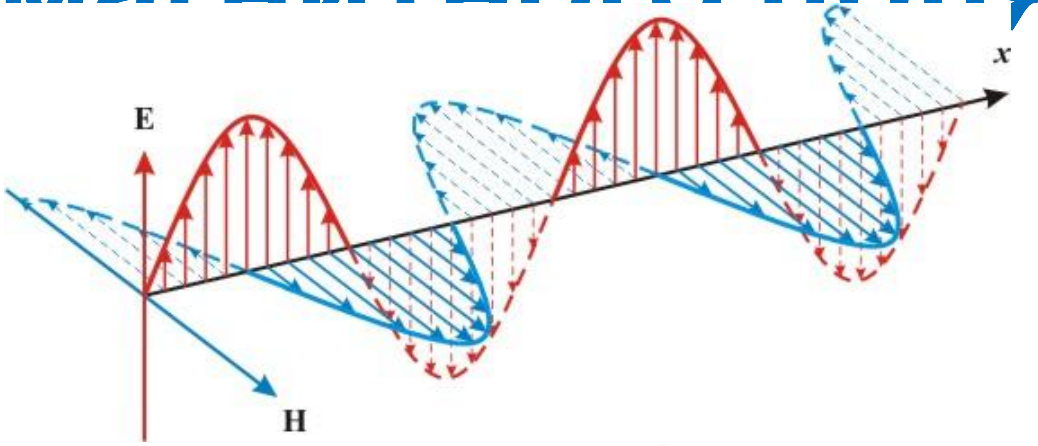
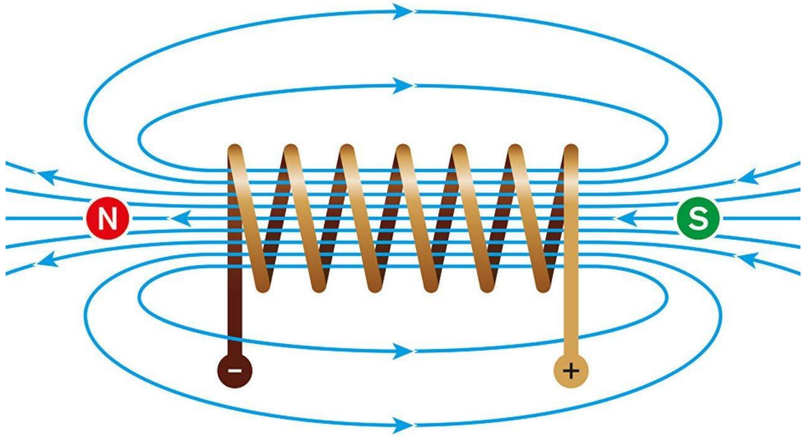
Теоретические основы электротехники

