Riņķa līnija un daudzstūri

9.klase

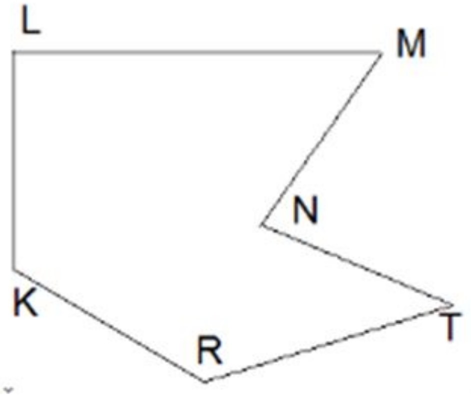
Daudzstūri

"Plaknes daļu, kas atrodas vienkāršas slēgtas lauztas līnijas iekšpusē, kopā ar lauzto līniju, sauc par daudzstūri. Lauztās līnijas virsotnes sauc par daudzstūra virsotnēm."

Daudzstūra blakusvirsotnes savienojot, veidojas daudzstūra leņķi.

"Ja visi daudzstūra leņķi ir mazāki par izstieptu (180°) leņķi, tad tādu daudzstūri sauc par izliektu."

Ģeometrijas uzdevumos visbiežāk ir izliekti daudzstūri.



Daudzstūri

Šis ir **ieliekts** daudzstūris (sešstūris) $KLMNTR$, jo $\sphericalangle N > 180^\circ$.

Virsotnes un leņķi:
K, L, M, N, T, R

Malas (sešas):
KL, LM, MN, NT, TR, RK

Diagonāles (varētu novilkt deviņas):
$KM, KN, KT, LN, LT, LR, MR, MT, NR$

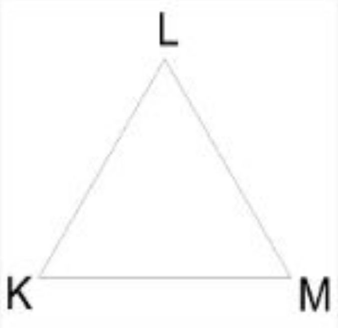
"Nogriezni, kas savieno daudzstūra divas virsotnes, kuras neatrodas uz vienas malas, sauc par daudzstūra diagonāli."

"Daudzstūra perimetrs ir visu malu garumu summa."

Leņķu summa daudzstūrim

Izliekta daudzstūraleņķu summa ir $(n-2)\cdot 180^{\circ}$, kur n ir daudzstūra malu skaits.

Piemērs:

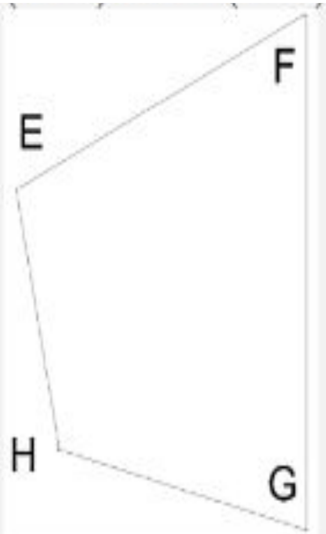


Trijstūris KLM - tam ir 3 malas (n = 3).

Aprēķinām iekšējo leņķu summu:

$(n-2)\cdot 180^{\circ} = (3-2)\cdot 180^{\circ} = 1\cdot 180^{\circ} = 180^{\circ}$

Leņķu summa daudzstūrim



Četrstūris EFGH (n = 4).

Aprēķinām iekšējo leņķu summu:

$$(n-2)\cdot 180^\circ = (4-2)\cdot 180^\circ = 2\cdot 180^\circ = 360^\circ$$

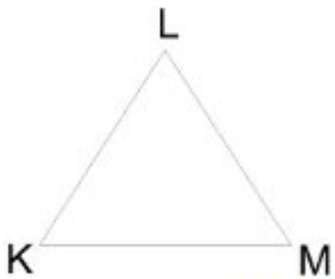
Arī ieliekta daudzstūra leņķu summu var aprēķināt pēc tās pašas formulas.

Regulāri daudzstūri

"Daudzstūri sauc par regulāru, ja tam vienlaikus gan visas malas, gan visi leņķi ir vienādi."

