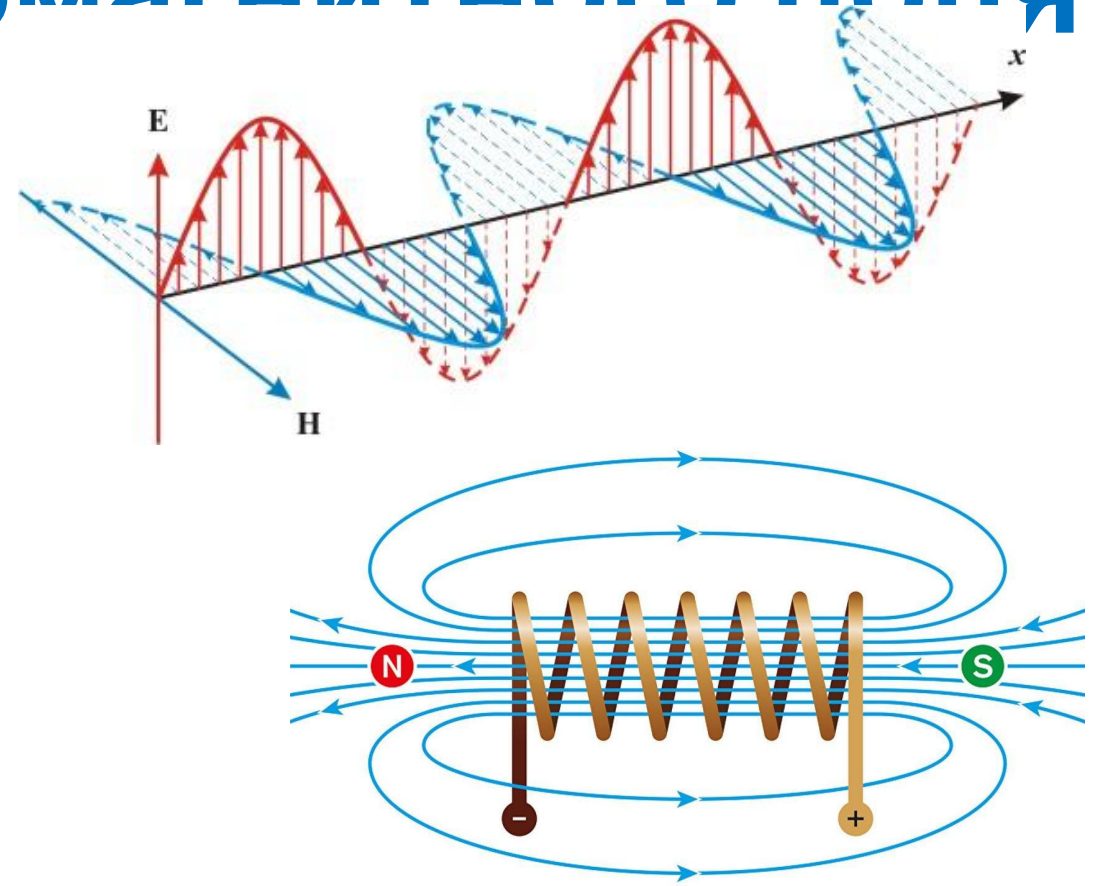


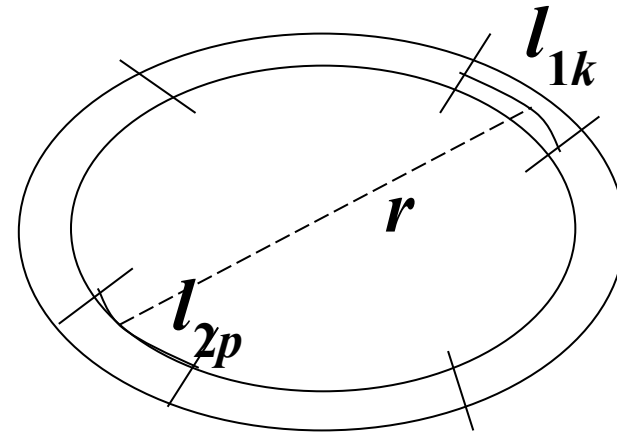
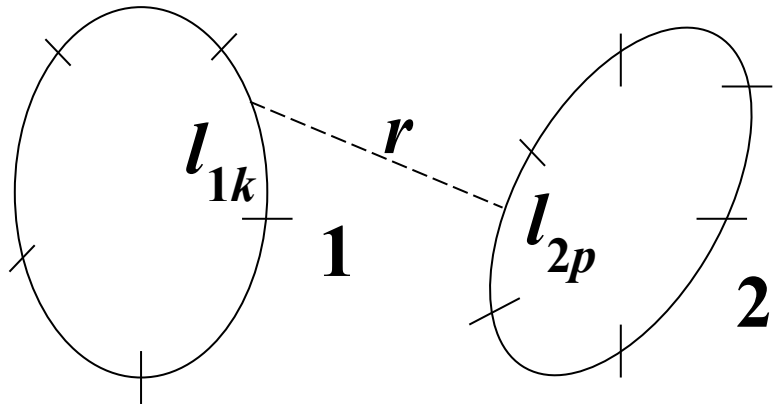
# Теоретические основы электротехники

