Лекция. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ Лекция 9 сентября 2020 года

В конце прошлой лекции мы поставили задачу: Как найти интегрирующий множитель?

Для нахождения $\mu(x,y)$ должно выполняться

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Разделим на $\mu(x,y)$. Тогда получим

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{или}$$

$$\boxed{P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = Q\cdot\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (*)$$

1-ый случай. Будем искать $\mu = \mu(x)$, то есть $\mu(x)$ не зависит от y (зависит только от x)

Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{d\ln(\mu)}{dx}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}$$

Тогда если правая часть этого равенства не зависит от y, то существует интегрирующий множитель зависящий от x.

2-ой случай. Будем искать $\mu = \mu(y)$ (то есть зависит только от y). Тогда из $(*)$ находим $P\frac{d(\ln\mu)}{dy} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P(x,y)}$$

если правая часть этого равенства не зависит от x, то существует интегрирующий множитель $\mu(y)$.

<u>3-й случай</u> будем искать $\mu(x,y)=\mu[t(x,y)]$, где вид функции $t(x,y)$ известен, например, $t=x^2+y^2$, $t=xy$, ... Из (*) тогда получим

$$\frac{d\ln\mu}{dt}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P\cdot t'_y-Q\cdot t'_x}$$

Если правая часть этого выражения является функцией только от t, то существует интегрирующий множитель $\mu(t)$.

<u>Пример</u> $(x^2+y^2-3)dx-2xy\,dy=0$ (A)

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu=\mu(x)$. Домножим уравнение (A) на $\mu(x)$, получим.

$$\underbrace{\mu(x)(x^2+y^2-3)}_{P_1(x,y)}dx-\underbrace{\mu(x)(2xy)}_{Q_1(x,y)}dy=0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}\Rightarrow\mu(x)\cdot 2y=-2xy\cdot\mu'-2y\cdot\mu\Rightarrow$$

$4\mu(x)y=-2xy\cdot\mu'$. Разделим это равенство на $2y$, $(y\neq 0)$. Тогда получим

$$\mu'(x)=-\frac{2\mu}{x}\Rightarrow\frac{\mu'(x)}{\mu}=-\frac{2}{x}\Rightarrow$$

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{2}{x}$$ (правая часть не зависит от y)

$\Rightarrow\mu(x)=\frac{1}{x^2}$ – интегрирующий множитель. Умножим уравнение (A) на $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$

Тогда получим $\left(1+\frac{y^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}\right)dx-\frac{2y}{x}dy=0$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

Тогда $\frac{\partial U}{\partial x} = 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2} \Rightarrow U = \int\left(1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right)dx + \varphi(y)$

$$\Rightarrow U(x,y) = x - \frac{y^2}{x} + \frac{3}{x} + \varphi(y)$$

$$Q_1(x,y) = -\frac{2y}{x} = -\frac{2y}{x} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = C \Rightarrow U(x,y) = x - \frac{y^2}{x} + \frac{3}{x} + C$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$\boxed{x - \frac{y^2}{x} + \frac{3}{x} = C}$$

§ <u>ОДУ 1-ого порядка не разрешенные относительно производной</u>.

Пусть задано уравнение $F(x,y,y') = 0$ (*) где $F(x,p,q) \in C(G)$, где $G \subset R^3$ и пусть в некоторой подобласти $\Omega \subset G$ уравнение (*) разрешимо относительно y', то есть

$$y' = f_k(x,y), \quad k = 1,2,\dots,n \qquad (1)$$

Пример $a_0(x,y)(y')^n + \dots + a_n(x,y) = 0$ (2)

и пусть уравнение (2) имеет n-корней

$$y'(x) = f_k(x,y), \quad k = \overline{1,n}$$

и пусть для $\forall k$ задача Коши для уравнения $y' = f_k(x,y)$ имеет единственное решение, то есть справедлива ТСЕ. Тогда для $\forall (x_0,y_0) \in G$ $\exists$ n-решений,

проходящих через точку $(x_0, y_0) \in G$.

чтобы выделить единственное решение нужно задать $y'_k(x_0) = y'_{k0}$: $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$

<u>Теорема</u> (ТСЕ решения задачи Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$)

Пусть задано уравнение $F(x, y, y') = 0$ (*) и функция $F(x, y, y')$ определена в замкнутом „прямоугольнике" $P_3 \subset R^3$ с центром в точке (x_0, y_0, y'_0) и $F(x, y, y')$ удовлетворяет условиям: 1) $F(x, p, q) \in C^1(P_3)$; 2) $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ 3) $\frac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial p} \neq 0$, $(p = y')$. Тогда $\exists\, h > 0$: в окрестности $|x - x_0| \leq h$ $\exists!$ решение $y = y(x)$ уравнения (*), удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$

<u>Замечание</u> Если две различные интегральные кривые уравнения (*) проходят через точку (x_0, y_0) имеют в этой точке одинаковую касательную, определяющую значением y'_0, то в этой точке нарушено условие единственности решения уравнения (*).

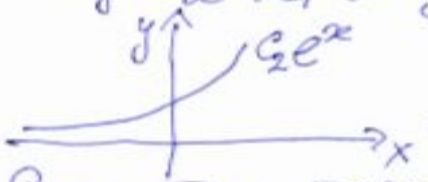
<u>Док-во теоремы</u> Из 1) и 3) следует по теореме о неявной функции $\exists$ окрестность $D_2 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq h\}$ и в

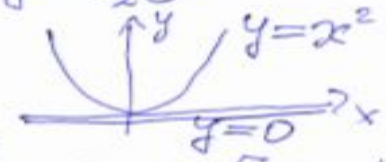
этой окрестности $\exists!\ y' = f(x,y) : y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, причём $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}}{\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}}$ непрерывна в D_2. Следовательно, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ - ограничена. Тогда по ТСЕ для уравнения $y' = f(x,y)$ $\exists!$ решение $y(x) \Longrightarrow$ теорема доказана.

Пример $(y')^2 - (2x+y)y' + 2xy = 0$

1) $y' = 2x$ и $y' = y$. Таким образом, получаем, что через $\forall$ точку (x_0, y_0) проходит два решения, по одному из $\forall$ семейства

$y = x^2 + C_1$ и $y = C_2 e^x$





Рассмотрим точку $(0,0)$. Через неё проходит решение $y = x^2$ при $C_1 = 0$ и $y = 0$ при $C_2 = 0$. Заметим, что эти решения имеют общую касательную $y' = 0$ в этой точке $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Следовательно, должно нарушаться условие ТСЕ для $F(x,y,y') = 0$ в точке $(0,0)$.

Действительно, $\frac{\partial F(0,0,0)}{\partial y'} = 0$.

Рассмотрим точку $(2;4)$. Через неё прохо-

дают два решения: $y=\left(\frac{4}{e^2}\right)e^x$ и $y=x^2$.
Касательные к этим кривым в точке $(2;4)$ совпадают ($y'=4$). Следовательно, нарушено условие ТСЕ для (*) $\frac{\partial F}{\partial y'}(2;4;4)=0$

§5 <u>Решение уравнения $F(x,y,y')=0$ методом введения параметра.</u>

Предположим, что $F(x,y,y')=0$ разрешимо относительно $y(x)$, то есть

$$y=f(x,y') \text{ (или } x=g(y,y')) \quad (1)$$

Введём параметр $y'=p$, тогда уравнение (1) примет вид: $y=f(x;p)$ (2)

Продифференцировав это равенство по x, получим: $y'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$. Так как $y'=p$, то $p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot p'$. То есть получили ОДУ 1-ого порядка относительно p. Пусть известно общее решение этого ОДУ, то есть $p=\varphi(x,c)$. Тогда подставляя это в (2) получим $y=f(x,\varphi(x,c))$ — общее решение уравнения (1)

<u>Замечание</u> Уравнение $x=g(y;y')$ решается аналогично, $y'=p \Longrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$

<u>Пример</u> $(y')^2-xy'+y=0$

Решение $y'=p \Rightarrow y = xy' - (y')^2 \Rightarrow$

$y = px - p^2$ (*)

Дифференцируя (*), получим

$$\cancel{p} = \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow (x-2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

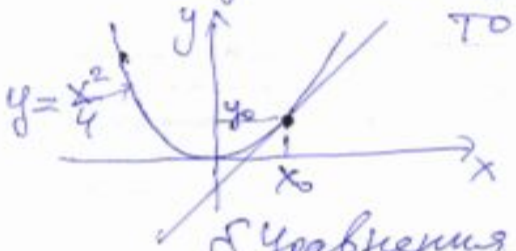
1) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$ (**) – общее решение

2) $x - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2}$. Подставляя в (*) получим $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$ – особое решение.

Заметим, что через $\forall (x_0, y_0)$, принадлежащую кривой $y = \frac{x^2}{4}$ проходит кривая семейства (**) при $= \frac{x_0}{2}$. То есть в $\forall$ точке $(x_0, y_0) \in y = \frac{x^2}{4}$ проходит два решения, то есть нарушено условие ТСЕ $\Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right|_{y=\frac{x^2}{4}} = 0$$

то есть $y = \frac{x^2}{4}$ – особое решение



§ Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнение $y = xb(y') + f(y')$ – уравнение Лагранжа.

Пусть $y' = p \Longrightarrow y = x\,b(p) + f(p)$ (*)

$dy = b(p)dx + x b' dp + f'(p)dp \Longrightarrow$

$p\,dx = b(p)dx + x b' dp + f' dp \Longrightarrow$

$(p - b(p))\dfrac{dx}{dp} = x b' + f' \Longrightarrow$

1) $b(p) \neq p$ Тогда получим

$$\frac{dx}{dp} = \frac{b'}{p - b(p)} \cdot x + \frac{f'}{p - b(p)} \quad (**)$$

Это линейное относительно x уравнение. Решая его найдём $x = \varphi(p, c)$. Тогда

$$\begin{cases} x = \varphi(p, c) \\ y = b(p)\varphi(p, c) + f(p) \end{cases}$$

– общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде.

2) Пусть $\exists\, p_0 : b(p_0) = p_0$, но $b(p) \not\equiv p$.

Тогда $y = p_0 x + f(p_0)$ – есть решение уравнения Лагранжа.

Действительно, $p_0 x + f(p_0) = x b(p_0) + f(p_0)$

Так как $b(p_0) = p_0 \Longrightarrow p_0 x = p_0 x$ #.

3) Если $b(p) \equiv p$, то $y = xp + f(p)$ (A)

Опр: Уравнение $y = xy' + f(y')$ – уравнение Клеро.

Тогда из (A) получим

$$\underbrace{dy}_{= p\,dx} = x\,dp + p\,dx + f'(p)dp \Longrightarrow$$

$[x + f']dp = 0$, 1) $dp = 0 \Longrightarrow p = C \Longrightarrow$

$y = Cx + f(C)$ – общее решение уравнения Клеро.

2) $x + f'(p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f \end{cases}$ – особое решение уравнения Клеро.

Докажем, что оно является решением. Так как $y' = p \to dy = p\,dx \to$

$-f'(p)dp - pf''dp + f'dp = -pf''dp \Rightarrow 0 = 0$ #

Рассмотрим ещё частный случай уравнения $F(x, y, y') = 0$, а именно уравнение вида $f(y, y') = 0$ (*)

Параметризуем это уравнение

$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$ – это параметрическое задание уравнения (*)

это означает, что $f[\varphi(t), g(t)] = 0$ для $\forall\, t \in \langle \alpha; \beta \rangle$.

Из (*) следует, что $\begin{cases} dy = \varphi'(t)dt \\ dy = g(t)d \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{g(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)}{g(\tau)} d\tau + C$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)}{g(\tau)} d\tau + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ общее решение уравнения (*) в параметрическом виде

§ Общий случай

Пусть задано уравнение $F(x,y,y')=0$ (1)

Рассмотрим уравнение $F(x,y,p)=0$ (1')

Уравнение (1') определяет в R^3 поверхность и пусть известно её параметрическое представление:

$$\begin{cases} x=X(u,v) \\ y=Y(u,v) \\ p=P(u,v) \end{cases}, \text{ где } (u,v)\in\Omega\subset R^3$$

Так как $y'=p$, то $dy=p\,dx$, и поэтому

$$\frac{\partial Y}{\partial u}du+\frac{\partial Y}{\partial v}dv=p\frac{\partial X}{\partial u}du+p\frac{\partial X}{\partial v}dv \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{dv}{du}=\frac{P\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{\partial Y}{\partial u}}{\frac{\partial Y}{\partial v}-P\frac{\partial X}{\partial v}}}$$ – это ОДУ относительно $\frac{dv}{du}$.

Пусть известно общее решение этого уравнения $v=\varphi(u,c)$. Тогда

$$\begin{cases} x=X[u,\varphi(u,c)] \\ y=Y[u,\varphi(u,c)] \end{cases}$$ – есть общее решение уравнения (1) в параметрическом виде

§ Особые решения ОДУ 1-ого порядка

1) Для уравнения $y'=f(x,y)$ (*)

ТСЕ для этого уравнения 1) если $f, \frac{\partial f}{\partial y}\in C(\Omega)$ и $\exists M>0: |f|+|\frac{\partial f}{\partial y}|\le M$, тогда для $\forall(x_0,y_0)\subset\Omega$ $\exists h>0$: на $[x_0-h, x_0+h]$ $\exists!$ решение $y(x)$ задачи Коши $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

<u>Замечание</u> Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы $f \in C(\Omega)$.
При этих условиях решение задачи Коши будет существовать, но оно не обязательно будет единственным.

<u>Опр.</u> Особым решением уравнения (*) называется такое решение $\varphi(x)$, через $\forall$ точку которого проходит по крайней мере два различных решения φ и ψ причём $\varphi \not\equiv \psi$ ни в какой окрестности этой точки.

Особое решение уравнения (*) следует искать там, где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$

<u>Замечание</u> Это необходимое, но не достаточное условие.

<u>Пример</u> 1) $y' = 3y^{2/3} \Rightarrow y = (x+C)^3$ и $y \equiv 0$
Через $\forall$ точку $(x_0, 0)$ проходят два различных решения $y \equiv 0$ и $\tilde{y} = (x - x_0)^3$
причем $y'(x_0) = 0 = \tilde{y}'(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow y \equiv 0$ – особое решение

2) $y' = 3y^{2/3} + 1$; $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{2}{y^{1/3}}\right|_{y=0} = \infty$
но $y \equiv 0$ не является особым решением, так как $y \equiv 0$ не является решением уравнения.

<u>Правило</u> нахождения особого решения для уравнения $y' = f(x, y)$

1) Вычисляем $\frac{\partial f}{\partial y}$ и находим множество где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$

2) Каждую ветвь множества $\{\frac{\partial f}{\partial y} = \infty\}$ проверяем является ли она решением уравнения $y' = f(x, y)$, 3) проверяем является оно особым решением или нет.