"Regulāra daudzstūra leņķu lielums ir $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, kur n ir daudzstūra malu skaits."

Lai uzzinātu leņķu lielumu, daudzstūra visu leņķu summa jādala ar malu skaitu (n).

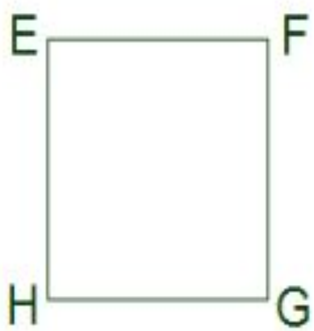


Regulārs trijstūris KLM ($n = 3$).
Leņķu summa ir 180°.
Viens leņķis ir $180^\circ : 3 = 60^\circ$.

Izmantojot formulu:

$$\frac{(3-2)\cdot 180^\circ}{3} = \frac{1\cdot 180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Regulāri daudzstūri



Regulārs četrstūris jeb kvadrāts $EFGH$ ($n = 4$).
Leņķu summa ir 360°.
Viens leņķis ir $360^\circ : 4 = 90^\circ$.

Izmantojot formulu:

$$\frac{(4-2)\cdot 180^\circ}{4} = \frac{1\cancel{2}\cdot 180^\circ}{\cancel{4}\,2} = 90^\circ$$

Apvilkts un ievilkts trijstūris

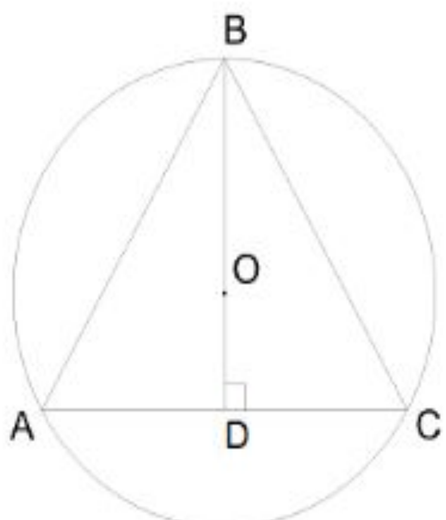
- Riņķa līnija ir apvilkta ap trijstūri, ja visas trijstūra virsotnes atrodas uz šīs riņķa līnijas.
- Ap jebkuru trijstūri var apvilkt riņķa līniju.

Caur jebkuriem trijiem punktiem, kas neatrodas uz vienas taisnes, var novilkt riņķa līniju.

Apvilkts un ievilkts trijstūris

Secinājumi:

1. Trijstūra visu trīs malu vidusperpendikuli krustojas vienā punktā.
2. Ap trijstūri apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas tā malu vidusperpendikulu krustpunktā.



Teorēma: ja regulārs trijstūris ir ievilkts riņķa līnijā, tad šīs riņķa līnijas centrs atrodas uz trijstūra augstuma un sadala to attiecībā $2 : 1$, skaitot no trijstūra virsotnes.

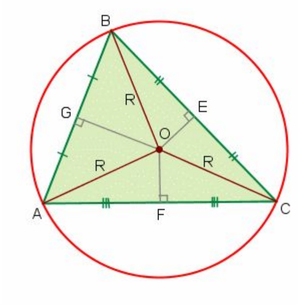
Piemērs

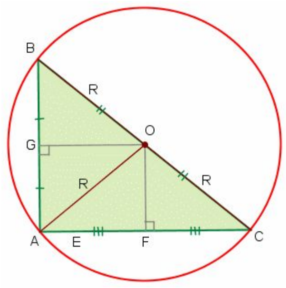
$\Delta\, ABC$ - regulārs trijstūris.
O - riņķa līnijas centrs.