## Теория электромагнитного поля



# Метод участков

Если разбить тонкие контуры на отдельные участки, то взаимную индуктивность между тонкими контурами можно записать в виде суммы интегралов по участкам:



$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r}$$

$$M_{12} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r}$$

Выражение, полученное под знаком двойной суммы, можно считать взаимной индуктивностью между двумя отрезками контуров:

$$M_{1k,2p} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r} \quad M_{12} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^m M_{1k,2p}$$

Аналогично для вычисления индуктивности, учитывая, что  $m = n$  и проводя интегрирование один раз по оси, а другой по внутреннему контуру, можем записать:

$$L = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r} + L_{\text{внутр}}$$

Если сравнить формулы для участков, полученные для определения взаимных индуктивностей  $M_{kp}$  и формулы для взаимных потенциальных коэффициентов, полученные по методу средних потенциалов, то можно заметить их сходство:

$$M_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_{1k}} \int_{l_{2p}} \frac{dl_1 dl_2}{r} \quad \alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon l_1 l_2} \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r} \quad dl_1 dl_2 = dl_1 dl_2 \cdot \cos\theta$$

# Индуктивность контуров, составленных из прямолинейных отрезков

Если отрезки прямолинейны, то  $\cos\theta$  может быть вынесен за знак интеграла, так как на всем интервале интегрирования угол  $\theta$  между прямолинейными отрезками остается постоянным. В этом случае выражение для взаимной индуктивности между двумя прямолинейными отрезками принимает вид:

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos\theta \int_{l_1} \int_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r} \quad \frac{M_{kp}}{\alpha_{kp}} = \mu_0 \varepsilon \cdot l_1 l_2 \cos\theta$$

Для собственной **внешней индуктивности прямолинейного отрезка**, учитывая, что  $\theta = 0$  и  $\cos\theta = 1$ , можем записать:

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_1} \int_{l_1'} \frac{dl \cdot dl'}{r} \quad \alpha_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot l_1^2} \int_{l_1} \int_{l_1'} \frac{dl \cdot dl'}{r} \quad \frac{L_{11}}{\alpha_{11}} = \mu_0 \varepsilon \cdot l^2$$

Выражения для потенциальных коэффициентов, полученные по методу средних потенциалов, не позволяют обеспечить достаточно высокую точность из-за необоснованного предположения о равномерном распределении заряда вдоль отрезков проводников ( $\tau = \text{const}$ ). Однако, аналогичные **выражения для расчета индуктивностей по методу участков абсолютно точны**, так как ток в проводнике во всех его сечениях одинаков ( $i = \text{const}$ ).

# Индуктивности систем параллельных проводов

В системе параллельных проводов с токами поле имеет плоскопараллельный характер, векторный потенциал, как и плотность тока, имеет **единственную составляющую, направленную вдоль оси z**.