Теория электромагнитного поля

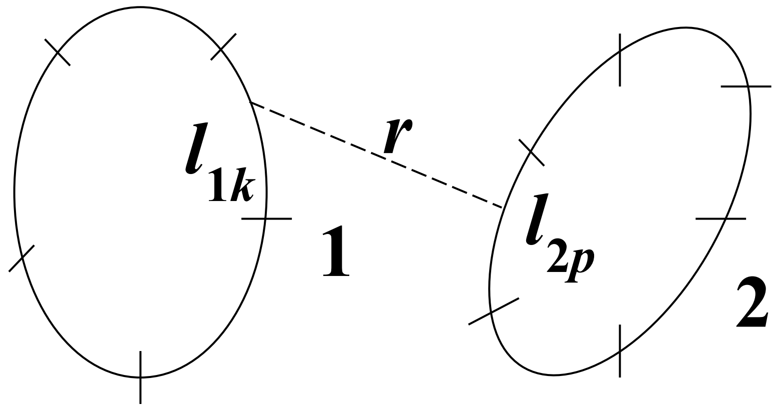


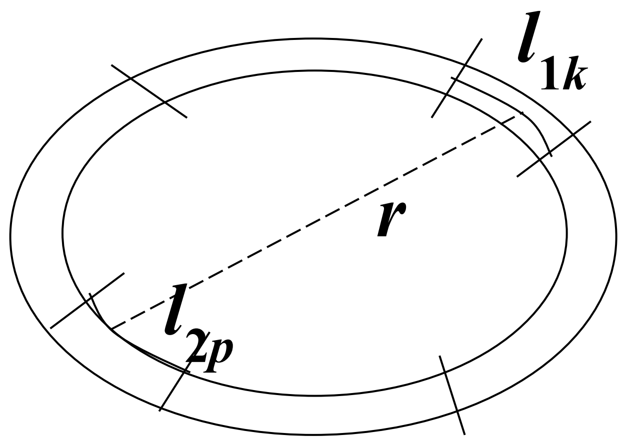


ВШВЭ, проф. Л. И. Сахно
2021

Метод участков

Если разбить **тонкие контуры** на отдельные участки, то взаимную индуктивность между тонкими контурами можно записать в виде суммы интегралов по участкам:





$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$$

$$M_{12} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_{1k}}\int_{l_{2p}}\frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r}$$

Выражение, полученное под знаком двойной суммы, можно считать взаимной индуктивностью между двумя отрезками контуров:

$$M_{1k,2p} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_{1k}} \int\limits_{l_{2p}} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r} \qquad\qquad M_{12} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} M_{1k,2p}$$

Аналогично для вычисления индуктивности, учитывая, что $m = n$ и проводя интегрирование один раз по оси, а другой по внутреннему контуру, можем записать:

$$L = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_{1k}} \int\limits_{l_{2p}} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r} + L_{\text{внутр}}$$

Если сравнить формулы для участков, полученные для определения взаимных индуктивностей M_{kp} и формулы для взаимных потенциальных коэффициентов, полученные по методу средних потенциалов, то можно заметить их сходство:

$$M_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_{1k}} \int\limits_{l_{2p}} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{r} \qquad \alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon l_1 l_2} \int\limits_{l_1} \int\limits_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r} \qquad d\vec{l}_1\, d\vec{l}_2 = dl_1\, dl_2 \cdot \cos\theta$$

Индуктивность контуров, составленных из прямолинейных отрезков

Если отрезки прямолинейны, то cosθ может быть вынесен за знак интеграла, так как на всем интервале интегрирования угол θ между прямолинейными отрезками остается постоянным. В этом случае выражение для взаимной индуктивности между двумя прямолинейными отрезками принимает вид:

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cos\theta \int\limits_{l_1} \int\limits_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{r} \qquad \frac{M_{kp}}{\alpha_{kp}} = \mu_0 \varepsilon \cdot l_1 l_2 \cos\theta$$

Для собственной **внешней индуктивности прямолинейного отрезка,** учитывая, что θ = 0 и *cos*θ = 1, можем записать:

$$L_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{l_1} \int\limits_{l_1^\backslash} \frac{dl \cdot dl^\backslash}{r} \qquad \alpha_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot l_1^2} \int\limits_{l_1} \int\limits_{l_1^\backslash} \frac{dl \cdot dl^\backslash}{r} \qquad \frac{L_{11}}{\alpha_{11}} = \mu_0 \varepsilon \cdot l^2$$

Выражения для потенциальных коэффициентов, полученные по методу средних потенциалов, не позволяют обеспечить достаточно высокую точность из-за необоснованного предположения о равномерном распределении заряда вдоль отрезков проводников (τ = const). Однако, аналогичные **выражения для расчета индуктивностей по методу участков абсолютно точны**, так как ток в проводнике во всех его сечениях одинаков (i = const).

Индуктивности систем параллельных проводов

В системе параллельных проводов с токами поле имеет плоскопараллельный характер, векторный потенциал, как и плотность тока, имеет **единственную составляющую, направленную вдоль оси *z*.**

Разность векторных магнитных потенциалов на разных сторонах рамки, удаленных на расстояния a и b от провода, мы получили в виде:

$$A_1 - A_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\ln b - \ln a) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