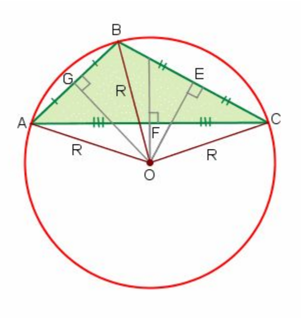
$$R = BO = 2 \cdot OD$$
$$OD = 5\ cm$$
$$BO = 2 \cdot 5\ cm = 10\ cm$$
$$R = BO = 10\ cm$$

Trijstūrim apvilkta riņķa līnija un trijstūrī ievilkta riņķa līnija

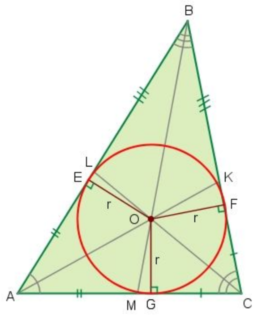
- Ap katru trijstūri var apvilkt riņķa līniju. Apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas malu vidusperpendikulu krustpunktā.



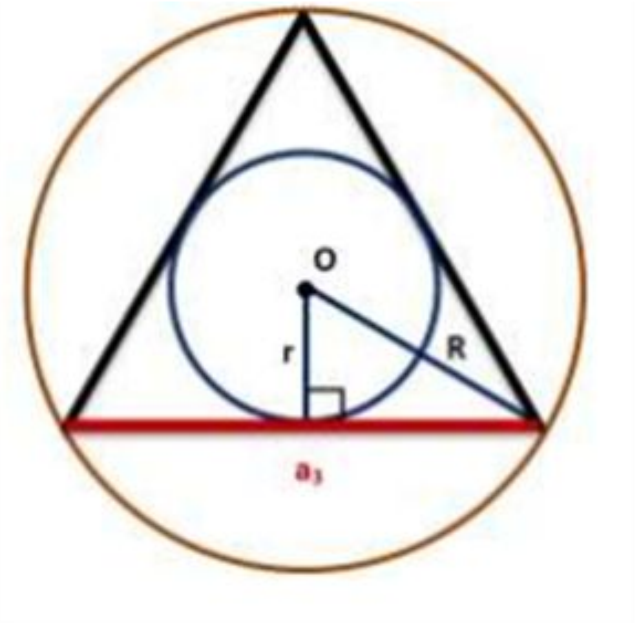




- Katrā trijstūrī var ievilkt riņķa līniju. Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas leņķu bisektrišu krustpunktā.



Formulas!



$a_3 = R\sqrt{3}$

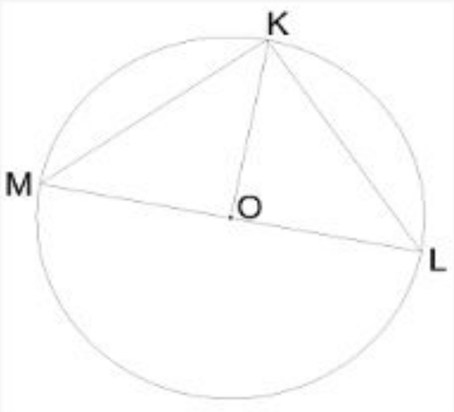
$a_3 = 2r\sqrt{3}$

Taisnleņķa trijstūrim apvilkta riņķa līnija

R - apvilktās riņķa līnijas rādiuss.

"Ap taisnleņķa trijstūri apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas hipotenūzas viduspunktā."
"Taisnleņķa trijstūrī mediāna, kas novilkta pret hipotenūzu, ir vienāda ar pusi no tās garuma un vienāda ar apvilktas riņķa līnijas rādiusu."

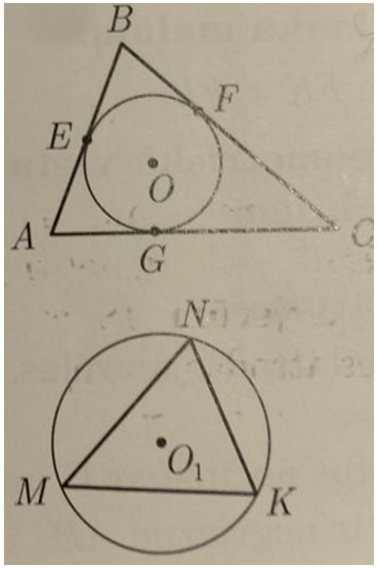
Piemērs:



$\Delta\, MKL$ - taisnleņķa trijstūris
ML - hipotenūza
KO - mediāna pret hipotenūzu
O - apvilktās riņķa līnijas centrs
$MO = LO = KO$ (kā rādiusi)

Ja $ML = 8$ cm, tad $R = MO = LO = KO = ML/2 = 4$ cm.

