# Теоретические аспекты математического анализа

# 1. Последовательности

*Последовательность – функция натурального аргумента*

$x_n = f(n), n \in N$

*Число А называется пределом последовательности, если*

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) \in N : n > K(\varepsilon) \ | x_n - A | < \varepsilon$

Если последовательность имеет предел, она называется
Сходящейся последовательностью.

*Последовательность называется фундаментальной, если*

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) : n > K(\varepsilon), \forall p \in N \ | x_{n+p} - x_n | < \varepsilon$

*Критерий Коши.*

*Последовательность является сходящейся тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.*

Свойства сходящих последовательностей.

1. Сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. Предел сходящейся последовательности единственен.
3. Сходящаяся последовательность ограничена.

4. Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. (Теорема Больцано-Вейерштрасса)

Функции. Предел функции. Непрерывные функции.

**Определение.**

Число А называется пределом f(x) при $x \to a$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

Число А называется пределом f(x) при $x \to a$, если

$\forall \{x_n\}: x_n \to a \ \Rightarrow \ f(x_n) \to A, \ n \to \infty$

*Предел функции на бесконечности равен* $A$, *если*

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ |x| > R \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

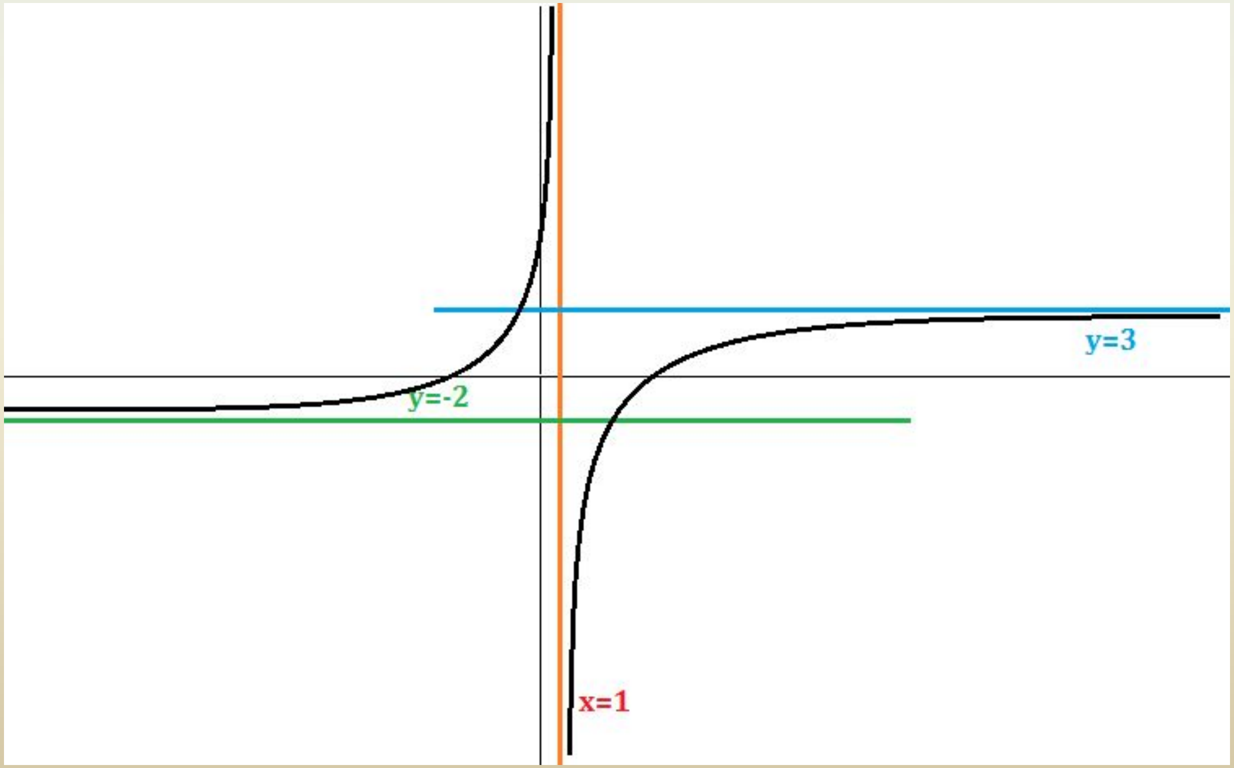
*Приближенно изобразить график функции* $f(x)$, *если*:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = -\infty \ (x = 1 - \text{точка разрыва 2 рода})$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$$

*Вертикальная асимптота* $x = 1$

*Горизонтальные асимптоты*: $y = -2$; $y = 3$;



