

Лекция. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей
математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ лекция 9 сентября 2020 года

В конце прошлой лекции мы поставили задачу: Как найти интегрирующий множитель?

Для нахождения $\mu(x, y)$ должно выполняться

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Разделим на $\mu(x, y)$. Тогда получим

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} P + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{или}$$

$$\boxed{P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad (*)$$

1-ый случай Будем искать $\mu = \mu(x)$, то есть $\mu(x)$ не зависит от y (зависит только от x)

$$\text{Тогда } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{d \ln(\mu)}{dx} \cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x, y)}$$

Тогда если правая часть этого равенства не зависит от y , то существует интегрирующий множитель зависящий от x .

2-ой случай Будем искать $\mu = \mu(y)$ (то есть зависит только от y). Тогда из $(*)$ получим

$$P \frac{d \ln \mu}{dy} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P(x, y)}$$

Если правая часть этого равенства не зависит от x , то существует интегрирующий множитель $\mu(y)$.

- 2 -

3-й случай будем искать $\mu(x, y) = \mu[t(x, y)]$, где t — функция известна, например, $t = x^2 + y^2$, $t = xy, \dots$. Из (*) тогда получим

$$\frac{d\ln \mu}{dt} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P \cdot t_y - Q \cdot t_x}$$

Если правая часть этого выражения является функцией только от t , то существует интегрирующий множитель $\mu(t)$.

Пример $(x^2 + y^2 - 3)dx - 2xy dy = 0$ (A)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Умножим уравнение (A) на $\mu(x)$, получим.

$$\underbrace{\mu(x)(x^2 + y^2 - 3)}_{P_1(x, y)} dx - \underbrace{\mu(x)(2xy)}_{Q_1(x, y)} dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \Rightarrow \mu(x) \cdot 2y = -2xy \cdot \mu' - 2y \cdot \mu \Rightarrow$$

$4\mu(x)y = -2xy \cdot \mu'$. Разделим это равенство

на $2y$, ($y \neq 0$). Тогда получим

$$\mu'(x) = -\frac{2\mu}{x} \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu} = -\frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{d\ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x} \quad (\text{правая часть не зависит от } y)$$

$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x^2}$ — интегрирующий множитель.

Умножим уравнение (A) на $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\text{Тогда получим } \left(1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

Тогда $\frac{\partial U}{\partial x} = 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2} \Rightarrow U = \int (1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}) dx + \varphi(y)$

$$\Rightarrow U(x, y) = x - \frac{y^2}{2x} + \frac{3}{x} + \varphi(y)$$

$$Q_1(x, y) = -\frac{2y}{x} = -\frac{2y}{x} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi(y) = C \Rightarrow U(x, y) = x - \frac{y^2}{2x} + \frac{3}{x} + C$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$\boxed{x - \frac{y^2}{2x} + \frac{3}{x} = C}$$

В ОДУ 1-ого порядка не разрешенные относительно производной.

Пусть задано уравнение $F(x, y, y') = 0$ (*)
 где $F(x, p, q) \in C(G)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и пусть
 в некоторой подобласти $\Omega \subset G$ уравнение (*)
 разрешимо относительно y' , то есть

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Пример $a_0(x, y)(y')^n + \dots + a_n(x, y) = 0$ (2)

и пусть уравнение (2) имеет n -корней

$$y'(x) = f_k(x, y), \quad k = \overline{1, n}$$

и пусть для $\forall k$ задана Коши для
 уравнения $y' = f_k(x, y)$ имеет единствен-
 ное решение, то есть справедлива ТСЕ.

Тогда для $\forall (x_0, y_0) \in G$ $\exists n$ -решений,

проходящие через точку $(x_0, y_0) \in B$.



• тогда всегда
единственное решение
можно задать

$$y'_k(x_0) = y'_{k0} : F(x_0, y_0, y'_k) = 0$$

Теорема (ТЦЕ решения задачи Коши для
уравнения $F(x, y, y') = 0$)

Пусть задано уравнение $F(x, y, y') = 0$ (*)
и функция $F(x, y, y')$: определена в замкну-
том "прямоугольнике" $P_3 \subset \mathbb{R}^3$ с центром в
точке (x_0, y_0, y'_0) и $F(x, y, y')$ удовлетворяет
условиям: 1) $F(x, y, y') \in C^2(P_3)$; 2) $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$
3) $\frac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y} \neq 0$, ($P = y'$). Тогда $\exists h > 0$:
в окрестности $|x - x_0| \leq h$ $\exists!$ решение
 $y = y(x)$ уравнения (*), удовлетворяющее
условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$

Замечание Если две различные интегральные
кривые уравнения (*) проходят через точку
 (x_0, y_0) и имеют в этой точке одинаковую
касательную, определяемую значением y'_0 , то
в этой точке нарушено условие единствен-
ности решения уравнения (*).