1.uzdevums



a) Ja $FC = 8$ cm, tad $CG =$ ... .

b) Ja $\smile MK = 80°$, tad $\sphericalangle MNK =$ ... .

c) Ja $\smile NK = 100°$, tad $\sphericalangle NO_1K =$ ... .

d) Ja pieskare BA pieskaras riņķa līnijai punktā E, tad $\sphericalangle OEA =$

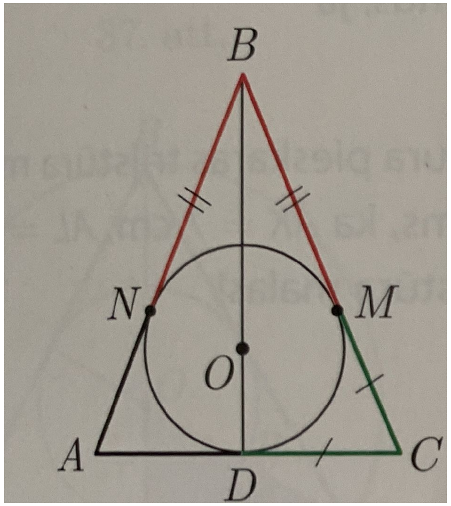
e) Ja $\smile MK = \smile NK$, tad $MK =$ ... .

f) $MO_1 =$ ... kā apvilktās riņķa līnijas ... .

g) $OG =$ ... kā ... riņķa līnijas rādiusi.

2.uzdevums

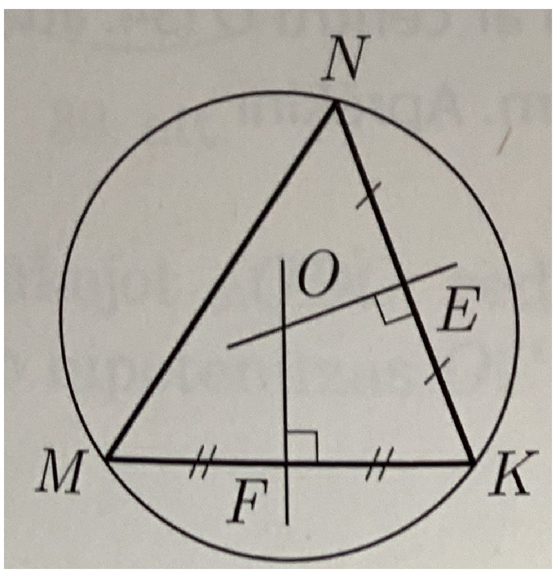
Taisnleņķa trijstūrī ABC ievilkta riņķa līnija ar centru O un rādiusu r=4cm. Dots, ka $\measuredangle CBA = 30°$. Turpini teikumus!



3. uzdevums

Vienādsānu trijstūrī ievilktās riņķa līnijas pieskaršanās punkts sadala vienu no sānu malām nogriežņos, kas, skaitot no pamata, ir 3 cm un 4 cm. Aprēķini trijstūra perimetru!

4.uzdevums

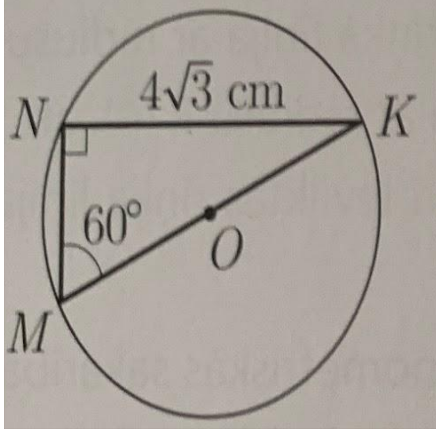


Δ MNK;R.l.(O;OK),$\measuredangle$EOF=110°,

$\cup$MK=128°

Jāaprēķina: $\measuredangle$M

5.UZDEVUMS



Taisnleņķa trijstūra šaurais leņķis ir 60°, un tā pretkatete ir $4\sqrt{3}$ cm. Aprēķini trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusu!