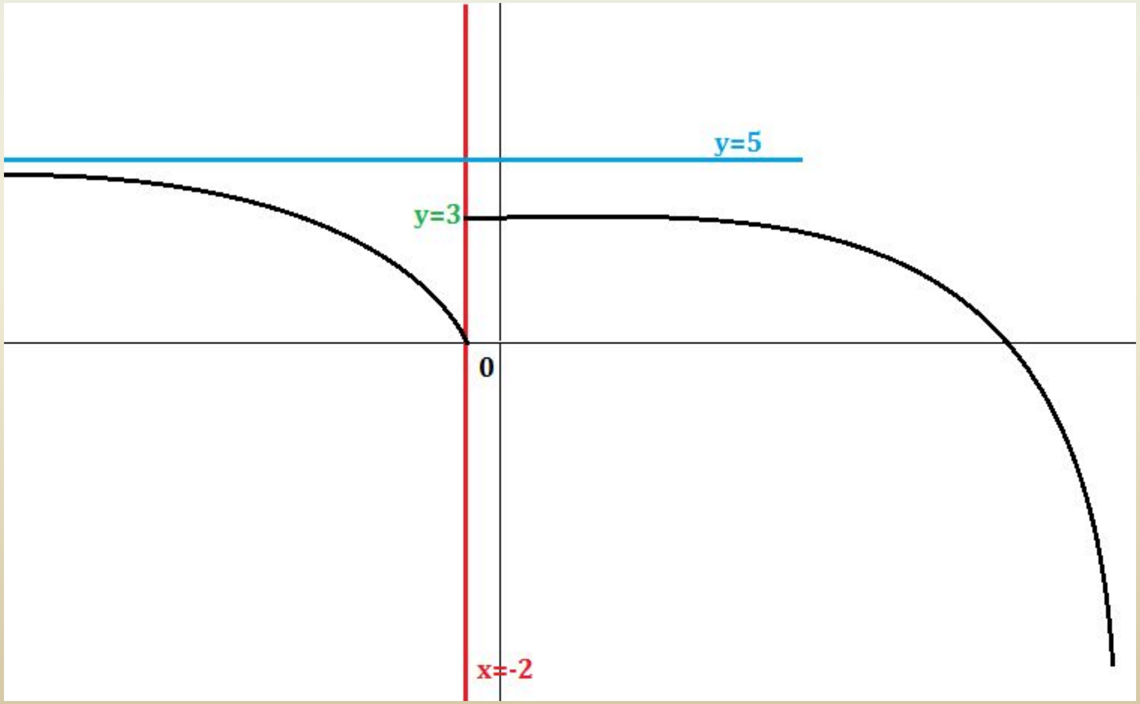
Приближенно изобразить график функции $f(x)$, если:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to -2+0} f(x) = 3 \ (x = -2 - \text{точка разрыва 1 рода})$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 5; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

Вертикальных асимптот нет

Горизонтальные асимптоты: $y = 5$;

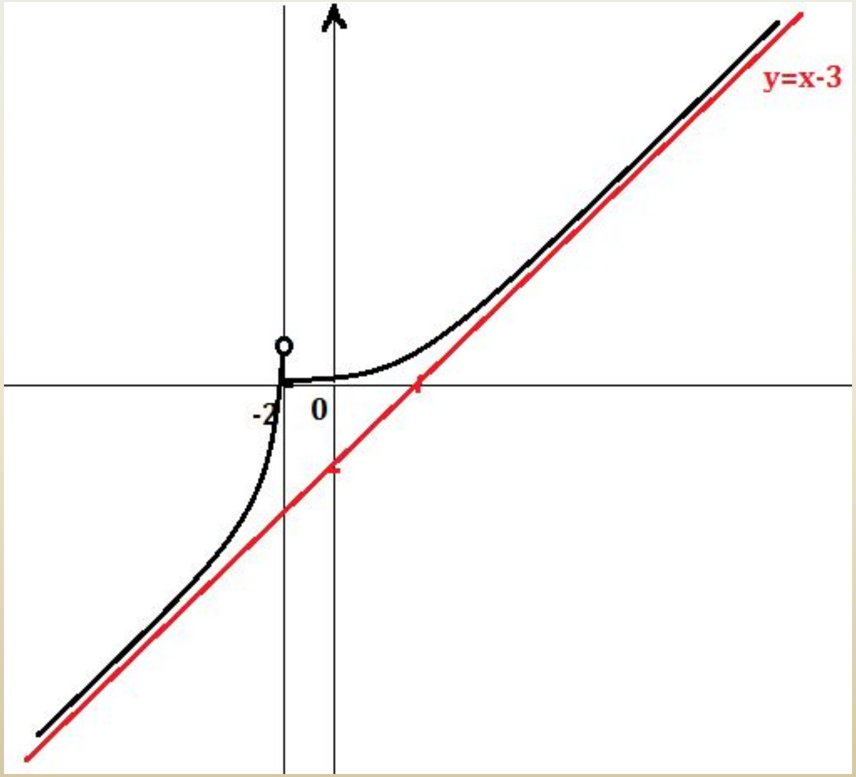


*Приближенно изобразить график функции* $f(x)$, *если*:

$\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = 2;\quad \lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = 0$ ($x = -2$ — *точка разрыва* 1 *рода*)

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

*есть наклонная асимптота* $y = x - 3$;



*Формула Тейлора.*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0);$$

*Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*

1) $\alpha(x)$ – *бесконечно малая при* $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

*Сввойств бесконечно малых*:

1. *Сумма бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция*

2. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет предел* $A$ *при* $x \to a$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$

*Пример*: $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x},\ x \to \infty \Leftrightarrow f(x) = -2 + \alpha(x)$:

$$f(x) = \frac{2x+3}{5-x} = -\frac{2(x-5+5)+3}{x-5} = -\frac{2(x-5)+13}{x-5} = -\frac{2(x-5)}{x-5} - \frac{13}{x-5} = -2 - \frac{13}{x-5};$$

3. *Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая.*

$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\ |g(x)| < M,$ *при* $x \to a$.

*Следствие.*

*а. Произведение* $2 - x$ *б / к малых есть б / к малая.*

*б. Произведение б / к малой на const есть б / к малая.*

*Функция* $f(x)$ *называется бесконечно большой при* $x \to a$, *если*

$$\forall R > 0\ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > R$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

*Свяяз б/к большой функции и б/к малой.*

$f(x)$ *является б/к малой* $\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ *– б/к большая функция.*