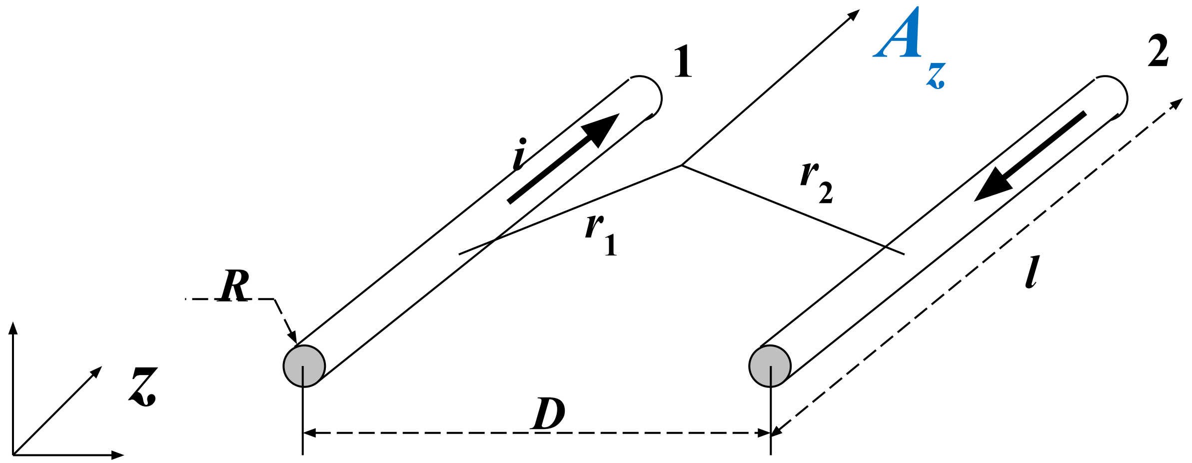
По аналогии векторный магнитный потенциал в системе проводов с токами можем записать:

$$A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} i_k \ln r_k$$

где r_k – расстояние от рассматриваемой точки до соответствующего провода

Двухпроводная линия с прямым и обратным током

Определим **внешнее потокосцепление** и внешнюю индуктивность участка линии длиной l, используя контур, расположенный на ближних друг к другу поверхностях проводов.



В произвольной точке около двухпроводной линии векторный магнитный потенциал равен $A_z = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$

Тогда векторные потенциалы на внутренних поверхностях первого и второго провода имеют вид

$$A_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{D}{R} > 0 \qquad A_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{R}{D} < 0$$

Внешний магнитный поток и **внешняя индуктивность** двухпроводной линии равны соответственно

$$\Phi_{\text{внешн}} = (A_1 - A_2) \cdot l = \frac{\mu_0 i \cdot l}{\pi} \ln \frac{D}{R} \qquad L_{\text{внешн}} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D}{R}$$

Внутренняя индуктивность этой линии определяется магнитным потоком внутри прямого и обратного провода (общая длина $2l$)

$$L_{\text{внутр}} = \frac{\mu_0 2l}{8\pi} = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

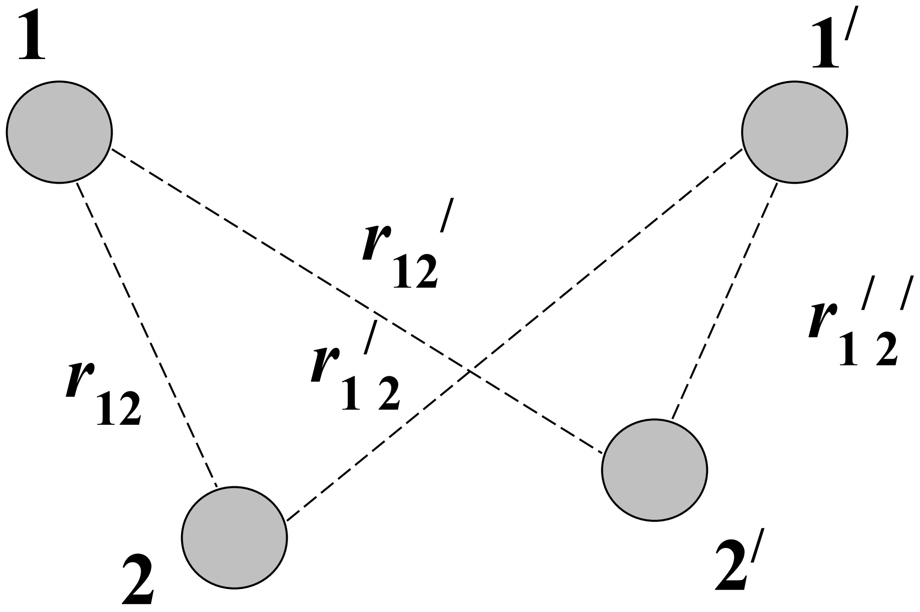
Окончательно **индуктивность двухпроводной линии** равна

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}(\ln\frac{D}{R} + \frac{1}{4})$$

В реальных линиях расстояние между проводами превышает радиус провода примерно в 1000 раз, тогда

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}(7 + 0{,}25)$$

Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями.