Разность векторных магнитных потенциалов на разных сторонах рамки, удаленных на расстояния  $a$  и  $b$  от провода, мы получили в виде:

$$A_1 - A_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\ln b - \ln a) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

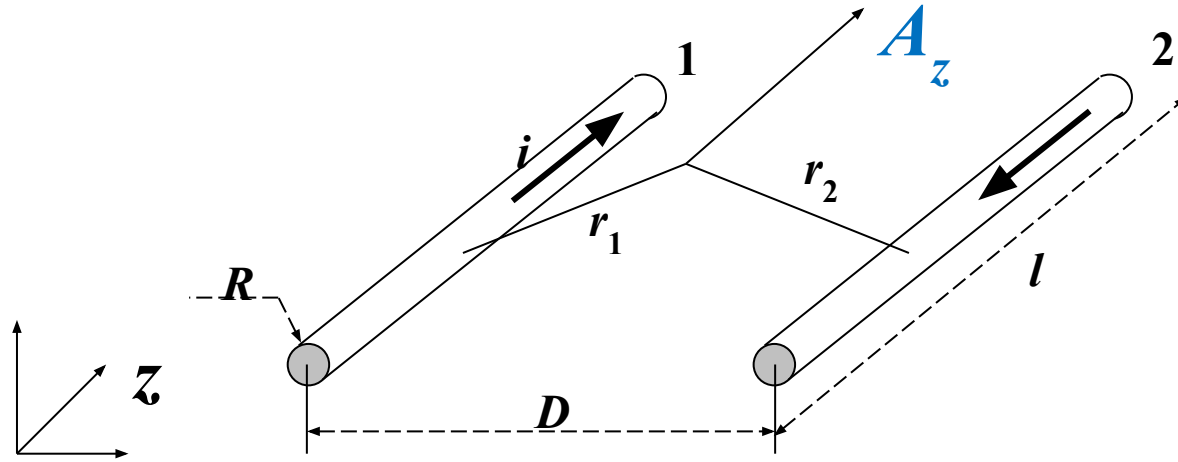
По аналогии векторный магнитный потенциал в системе проводов с токами можем записать:

$$A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{k=1}^n i_k \ln r_k$$

где  $r_k$  – расстояние от рассматриваемой точки до соответствующего провода

# Двухпроводная линия с прямым и обратным током

Определим **внешнее потокосцепление** и внешнюю индуктивность участка линии длиной  $l$ , используя контур, расположенный на ближних друг к другу поверхностях проводов.



В произвольной точке около двухпроводной линии векторный магнитный потенциал равен  $A_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$

Тогда векторные потенциалы на внутренних поверхностях первого и второго провода имеют вид

$$A_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{D}{R} > 0 \quad A_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{R}{D} < 0$$

**Внешний магнитный поток** и **внешняя индуктивность** двухпроводной линии равны соответственно

$$\Phi_{\text{внешн}} = (A_1 - A_2) \cdot l = \frac{\mu_0 i \cdot l}{\pi} \ln \frac{D}{R} \quad L_{\text{внешн}} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D}{R}$$

**Внутренняя индуктивность** этой линии определяется магнитным потоком внутри прямого и обратного провода (общая длина  $2l$  )

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 2l}{8\pi} = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

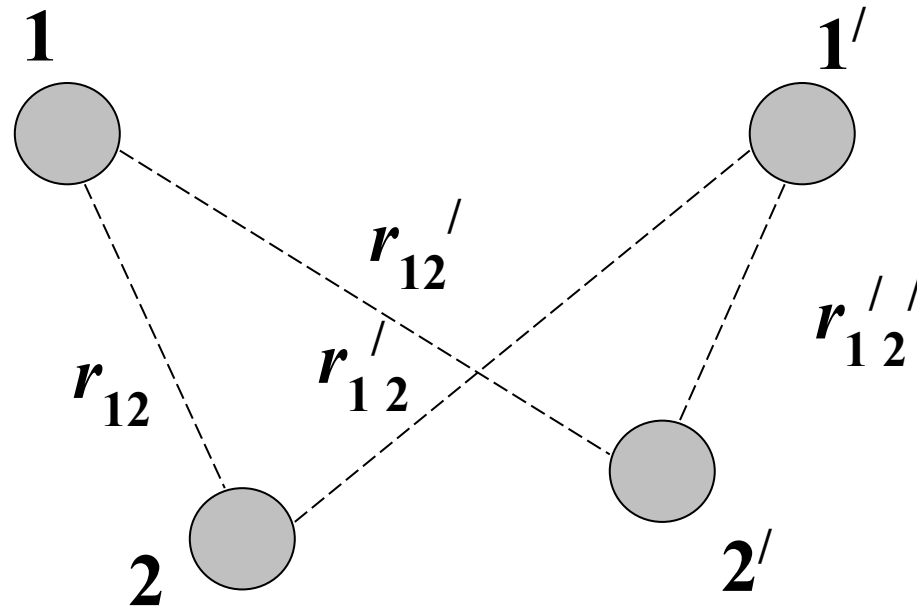
Окончательно **индуктивность двухпроводной линии** равна

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left( \ln \frac{D}{R} + \frac{1}{4} \right)$$

В реальных линиях расстояние между проводами превышает радиус провода примерно в 1000 раз, тогда

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} (7 + 0,25)$$

# Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями.