Dots (44. att.): R. l.(O; OK), $\sphericalangle NMK = 60°$, $NK = 4\sqrt{3}$ cm

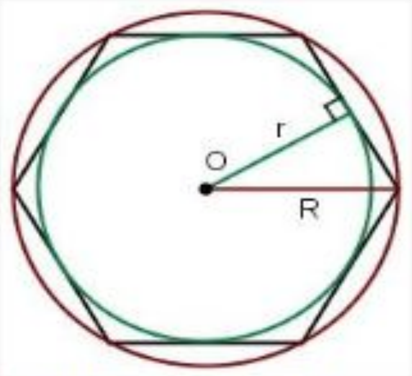
Jāaprēķina: OK

Ievilkti un apvilkti daudzstūri

"Katrā regulārā daudzstūrī var ievilkt riņķa līniju un arī ap to apvilkt riņķa līniju.
Regulārā daudzstūrī apvilktās un ievilktās riņķa līnijas centri sakrīt."

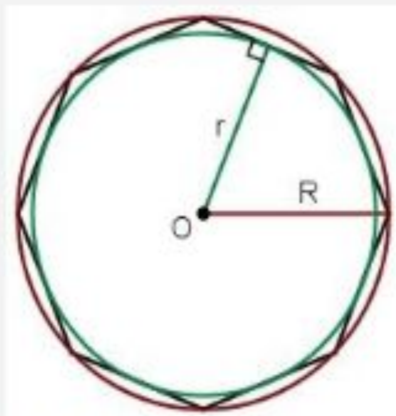
Piemērs:

Zīmējumos attēlots regulārs sešstūris un regulārs astoņstūris.
O - riņķa līniju un daudzstūru centri
r - ievilktās riņķa līnijas rādiuss
R - apvilktās riņķa līnijas rādiuss



Malu skaits - 6, leņķi un virsotnes - 6.

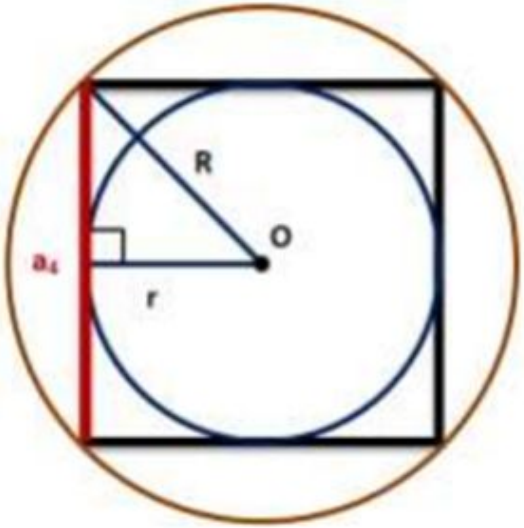
Ievilkti un apvilkti daudzstūri



Malu skaits - 8, leņķi un virsotnes - 8.

Regulāra **sešstūra** mala vienāda ar apvilktā riņķa rādiusu! $R = a$.

Ievilkts un apvilkts regulārs četrstūris



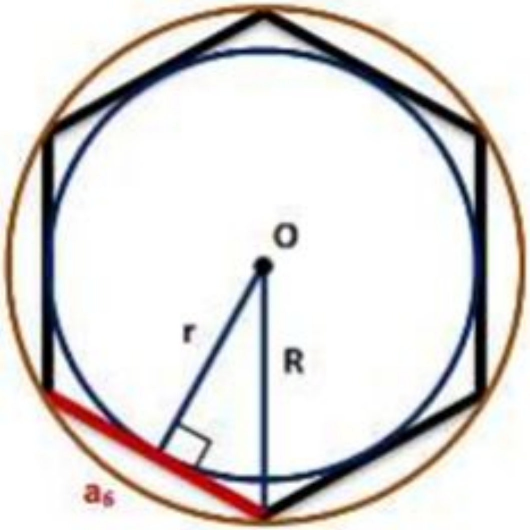
Riņķa līnijas diametrs ir vienāds ar kvadra malu, bet rādiuss ir puse no malas.

r = 0,5a

Riņķa līnijas diametrs ir vienāds ar kvadrāta diagonāli, bet rādiuss ir puese no diagonāles garuma

$$R = \frac{\xi\overline{2}}{2}$$

Formulas!

