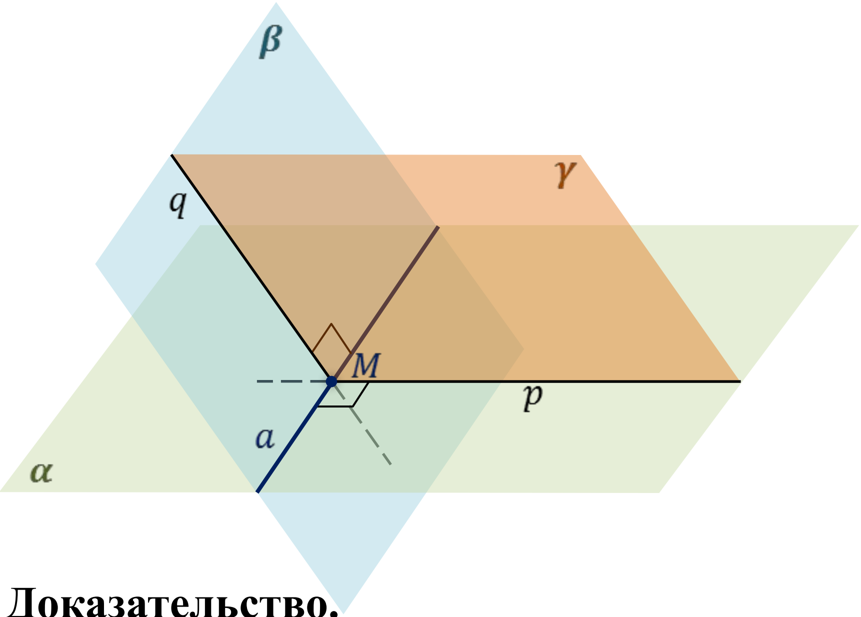


Доказательство.

1. $a \perp p$
2. $a \perp q$
3. $p \cap q = O$
4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$

$\Rightarrow \quad a \perp \gamma$

Что и требовалось доказать.



Доказательство.

1. $a \perp p$
2. $a \perp q$
3. $p \cap q = O$
4. $p \subset \gamma, q \subset \gamma$

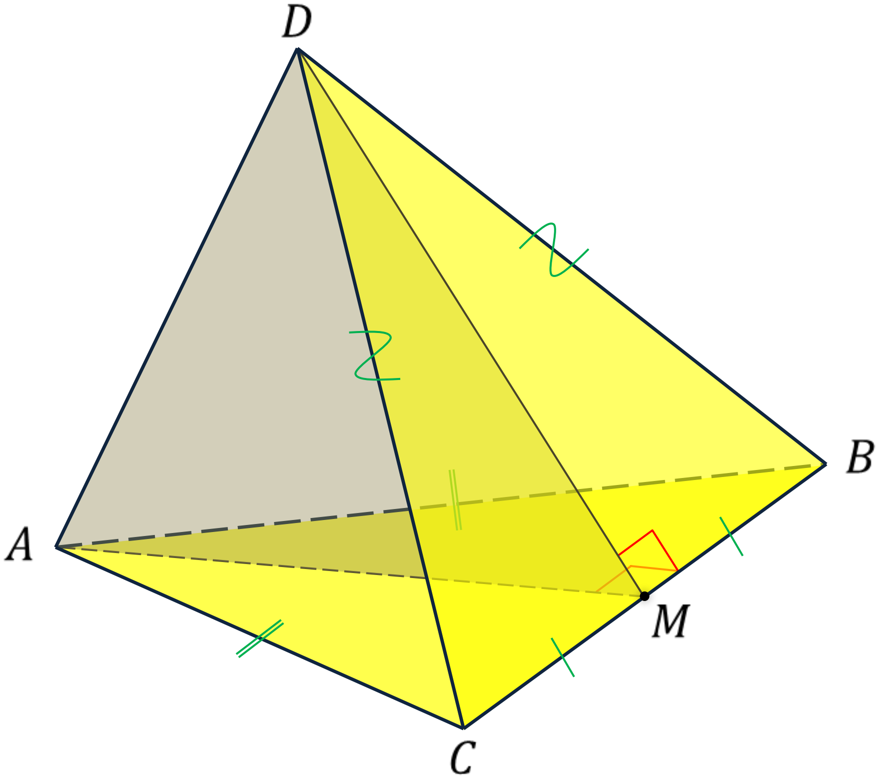
$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a \perp \gamma}$

Что и требовалось доказать.

