Теоретические аспекты математического анализа

1. Последовательности

Последовательность – функция натурального аргумента

$$x_n = f(n), n \in N$$

Число A называется пределом последовательности, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) \in N : n > K(\varepsilon) \mid x_n - A \mid < \varepsilon$$

Если последовательность имеет предел, она называется Сходящейся последовательностью.

Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) : n > K(\varepsilon), \forall p \in N \mid x_{n+p} - x_n \mid < \varepsilon$$

Критерий Коши.

Последовательность является сходящейся тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Свойства сходящих последовательностей.

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. Предел сходящейся последовательности единственен.
3. Сходящаяся последовательность ограничена.

4. Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. (Теорема Больцано-Вейерштрасса)

Функции. Предел функции.

Непрерывные функции.

Определение.

Число А называется пределом f(x) при $x \to a$, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

Число А называется пределом f(x) при $x \to a$, если

$\forall \{x_n\}: x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A, \ n \to \infty$

Предел функции на бесконечности равен A, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ |x| > R \Rightarrow |f(x) - A| \le \varepsilon$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

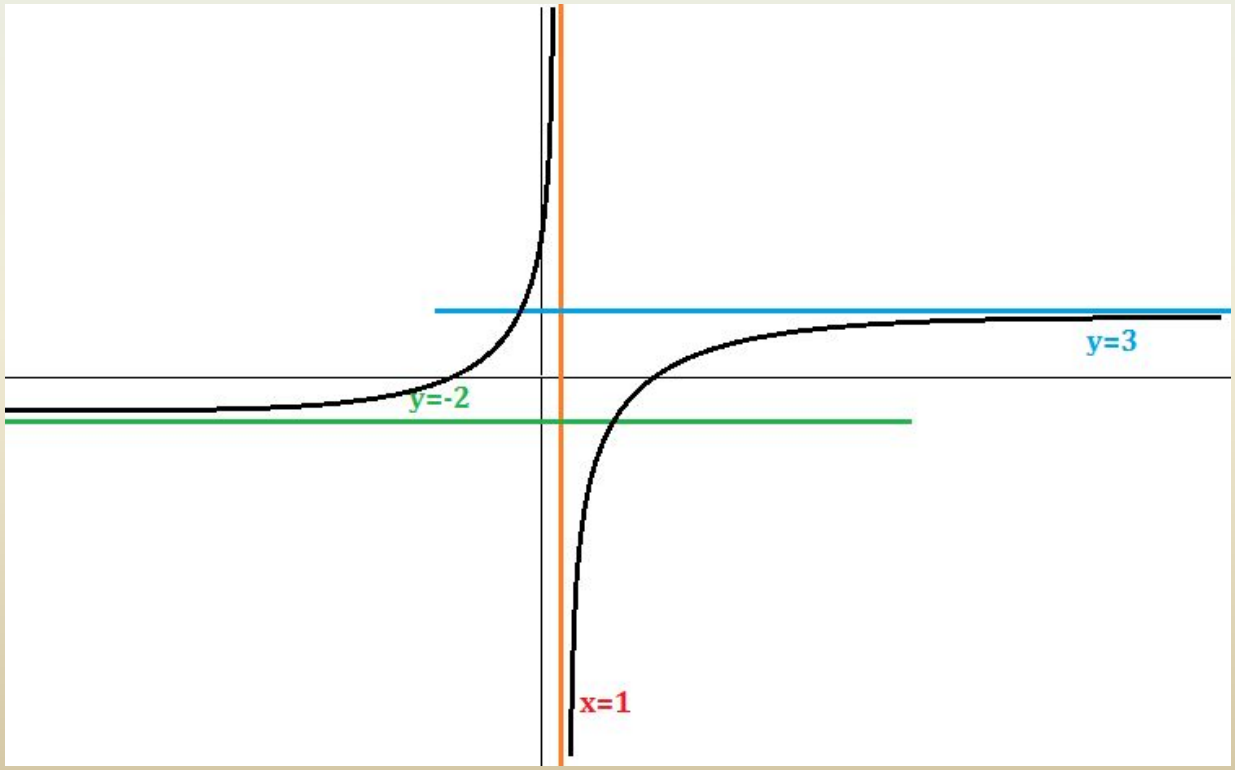
Приближенно изобразить график функции $f(x)$, *если*:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = -\infty \ (x = 1 - \text{точка разрыва 2 рода})$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$$