Зададимся током в первой линии и определим векторный магнитный потенциал на осях проводов второй линии:

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln \frac{r_{1/2}}{r_{12}} \qquad A_{2/} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \ln \frac{r_{1/2/}}{r_{12/}}$$

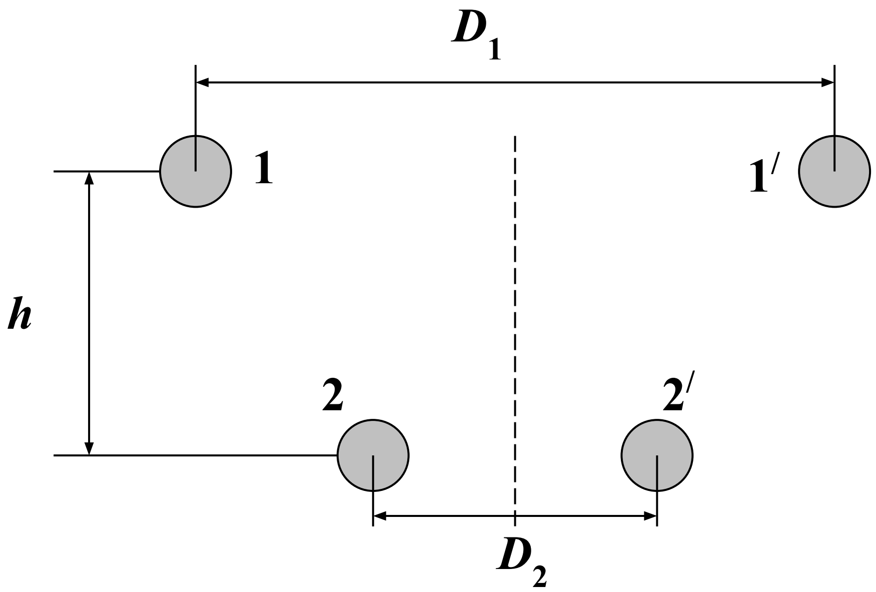
Поток взаимоиндукции, сцепляющийся со второй линией, равен

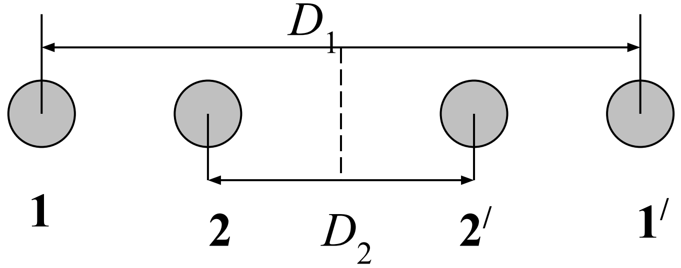
$$\Phi_{21} = (A_2 - A_1) \cdot l = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{r_{1'2} \cdot r_{12'}}{r_{12} \cdot r_{1'2'}}$$

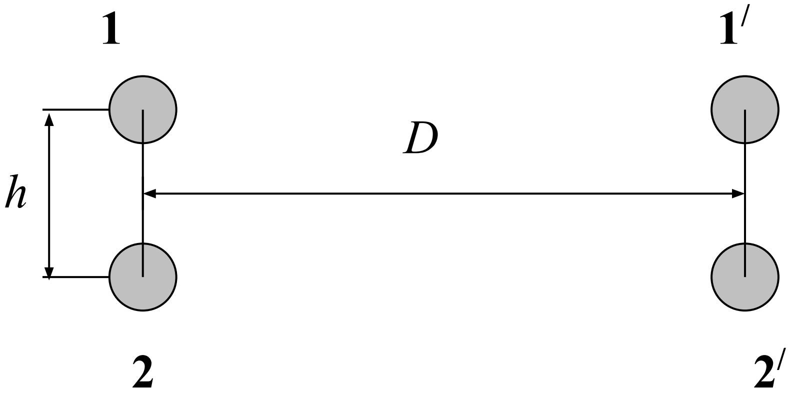
Взаимная индуктивность между двумя двухпроводными линиями определяется соотношением:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{1'2} \cdot r_{12'}}{r_{12} \cdot r_{1'2'}}$$