Док-во теоремы Из 1) и 3) следует по Тео-
реме о неявной функции \exists окрестность

$$D_2 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq h\} \text{ и в}$$

-5-

в этой окрестности $\exists!$ $y' = f(x, y) : y(x_0) = y_0$,
 $y'(x_0) = y'_0$, при этом $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}}{\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}}$ непре-

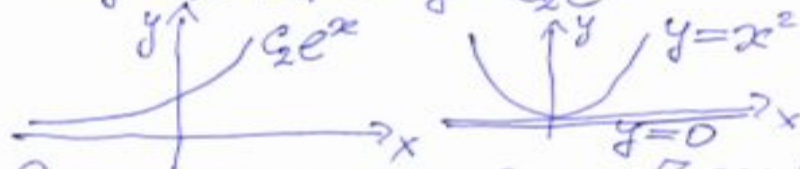
равна в D_2 . Следовательно, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ - ограничен.

Тогда по ТСЕ для уравнения $y' = f(x, y) \exists!$ решение $y(x) \Rightarrow$ Теорема доказана.

Пример $(y')^2 - (2x+y)y' + 2xy = 0$

1) $y' = 2x$ и $y' = y$. Сделаем образ, напомним, что через \forall точку (x_0, y_0) проходят два решения, но одному из \forall семейства

$$y = x^2 + C_1 \text{ и } y = C_2 e^x$$



Рассмотрим точку $(0, 0)$. Через неё проходят решение $y = x^2$ при $C_1 = 0$ и $y = 0$ при $C_2 = 0$. Заметим, что эти решения имеют общую касательную $y' = 0$ в этой точке $x_0 = 0, y_0 = 0$. Следовательно, должно нарушаться условие ТСЕ для $F(x, y, y') = 0$ в точке $(0, 0)$.

Действительно, $\frac{\partial F(0, 0, 0)}{\partial y'} = 0$.

Рассмотрим точку $(2, 4)$. Через неё прохо-

где два решения: $y = \left(\frac{4}{e^2}\right)e^{2x}$ и $y = x^2$.
Касательные к этим кривым в точке $(2; 4)$
совпадают ($y' = 4$). Следовательно, нарушено
условие ТЦЕ для $(*) \frac{\partial F(2; 4; 4)}{\partial y'} = 0$

Решите уравнения $F(x, y, y') = 0$
методом введения параметра.

Предположим, что $F(x, y, y') = 0$ разрешимо
относительно $y(x)$, то есть

$$y = f(x, y') \text{ (или } x = g(y, y') \text{)} \quad (1)$$

Введем параметр $y' = p$, тогда уравнение (1)
примет вид: $y = f(x, p) \quad (2)$

Продифференцировав это равенство по x ,
получим: $y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$. Так как $y' = p$, то

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot p'. \text{ То есть получим ОДУ}$$

1-ого порядка относительно p . Пусть
известно общее решение этого ОДУ, то есть

$$p = \varphi(x, c). \text{ Тогда подставив это в (2)}$$

получим $y = f(x, \varphi(x, c))$ — общее решение
уравнения (1)

Замечание Уравнение $x = g(y, y')$ решается
аналогично, $y' = p \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$

Пример $(y')^2 - xy' + y = 0$

Решение $y' = p \Rightarrow y = xy' - (y')^2 \Rightarrow$
 $y = px - p^2$ (*)

Дифференцируя (*), найдем

$$p = p + x \frac{dp}{dx} - 2p \frac{dp}{dx} \Rightarrow (x - 2p) \frac{dp}{dx} = 0$$

1) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$ (***) - общее решение

2) $x - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2}$. Подставив в (*) найдем $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$ - особое решение.

Заметим, что через $\forall (x_0, y_0)$, принадлежащую кривой $y = \frac{x^2}{4}$ проходит кривая семейства (***) при $x = \frac{x_0}{2}$. То есть в \forall точке

$(x_0, y_0) \in y = \frac{x^2}{4}$ проходит два решения, то есть нарушено условие ТСЕ \Rightarrow

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \Big|_{y = \frac{x^2}{4}} = 0$$

то есть $y = \frac{x^2}{4}$ - особое решение



Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнение $y = xv(y') + f(y')$ - уравнение Лагранжа.

Пусть $y' = p \Rightarrow y = x v(p) + f(p) \quad (*)$

$dy = v(p)dx + x v'(p)dp + f'(p)dp \Rightarrow$

$p dx = v(p)dx + x v'(p)dp + f'(p)dp \Rightarrow$

$(p - v(p)) \frac{dx}{dp} = x v' + f' \Rightarrow$

1) $v(p) \neq p$ Тогда получим

$\frac{dx}{dp} = \frac{v'}{p - v(p)} \cdot x + \frac{f'}{p - v(p)} \quad (**)$

Это линейное относительно x уравнение

Решая его найдем $x = P(p, c)$. Тогда

$$\begin{cases} x = P(p, c) \\ y = v(p)P(p, c) + f(p) \end{cases}$$
 ← общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде.

2) Пусть $\exists p_0 : v(p_0) = p_0$, но $v(p) \neq p$.