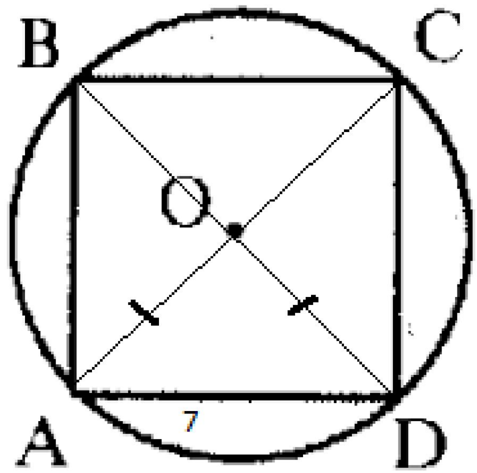


Atceries formulas!

$$a_6 = R$$

$$a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Uzdevums



Dots: ABCD- kvadrāts,
R.l. (O,OD), AD=7 dm.

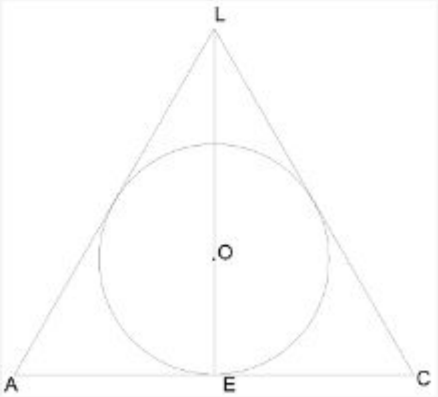
Jāaprēķina: OD

Apvilktu regulāru daudzstūru laukumi

"Regulāra daudzstūra laukums ir vienāds ar daudzstūra pusperimetra un daudzstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusa garuma reizinājumu."

$S = pr$ (kur r - ievilktā riņķa rādiuss, p - puse no daudzstūra apkārtmēra)

Piemērs:



Apvilktu regulāru daudzstūru laukumi

Dots:
ΔALC - regulārs trijstūris.
$AC = 6\sqrt{3}$ cm
$OE = 3$ cm

Aprēķināt:
$S(\Delta ALC)$

Aprēķins:
$S = pr$

$p = \dfrac{3 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ (cm)
$r = OE = 3$ cm

$S = 9\sqrt{3} \cdot 3$
$S = 27\sqrt{3} (cm^2)$

Var arī risināt, sadalot regulāru daudzstūri vienādos trijstūros. Regulāra daudzstūra laukumu aprēķina kā atsevišķo trijstūru laukumu summu.

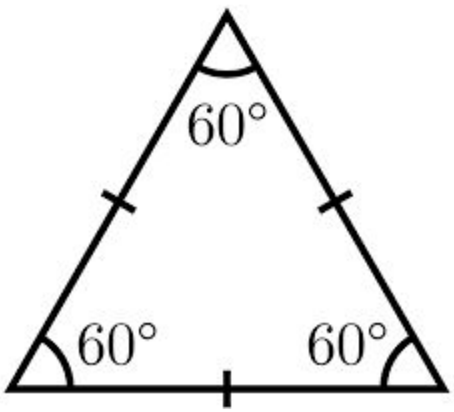
Apvilktu regulāru daudzstūru laukumi

-

2.uzdevums

Taisnleņķa trijstūrī ABC ievilkta riņķa līnija ar centru O un rādiusu r=4cm. Dots, ka $\measuredangle CBA = 30°$. Turpini teikumus!

Regulāra trijstūra laukums



Regulārs trijstūris

a – mala, h – augstums, r – ievilktās riņķa līnijas rādiuss, R – apvilktās riņķa līnijas rādiuss

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Regulāra trijstūra mala ir

a) 6 cm; b) 4 dm; c) $3\sqrt{2}$ m;

Aprēķini trijstūra laukumu!

Regulāra trijstūra laukums ir

a) $25\sqrt{3}$ cm^2; b) $\sqrt{3}$ dm^2; c) $16\sqrt{3}$ m^2.

Aprēķini trijstūra malu!

Regulārā trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir

a) $2\sqrt{3}$ cm; b) 1,2 dm.

Aprēķini trijstūra laukumu!

Regulāram trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss ir

a) $2\sqrt{3}$ cm; b) 6 cm.

Aprēķini trijstūra laukumu!