Две двухпроводные линии, расположенные симметрично в параллельных плоскостях.







$$r_{1'2} = r_{12'} = \sqrt{\left(\frac{D_1 + D_2}{2}\right)^2 + h^2} \qquad r_{12} = r_{1'2'} = \sqrt{\left(\frac{D_1 - D_2}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{(D_1 + D_2)^2 + 4h^2}{(D_1 - D_2)^2 + 4h^2}$$

Если линии расположены на одной высоте, то $h = 0$ и формула упрощается:

$$M_{12} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{D_1 + D_2}{D_1 - D_2}$$

Если же расстояние между проводами линии (рис.10–6в) одно и тоже ($D_1 = D_2 = D$), то взаимная индуктивность определяется из выражения:

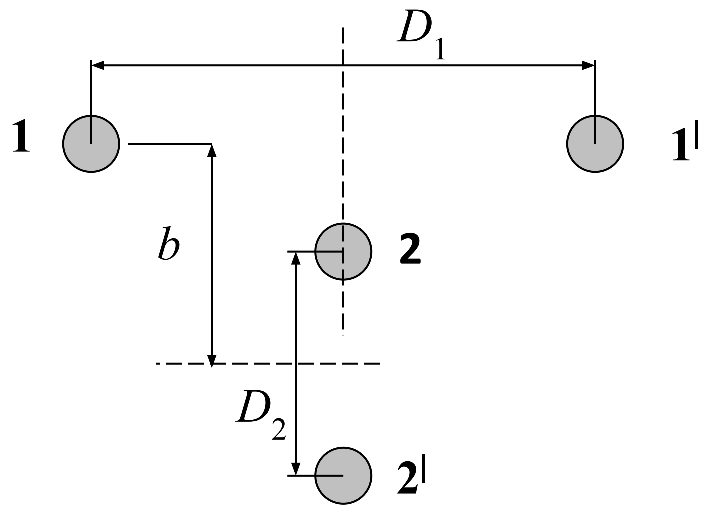
$$M_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{D^2 + h^2}{h^2}$$

Линии расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Провода второй линии расположены в плоскости симметрии первой линии

$$r_{12} = r_{1'2} = p$$

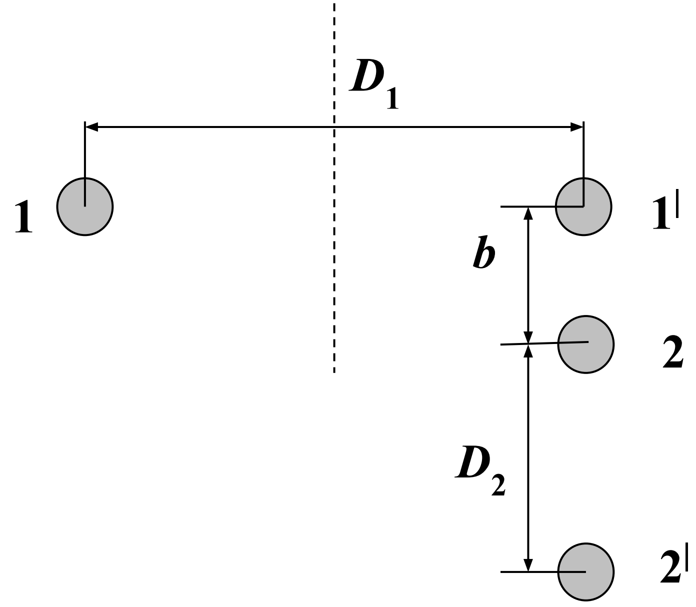
$$r_{12'} = r_{1'2'} = q$$



$$M_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{p\,q}{q\,p} = 0$$

Провода второй линии расположены вне плоскости симметрии первой линии . В этом случае:

Провода второй линии расположены вне плоскости симметрии первой линии



$$r_{12} = \sqrt{D_1^2 + b^2} \qquad r_{12'} = \sqrt{D_1^2 + (b + D_2)^2}$$

$$r_{1'2} = b \qquad r_{1'2'} = b + D_2 \qquad M_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b\sqrt{D_1^2 + (b + D_2)^2}}{(b + D_2)\sqrt{D_1^2 + b^2}}$$