Задача. $ABCD$ – тетраэдр, где точка M — середина ребра BC. $AB = AC$, $DB = CD$. Доказать, что плоскость треугольника ADM перпендикулярна к прямой BC.

Доказательство.

1. ΔABC (равнобедренный):
   медиана AM – высота и биссектриса
2. $BC \perp AM$
3. ΔBDC (равнобедренный):
   медиана DM – высота и биссектриса
4. $BC \perp DM$
5. $AM \cap DM = M$
   $AM \subset ADM$, $DM \subset ADM$
6. $BC \perp ADM$



Что и требовалось доказать.

Задача. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM – медиана. $CK \perp ABC$. Найти KM, если $CK = 12$ см.

Решение.

1. Рассмотрим ΔABC (прямоугольный):
   по т. Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см)}$$

2. Середина гипотенузы равноудалена от вершин треугольника.

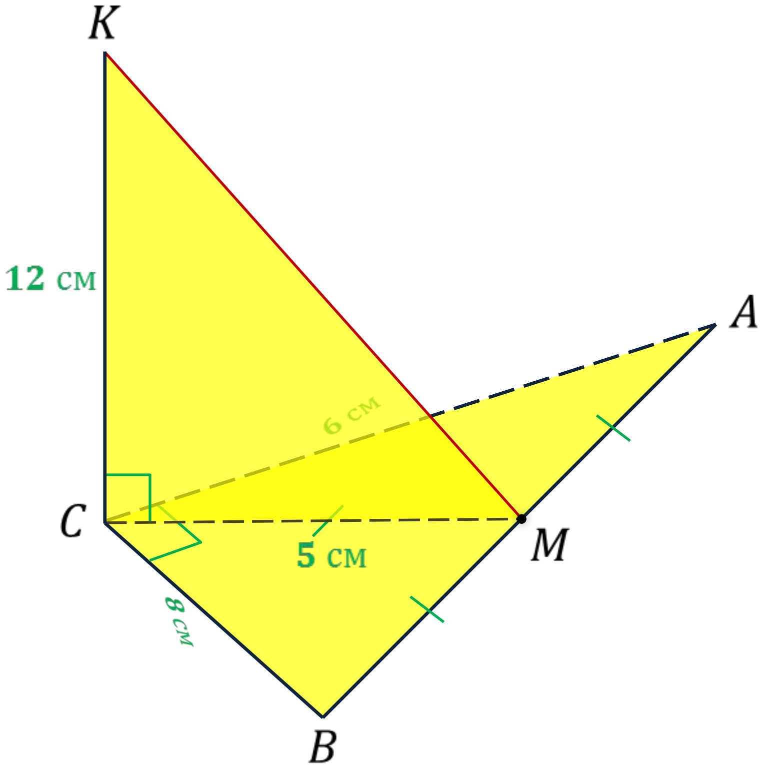
$$AM = BM = CM = \frac{1}{2}AB = 5 \text{ см}$$

3. Рассмотрим ΔKCM (прямоугольный):
   по т. Пифагора $KM^2 = MC^2 + KC^2$

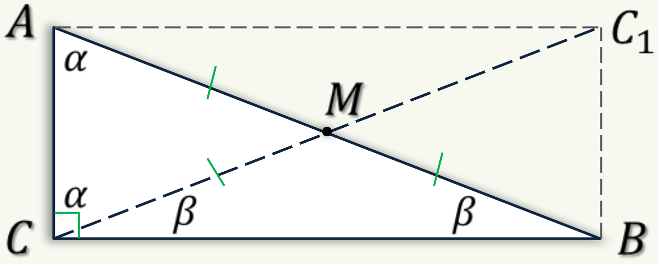
$$KM = \sqrt{MC^2 + KC^2}$$

$$KM = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}$$

Ответ: 13 см.



В ΔABC $\angle C$ равен $90°$ тогда и только тогда,
когда медиана CM равна половине гипотенузы AB.



Если в ΔABC $\angle C$ равен $90°$, то
медиана CM равна половине гипотенузы AB.

Если в ΔABC медиана CM равна
половине гипотенузы AB, то $\angle C$ равен $90°$.

$$AB = CC_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CC_1$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}AB = CM}$$

$$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2(\alpha + \beta) = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\angle C = \alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\angle C = 90°}$$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости