# Лекция. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

# ОДУ Лекция 9 сентября 2020 года

В конце прошлой лекции мы поставили задачу: Как найти интегрирующий множитель?

Для нахождения $\mu(x,y)$ должно выполняться

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Разделим на $\mu(x,y)$. Тогда получим

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{или}$$

$$\boxed{P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = Q\cdot\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (*)$$

1-ый случай. Будем искать $\mu = \mu(x)$, то есть $\mu(x)$ не зависит от $y$ (зависит только от $x$)

Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{d\ln(\mu)}{dx}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}$$

Тогда если правая часть этого равенства не зависит от $y$, то существует интегрирующий множитель зависящий от $x$.

2-ой случай. Будем искать $\mu = \mu(y)$ (то есть зависит только от $y$). Тогда из $(*)$ находим $P\frac{d(\ln\mu)}{dy} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P(x,y)}$$

если правая часть этого равенства не зависит от $x$, то существует интегрирующий множитель $\mu(y)$.

3-й случай будем искать $\mu(x,y) = \mu[t(x,y)]$, где вид функции $t(x,y)$ известен, например, $t = x^2+y^2$, $t = xy, \ldots$ Из ⊛ тогда получим

$$\frac{d\ln\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\cdot t'_y - Q\cdot t'_x}$$

Если правая часть этого выражения является функцией только от $t$, то существует интегрирующий множитель $\mu(t)$.

Пример $(x^2+y^2-3)dx - 2xy\,dy = 0$ (A)

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Домножим уравнение (A) на $\mu(x)$, получим.

$$\underbrace{\mu(x)(x^2+y^2-3)}_{P_1(x,y)}dx - \underbrace{\mu(x)(2xy)}_{Q_1(x,y)}dy = 0$$

$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Longrightarrow \mu(x)\cdot 2y = -2xy\cdot\mu' - 2y\cdot\mu \Longrightarrow$

$4\mu(x)y = -2xy\cdot\mu'$. Разделим это равенство на $2y$, $(y \neq 0)$. Тогда получим

$\mu'(x) = -\frac{2\mu}{x} \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu} = -\frac{2}{x} \Longrightarrow$

$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{2}{x}$ (правая часть не зависит от $y$)

$\Longrightarrow \mu(x) = \frac{1}{x^2}$ – интегрирующий множитель. Умножим уравнение (A) на $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$

Тогда получим $\left(1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{2y}{x^2};\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

Тогда $\frac{\partial U}{\partial x} = 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2} \Rightarrow U = \int\left(1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right)dx + \varphi(y)$

$\Rightarrow U(x,y) = x - \frac{y^2}{x} + \frac{3}{x} + \varphi(y)$

$Q_1(x,y) = -\frac{2y}{x} = -\frac{2y}{x} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(y) = C \Rightarrow U(x,y) = x - \frac{y^2}{x} + \frac{3}{x} + C$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$\boxed{x - \frac{y^2}{x} + \frac{3}{x} = C}$$

§ ОДУ 1-ого порядка не разрешенные относительно производной.

Пусть задано уравнение $F(x,y,y') = 0$ (*)

где $F(x,p,q) \in C(G)$, где $G \subset R^3$ и пусть в некоторой подобласти $\Omega \subset G$ уравнение (*) разрешимо относительно $y'$, то есть

$$y' = f_k(x,y),\ k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Пример $a_0(x,y)(y')^n + \dots + a_n(x,y) = 0$ (2)

и пусть уравнение (2) имеет $n$-корней

$$y'(x) = f_k(x,y),\ k = \overline{1,n}$$

и пусть для $\forall k$ задача Коши для уравнения $y' = f_k(x,y)$ имеет единственное решение, то есть справедлива ТСЕ.

Тогда для $\forall (x_0, y_0) \in G$ $\exists\ n$-решений, проходящие через точку $(x_0, y_0) \in G$.


: чтобы выделить единственное решение нужно задать $y_k'(x_0) = y_{k0}'$ : $F(x_0, y_0, y_0') = 0$

Теорема (ТСЕ решения задачи Коши для уравнения $F(x,y,y')=0$)

Пусть задано уравнение $F(x,y,y')=0$ (*) и функция $F(x,y,y')$: определена в замкнутом „прямоугольнике" $P_3 \subset R^3$ с центром в точке $(x_0,y_0,y_0')$ и $F(x,y,y')$ удовлетворяет условиям: 1) $F(x,p,q) \in C^1(P_3)$; 2) $F(x_0,y_0,y_0')=0$ 3) $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,y_0') \neq 0$, $(p=y')$. Тогда $\exists h>0$: в окрестности $|x-x_0|\le h$ $\exists!$ решение $y=y(x)$ уравнения (*), удовлетворяющее условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$

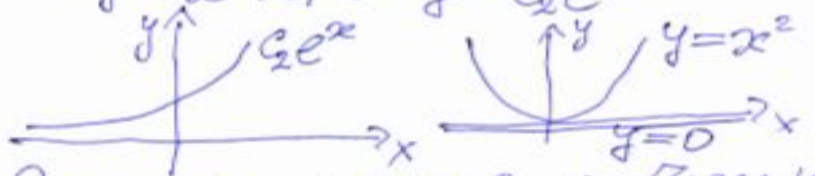
Замечание Если две различные интегральные кривые уравнения (*) проходят через точку $(x_0,y_0)$ имеют в этой точке одинаковую касательную, определяемую значением $y_0'$, то в этой точке нарушено условие единственности решения уравнения (*).

Док-во теоремы (Из 1) и 3) следует по теореме о неявной функции $\exists$ окрестность $D_2=\{(x,y): |x-x_0|\le h, |y-y_0|\le h\}$ и в этой окрестности $\exists!\ y' = f(x,y):\ y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, причём $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{-\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}}$ непрерывна в $D_2$. Следовательно, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ - ограничена. Тогда по ТСЕ для уравнения $y'=f(x,y)$ $\exists!$ решение $y(x) \Longrightarrow$ теорема доказана.

Пример $(y')^2-(2x+y)y'+2xy=0$

1) $y'=2x$ и $y'=y$. Таким образом, получаем, что через $\forall$ точку $(x_0,y_0)$ проходит два решения, по одному из $\forall$ семейства

$y=x^2+C_1$ и $y=C_2e^x$




Рассмотрим точку $(0,0)$. Через неё проходит решение $y=x^2$ при $C_1=0$ и $y=0$ при $C_2=0$. Заметим, что эти решения имеют общую касательную $y'=0$ в этой точке $x_0=0,\ y_0=0$. Следовательно, должно нарушаться условие ТСЕ для $F(x,y,y')=0$ в точке $(0,0)$.

Действительно, $\dfrac{\partial F(0,0,0)}{\partial y'}=0$.

Рассмотрим точку $(2;4)$. Через неё прохо-

дит два решения: $y=\left(\frac{4}{e^2}\right)e^x$ и $y=x^2$.
Касательные к этим кривым в точке $(2;4)$ совпадают ($y'=4$). Следовательно, нарушено условие ТСЕ для ⊛ $\frac{\partial F}{\partial y'}(2;4;4)=0$

§ Решение уравнения $F(x,y,y')=0$ методом введения параметра.

Предположим, что $F(x,y,y')=0$ разрешимо относительно $y(x)$, то есть

$$y=f(x,y') \quad (\text{или } x=g(y,y')) \qquad (1)$$

Введём параметр $y'=p$, тогда уравнение (1) примет вид: $y=f(x;p)$ (2)

Продифференцировав это равенство по $x$, получим: $y'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$. Так как $y'=p$, то

$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot p'$. То есть получили ОДУ 1-ого порядка относительно $p$. Пусть известно общее решение этого ОДУ, то есть

$p=\varphi(x,c)$. Тогда подставляя это в (2) получим $y=f(x,\varphi(x,c))$ — общее решение уравнения (1)

Замечание Уравнение $x=g(y;y')$ решается аналогично, $y'=p \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$

Пример $(y')^2-xy'+y=0$

Решение $y' = p \Rightarrow y = xy' - (y')^2 \Rightarrow$

$y = px - p^2$ (*)

Дифференцируя (*), получим

$$\cancel{p} = \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow (x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

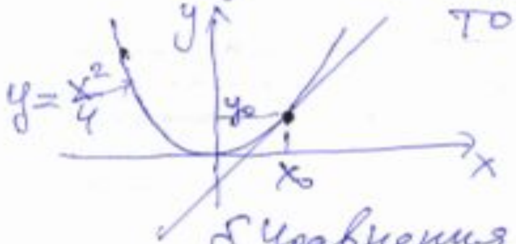
1) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$ (**) – общее решение

2) $x - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2}$. Подставляя в (*) получим $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$ – особое решение.

Заметим, что через $\forall (x_0, y_0)$, принадлежащую кривой $y = \frac{x^2}{4}$ проходит кривая семейства (**) при $= \frac{x_0}{2}$. То есть в $\forall$ точке $(x_0, y_0) \in y = \frac{x^2}{4}$ проходит два решения, то есть нарушено условие ТСЕ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}\Big|_{y = \frac{x^2}{4}} = 0$$

то есть $y = \frac{x^2}{4}$ – особое решение




§ Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнение $y = x\varphi(y') + f(y')$ – уравнение Лагранжа.

Пусть $y' = p \Longrightarrow y = x\,b(p) + f(p)$ (*)

$dy = b(p)dx + x b' dp + f'(p)dp \Longrightarrow$

$p dx = b(p)dx + x b' dp + f' dp \Longrightarrow$

$(p - b(p))\dfrac{dx}{dp} = x b' + f' \Longrightarrow$

1) $b(p) \neq p$ Тогда получим

$$\frac{dx}{dp} = \frac{b'}{p - b(p)} \cdot x + \frac{f'}{p - b(p)} \quad (**)$$

Это линейное относительно $x$ уравнение

Решая его найдём $x = \varphi(p, c)$. Тогда

$\begin{cases} x = \varphi(p, c) \\ y = b(p)\varphi(p, c) + f(p) \end{cases}$ ← общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде.

2) Пусть $\exists p_0 : b(p_0) = p_0$, но $b(p) \not\equiv p$.

Тогда $y = p_0 x + f(p_0)$ – есть решение уравнения Лагранжа.

<u>Действительно</u>, $p_0 x + f(p_0) = x b(p_0) + f(p_0)$

Так как $b(p_0) = p_0 \Longrightarrow p_0 x = p_0 x$ #.

3) Если $b(p) \equiv p$, то $y = xp + f(p)$ (A)

<u>Опр</u>) Уравнение $y = xy' + f(y')$ – уравнение Клеро.

Тогда из (A) получим

$\underset{\overset{\|}{p dx}}{dy} = x dp + p dx + f'(p)dp \Longrightarrow$

$[x + f']dp = 0$, 1) $dp = 0 \Longrightarrow p = C \Longrightarrow$

$y = Cx + f(C)$ — общее решение уравнения Клеро.

2) $x + f'(p) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f \end{cases}$ — особое решение уравнения Клеро.

Докажем, что оно является решением. Так как $y' = p \longrightarrow dy = p\,dx \longrightarrow$

$-f'(p)dp - pf''dp + f'dp = -pf''dp \Longrightarrow 0 = 0$ #

Рассмотрим ещё частный случай уравнения $F(x, y, y') = 0$, а именно уравнение вида $f(y, y') = 0$ (*)

Параметризуем это уравнение

$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$ — это параметрическое задание уравнения (*)

Это означает, что $f[\varphi(t), g(t)] = 0$ для $\forall\, t \in \langle \alpha ; \beta \rangle$.

Из (*) следует, что $\begin{cases} dy = \varphi'(t)dt \\ dy = g(t)d \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\varphi'(t)}{g(t)} \longrightarrow$

$\Longrightarrow x(t) = \int_{t_0}^{t} \dfrac{\varphi'(\tau)}{g(\tau)} d\tau + C$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = \int_{t_0}^{t} \dfrac{\varphi'(\tau)}{g(\tau)} d\tau + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ общее решение уравнения (*) в параметрическом виде

## § Общий случай

Пусть задано уравнение $F(x,y,y')=0$ (1)

Рассмотрим уравнение $F(x,y,p)=0$ (1')

Уравнение (1') определяет в $R^3$ поверхность и пусть известно её параметрическое представление:
$$\begin{cases} x=X(u,v) \\ y=Y(u,v), \text{ где } (u,v)\in\Omega\subset R^3 \\ p=P(u,v) \end{cases}$$

Так как $y'=p$, то $dy=p\,dx$, и поэтому
$$\frac{\partial Y}{\partial u}du+\frac{\partial Y}{\partial v}dv=p\frac{\partial X}{\partial u}du+p\frac{\partial X}{\partial v}dv \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{dv}{du}=\frac{P\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{\partial Y}{\partial u}}{\frac{\partial Y}{\partial v}-P\frac{\partial X}{\partial v}}}$$ – это ОДУ относительно $\frac{dv}{du}$.

Пусть известно общее решение этого уравнения $v=\varphi(u,c)$. Тогда
$$\begin{cases} x=X[u,\varphi(u,c)] \\ y=Y[u,\varphi(u,c)] \end{cases}$$ – есть общее решение уравнения (1) в параметрическом виде

## § Особые решения ОДУ 1-ого порядка

1) Для уравнения $y'=f(x,y)$ (*)

ТСЕ для этого уравнения: 1) если $f, \frac{\partial f}{\partial y}\in C(\Omega)$ и $\exists M>0: |f|+|\frac{\partial f}{\partial y}|\le M$, тогда для $\forall(x_0,y_0)\subset\Omega$ $\exists h>0$: на $[x_0-h, x_0+h]$ $\exists!$ решение $y(x)$ задачи Коши $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

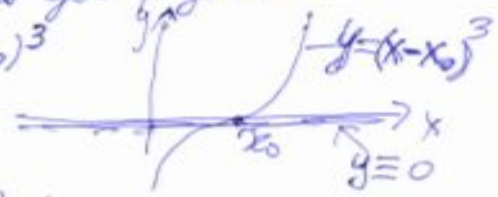
Замечание. Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы $f \in C(\Omega)$.
При этих условиях решение задачи Коши будет существовать, но оно не обязательно будет единственным.

Опр) Особым решением уравнения (*) называется такое решение $\varphi(x)$, через $\forall$ точку которого проходит по крайней мере два различных решения $\varphi$ и $\psi$ причём $\varphi \not\equiv \psi$ ни в какой окрестности этой точки.

Особое решение уравнения (*) следует искать там, где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$

Замечание. Это необходимое, но не достаточное условие.

Пример 1) $y' = 3y^{2/3} \Longrightarrow y = (x+c)^3$ и $y \equiv 0$
через $\forall$ точку $(x_0, 0)$ проходит два различных решения $y \equiv 0$ и $\tilde{y} = (x - x_0)^3$
причём $y'(x_0) = 0 = \tilde{y}'(x_0) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow y \equiv 0$ — особое решение




2) $y' = 3y^{2/3} + 1$; $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{2}{y^{1/3}}\right|_{y=0} = \infty$

но $y \equiv 0$ не является особым решением, так как $y \equiv 0$ не является решением уравнения.

Правило нахождения особого решения для уравнения $y' = f(x,y)$

1) Вычисляем $\frac{\partial f}{\partial y}$ и находим множество где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$

2) Каждую ветвь множества $\{\frac{\partial f}{\partial y} = \infty\}$ проверяем является ли она решением уравнения $y' = f(x, y)$, 3) проверяем является оно особым решением или нет.