Основы линейной алгебры

Матрицы

Матрицей размерности m x ***n*** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая ***m*** строк и ***n*** столбцов.

Матрицы обозначаются *заглавными буквами* и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Сокращенно матрица А записывается в виде:

$$A = \left(a_{ij}\right)$$

или

$$A = \left\| a_{ij} \right\|$$

где $i \left(1 \le i \le m\right)$ указывает *номер строки, а* $j \left(1 \le j \le n\right)$ *номер столбца.*

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается через ***O***.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица ***E*** – это диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали равны единице, т.е.

$$a_{ii} = 1, \forall i$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix} \qquad 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -12 \\ 3 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad -2 \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Пример

Вычислить ***4A - 3B***, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -5 & 6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

Решение: ***4A - 3B = 4A + (-3)B***

$$4\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -5 & 6\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}8 & 12 & 0\\ 4 & -20 & 24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -3 & 12\\ -3 & -15 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 9 & 12\\ 1 & -35 & 21\end{pmatrix}$$

4. Умножение матриц

Опр. 17. ***Произведение*** матрицы A на матрицу B, **определено тогда и только тогда**, когда **число столбцов первой матрицы A** совпадает с **числом строк второй матрицы B**, и в этом случае матрица A называется **согласованной** с матрицей B для умножения.

Если $A_{m\times n} = (a_{ij}), B_{n\times k} = (b_{ij}),$ тогда $A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

$$\forall i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,k$$

*Итак, элемент i-той строки и j-го столбца матрицы произведения **C** равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы **A** на соответствующие элементы j-го столбца матрицы **B**.*

Пример

Найти произведение матриц ***AB*** и ***BA***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Произведение матриц ***AB*** существует, т.к. матрица ***A*** имеет размерность 2x2, а матрица ***B*** – 2x3, и число столбцов матрицы ***A*** совпадает с числом строк матрицы ***B***.

Произведение матриц ***BA*** не существует.

$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2$

$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$

$c_{13} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$

$c_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 6$

$c_{22} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3$

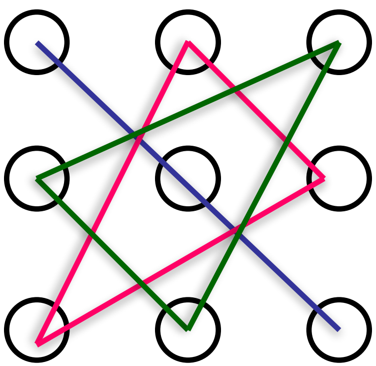
$c_{23} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 13$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

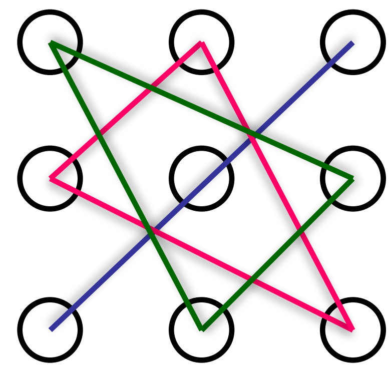
При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться ***правилом треугольников*** или ***правилом Сарруса***.

«+»



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

«−»



Пример

Вычислить определители матриц:

$$\det A = \left|3\right| = 3$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = 11$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 2 -$$

$$2 \cdot 4 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = -16$$

Опр.2. *Минором элемента* $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы n-го порядка $\boldsymbol{A}$ называется определитель матрицы *(n-1)*-го порядка, полученный из матрицы $\boldsymbol{A}$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Минор элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ обозначается $\boldsymbol{M_{ij}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}$$

лат. ***minor*** *- меньший*

Пример. Найти миноры M_{11}, M_{32}, M_{43}

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{32}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{43}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Опр.4. Алгебраическим дополнением элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы n-го порядка $\boldsymbol{A}$ называется число, равное $\mathbf{(-1)^{i+j}M_{ij}}$ и обозначаемое символом $\boldsymbol{A_{ij}}$:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

где $i=1, 2, \dots n$; $j=1, 2, \dots, n$.

Алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца – четное число, и отличается от минора знаком, когда сумма номеров строки и столбца – нечетное число.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} \qquad A_{22} = M_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} \qquad A_{21} = -M_{21}$$

Определитель n-го порядка матрицы A_n равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их *соответствующие* алгебраические дополнения.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

для строки:

$$= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{ij} A_{ij} + \ldots + a_{in} A_{in}, \ (i = 1;2;\ldots;n);$$

для столбца:

$$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + .. + a_{ij} A_{ij} + \ldots + a_{nj} A_{nj}, \ (j = 1;2;\ldots;n).$$

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

По 2-ой строке:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot A_{21}+4\cdot A_{22}+(-1)\cdot A_{23}=$$

$$=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-16$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По 3-му столбцу:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + (-1) \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} =$$

$$2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

- Определитель n-го порядка треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- Определитель n-го порядка единичной матрицы $\boldsymbol{E}$ равен 1.

Ранг матрицы

- Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Элементарными преобразования матрицы называются :

1. Транспонирование (замена строк столбцами)
2. Перестановка строк и столбцов.
3. Умножение некоторой строки (столбца) на число, отличное от нуля.
4. Прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число.

Теорема о ранге матрицы

- Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{matrix}$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Опр. 1. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для квадратной матрицы А, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Матрицы A и A^{-1} взаимно-обратны $(A^{-1})A = A$

Всякая невырожденная матрица A_n имеет обратную матрицу A^{-1}, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} (i=1, …, n; j=1, …, n)матрицы A.

Пример

Найти матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Т.к. |A|=-2≠0, то матрица A – невырожденная и имеет обратную матрицу.

Находим алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|4| = 4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}|2| = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|3| = -3 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1$$

Вычислим обратную матрицу (Т.2):

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Для проверки правильности вычисления обратной матрицы необходимо убедиться в выполнении равенства: $AA^{-1}=E$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Опр. ***Системой m линейных уравнений с n неизвестными*** (СЛУ) называется система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ – неизвестные, подлежащие определению; числа a_{ij}, i=1, 2, … m; j=1, 2, ..n называются коэффициентами системы, а числа b_i *- ее свободными членами.*

Число уравнений системы не обязательно совпадает с числом неизвестных, возможны следующие случаи:

$$m>n\ ,\ m=n\ ,\ m<n.$$

Опр. Матрица A составленная из коэффициентов СЛУ называется ***основной*** матрицей системы.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Опр. Матрицы X и B называются **матрицы-столбцы неизвестных** и **свободных членов**.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи СЛУ:

$$\boxed{AX = B}$$

Пример. Записать в матричной форме

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Следовательно, имеем $AX = B$.

Рассмотрим частный случай неоднородной системы, когда ***m=n***, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель $|A|$ основной матрицы системы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В этом случае система линейных уравнений называется **невырожденной.**

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

или $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 28 + 2 = 30 \neq 0.$$

т.е. исходная система трех неоднородных линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение.

Найдем единственное решение системы матричным методом $X=A^{-1}B$.

Найдем теперь обратную матрицу A^{-1}, для этого найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Следовательно, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -10 & 5 \\ 11 & 4 & 1 \\ -13 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{13}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

Найдем теперь решение системы

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{30} \\ -\frac{13}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{7}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{13}{30} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}+2\cdot\dfrac{13}{30}-\dfrac{1}{30}=1, \qquad 1=1. \\ -3\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{13}{30}+2\cdot\dfrac{1}{30}=0, \qquad 0=0. \\ \dfrac{1}{6}+4\cdot\dfrac{13}{30}+3\cdot\dfrac{1}{30}=2, \qquad 2=2. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ решение системы найдено верно.

Ответ : $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{13}{30};\dfrac{1}{30}\right)$.

Правило Крамера

Согласно правилу Крамера, если $|A| \neq 0$, то единственное решение СЛУ вычисляется по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{|A|_1}{|A|};\, x_2 = \frac{|A|_2}{|A|};\ldots;\, x_n = \frac{|A|_n}{|A|}$$

$$\text{или кратко } x_j = \frac{|A|_j}{|A|} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Определители $|A|_j$ получаются из определителя $|A|$ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Найдем теперь решение системы по правилу Крамера

$$x_1 = \frac{|A|_1}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A|_2}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A|_3}{|A|}, \quad \text{где}$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Итак, $x_1 = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}, \quad x_2 = \dfrac{13}{30}, \quad x_3 = \dfrac{1}{30}.$

МЕТОД ГАУССА

Элементарными называются следующие **преобразования** системы:

1. Перестановка местами двух уравнений системы.
2. Умножение некоторого уравнения системы на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого её уравнения, предварительно умноженного на некоторое число.
4. Изменение порядка следования неизвестных.

Пример. Решить систему

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$