Вертикальная асимптота $x = 1$

Горизонтальные асимптоты: $y = -2; \ y = 3;$



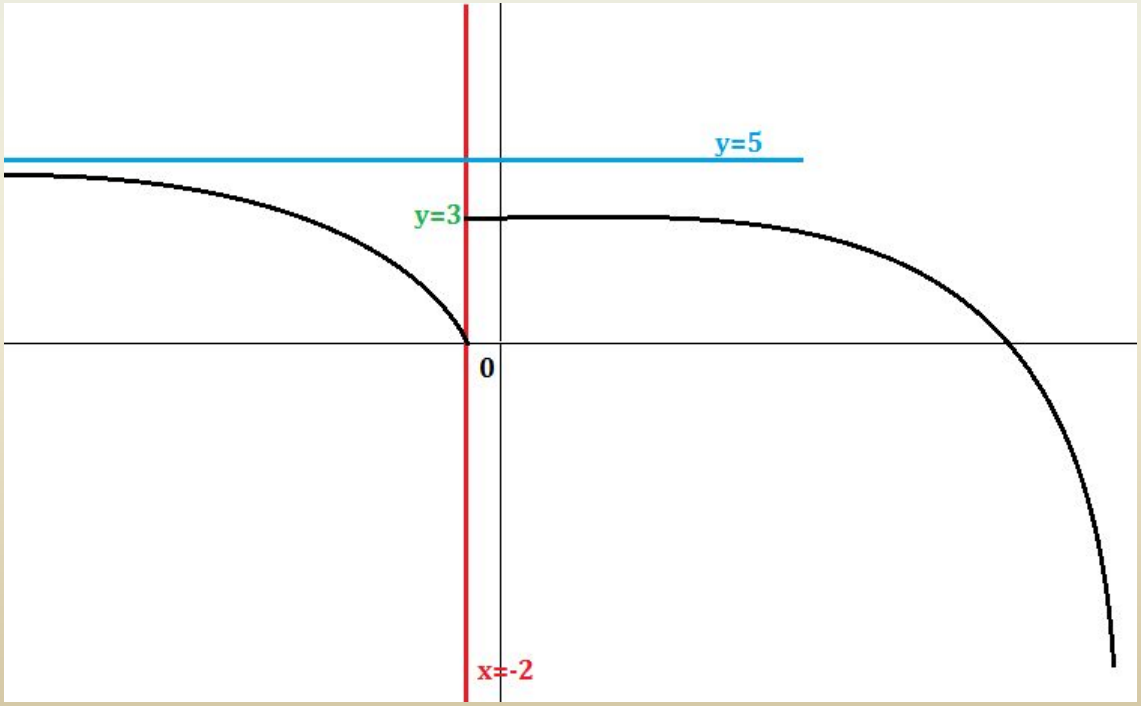
Приближенно изобразить график функции $f(x)$, *если*:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x)=0;\quad \lim_{x\to -2+0} f(x)=3\ \left(x=-2-\text{точка разрыва 1 рода}\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=5;\quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

Вертикальных асимптот нет

Горизонтальные асимптоты: $y=5$;

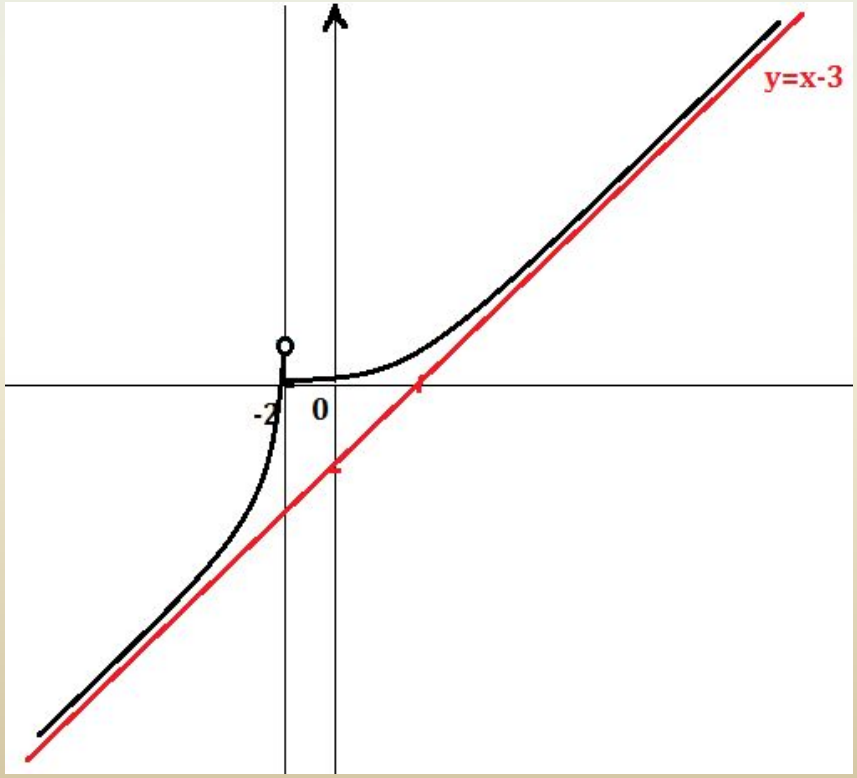


Приближенно изобразить график функции $f(x)$, *если*:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x) = 2; \quad \lim_{x\to -2+0} f(x) = 0 \ (x = -2 - \text{точка разрыва 1 рода})$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

есть наклонная асимптота $y = x - 3$;



Формула Тейлора.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0);$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

1) $\alpha(x)$ – *бесконечно малая при* $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

Сввойств бесконечно малых:

1. *Сумма бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция*

2. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет предел* A *при* $x \to a$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$

Пример: $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x}$, $x \to \infty \Leftrightarrow f(x) = -2 + \alpha(x)$:

$$f(x) = \frac{2x+3}{5-x} = -\frac{2(x-5+5)+3}{x-5} = -\frac{2(x-5)+13}{x-5} = -\frac{2(x-5)}{x-5} - \frac{13}{x-5} = -2 - \frac{13}{x-5};$$

3. *Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая.*

$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$; $|g(x)| < M$, *при* $x \to a$.

Следствие.

а. Произведение $2 - x$ *б / к малых есть б / к малая.*

б. Произведение б / к малой на const есть б / к малая.

Функция $f(x)$ *называется бесконечно большой при* $x \to a$, *если*

$$\forall R > 0\ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > R$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Сввяз б / к большой функции и б / к малой.

$f(x)$ *является б / к малой* $\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ – *б / к большая функция.*