Зададимся током в первой линии и определим векторный магнитный потенциал на осях проводов второй линии:

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln \frac{r_{1/2}}{r_{12}} \qquad A_{2'} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln \frac{r_{1/2'}}{r_{12'}}$$



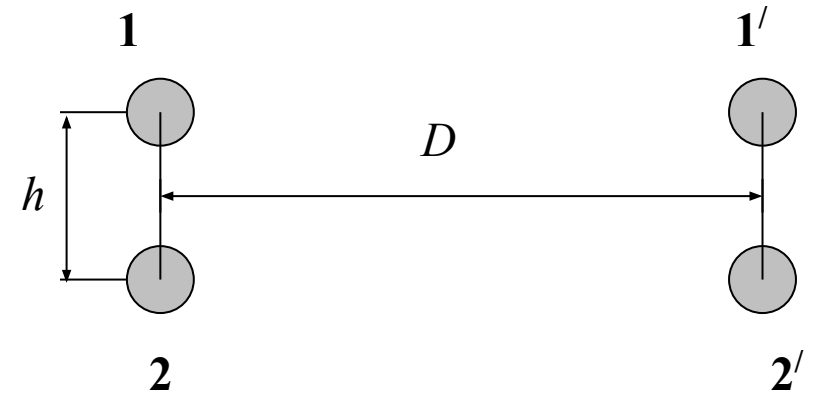
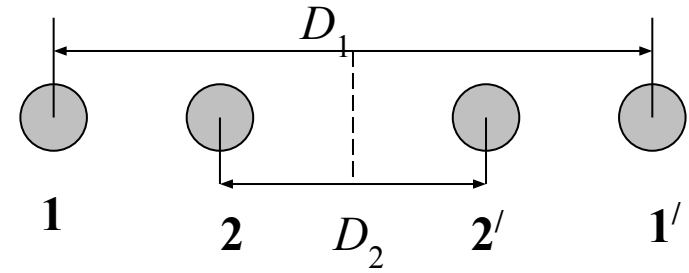
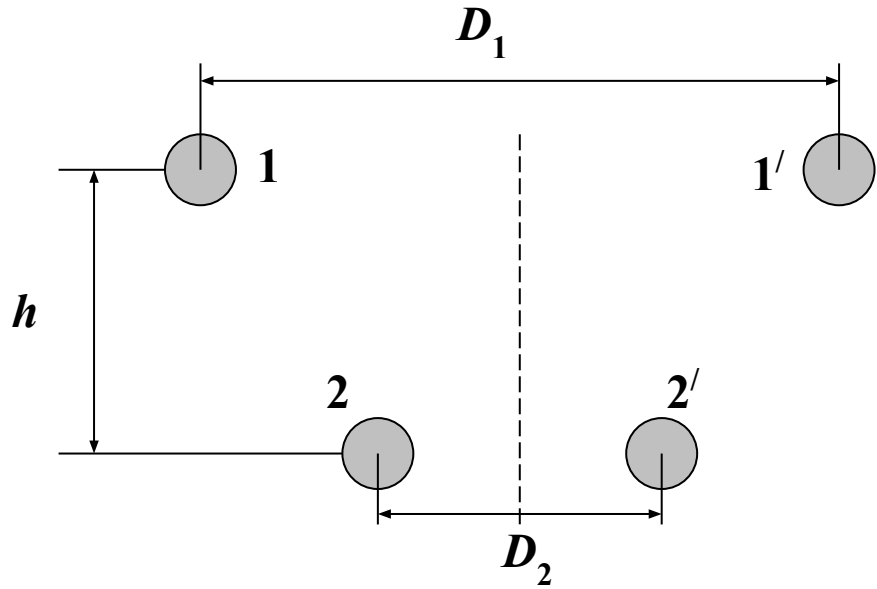
Поток взаимной индукции, сцепляющийся со второй линией, равен

$$\Phi_{21} = (A_2 - A_1) \cdot I = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{r_{1/2} \cdot r_{12'}}{r_{12} \cdot r_{1/2'}}$$

Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями определяется соотношением:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{1/2} \cdot r_{12'}}{r_{12} \cdot r_{1/2'}}$$

# Две двухпроводные линии, расположенные симметрично в параллельных плоскостях.



$$r_{1/2} = r_{12'} = \sqrt{\left(\frac{D_1 + D_2}{2}\right)^2 + h^2} \quad r_{12} = r_{1/2'} = \sqrt{\left(\frac{D_1 - D_2}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{(D_1 + D_2)^2 + 4h^2}{(D_1 - D_2)^2 + 4h^2}$$

Если линии расположены на одной высоте, то  $h = 0$  и формула упрощается:

$$M_{12} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D_1 + D_2}{D_1 - D_2}$$

Если же расстояние между проводами линии (рис.10–6в) одно и тоже ( $D_1 = D_2 = D$ ), то взаимная индуктивность определяется из выражения:

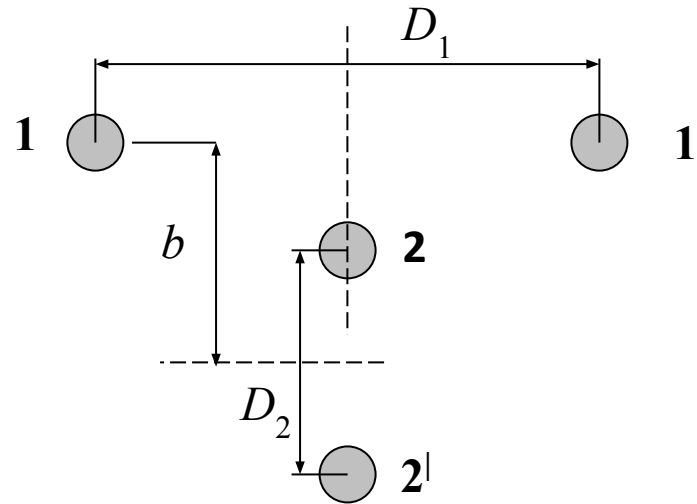
$$M_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{D^2 + h^2}{h^2}$$

# Линии расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Провода второй линии расположены в плоскости симметрии первой линии

$$r_{12} = r_{1/2} = p$$

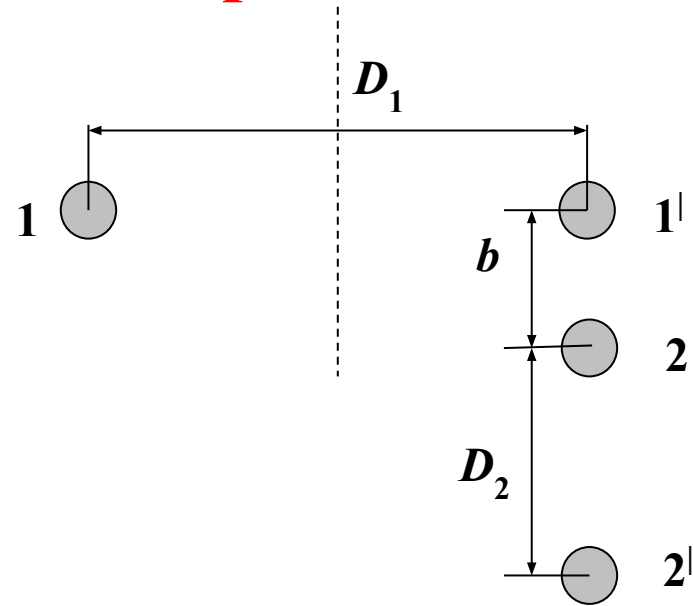
$$r_{12'} = r_{1'/2'} = q$$



$$M_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{pq}{qp} = 0$$

Провода второй линии расположены вне плоскости симметрии первой линии . В этом случае:

# Провода второй линии расположены вне плоскости симметрии первой линии



$$r_{12} = \sqrt{D_1^2 + b^2}$$

$$r_{12'} = \sqrt{D_1^2 + (b + D_2)^2}$$

$$r_{1/2} = b$$

$$r_{1/2'} = b + D_2$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b \sqrt{D_1^2 + (b + D_2)^2}}{(b + D_2) \sqrt{D_1^2 + b^2}}$$