Тогда $y = p_0 x + f(p_0)$ — есть решение уравнения Лагранжа.

Действительно, $p_0 x + f(p_0) = x v(p_0) + f(p_0)$

Так как $v(p_0) = p_0 \Rightarrow p_0 x = p_0 x \neq$

3) Если $v(p) \equiv p$, то $y = xp + f(p) \quad (***)$

Опр) уравнение $y = xy' + f(y')$ — уравнение Клеро.

Тогда из (***) получим

$dy = x dp + p dx + f'(p) dp \Rightarrow$

" $p dx$

$[x + f'] dp = 0, \quad 1) dp = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow$

-9-

$y = Cx + f(C)$ - общее решение уравнения Клеро.

$$2) x + f'(p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -pf'(p) + f \end{cases} \text{ - особое решение уравнения Клеро.}$$

Докажем, что оно является решением. Так как $y' = p \rightarrow dy = p dx \rightarrow -f'(p) dp - pf'' dp + f' dp = -pf'' dp \Rightarrow 0 = 0$ #

Рассмотрим ещё вариант случая уравнения $F(x, y, y') = 0$, а именно уравнение вида $f(y, y') = 0$ *

Параметризуем это уравнение

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = g(t) \end{cases} \text{ - это параметрическое задание уравнения *}$$

Это означает, что $f[\varphi(t), g(t)] = 0$ для $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Из * следует, что $\begin{cases} dy = \varphi'(t) dt \\ dy = g(t) dt \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{g(t)} \rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(\tau)}{g(\tau)} d\tau + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(\tau)}{g(\tau)} d\tau + C \\ y = \varphi(t) \end{cases} \text{ - общее решение уравнения * в параметрической форме}$$

§ Общият случай

Пусть задано уравнение $F(x, y, y') = 0$ (1)

Рассмотрим уравнение $F(x, y, p) = 0$ (1')

Уравнение (1') определяет в R^3 поверхность и пусть известно ее параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), \text{ где } (u, v) \in \Omega \subset R^3 \\ p = P(u, v) \end{cases}$$

Так как $y' = p$, то $dy = p dx$, и поставим

$$\frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} dv = p \frac{\partial X}{\partial u} du + p \frac{\partial X}{\partial v} dv \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dv}{du} = \frac{P \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial u}}{\frac{\partial Y}{\partial v} - P \frac{\partial X}{\partial v}}} - \text{это ОДУ относительно } \frac{dv}{du}.$$

Пусть известно общее решение этого уравнения $v = P(u, c)$. Тогда

$$\begin{cases} x = X[u, P(u, c)] \\ y = Y[u, P(u, c)] \end{cases} - \text{это общее решение уравнения (1) в параметрической форме.}$$

§ Особые решения ОДУ 1-ого порядка

1) Для уравнения $y' = f(x, y)$ (*)
Тогда для этого уравнения 1) если $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Omega)$

и $\exists M > 0: |f| + |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq M$, тогда для $\forall (x_0, y_0) \in \Omega$
 $\exists h > 0: \text{ на } [x_0 - h, x_0 + h] \exists!$ решение $y(x)$

$$\text{задаем коши } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- 11 -

Замечание Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы $f \in C(\Omega)$.

При этих условиях решение задачи Коши будет существовать, но оно не обязательно будет единственным.

Опр] Особым решением уравнения (*) называется такое решение $\varphi(x)$, через \forall точку которого проходит по крайней мере два различных решения φ и ψ кривой $\varphi \neq \psi$ ни в какой окрестности этой точки.

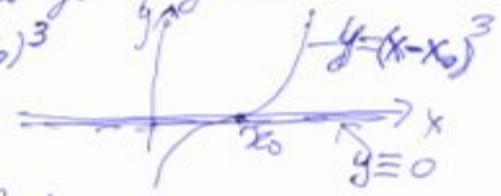
Особое решение уравнения (*) следует искать там, где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$

Замечание Это необходимое, но не достаточное условие.

Пример 1) $y' = 3y^{2/3} \Rightarrow y = (x+c)^3$ и $y \equiv 0$

Через \forall точку $(x_0, 0)$ проходит два различных решения $y \equiv 0$ и $\tilde{y} = (x-x_0)^3$

Кривая $y'(x_0) = 0 = \tilde{y}'(x_0) \Rightarrow$
 $\rightarrow y \equiv 0$ - особое решение



2) $y' = 3y^{2/3} + 1$; $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{2}{y^{1/3}} \Big|_{y=0} = \infty$

но $y \equiv 0$ не является особым решением, так как $y \equiv 0$ не является решением уравнения.

Правило нахождения особого решения для уравнения $y' = f(x, y)$

- 12-
- 1) Вычислим $\frac{\partial f}{\partial y}$ и найдем множество где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$
 - 2) Каждую ветвь множества $\{\frac{\partial f}{\partial y} = \infty\}$ проверим является ли она решением уравнения $y' = f(x, y)$, 3) проверим является оно особым решением или нет.