

# Методы аналогий для анализа МЭМС

Выполнил: студент ФТФ  
21414 группы  
Никифоров Д. С.

# Методы анализа электроμηχανических устройств

Конструкция МЭМС состоит из механических элементов: пластин, мембран, труб и т.п., которые обладают массой  $m$ , гибкостью  $C_M$ , потерями энергии на трение, и электрических элементов: катушек, конденсаторов, трансформаторов, резисторов. В процессе работы устройства эти элементы взаимодействуют, для описания этого процесса приходится составлять и решать систему уравнений, содержащую уравнения механики и электродинамики. Решение системы уравнений получается громоздким.

Для упрощения решения таких задач был разработан метод электроμηχανических аналогий, который позволил свести анализ механических устройств к анализу эквивалентных электрических схем. Математический аппарат для анализа электрических цепей хорошо разработан и применяется в радиотехнике.

# Метод аналогий

Прямым методом аналогий является представление механической системы в виде электрической цепи с последовательным соединением элементов. Этот метод аналогий - «прямая аналогия» хорошо подходит для систем, в которых проводится аналогия между силой и электрическим напряжением. Например, в пьезоэлектрических системах, генерируемое напряжение или заряд прямо пропорционально приложенной силе. Но такая аналогия имеет свои ограничения, в связи «переводом» механически параллельных конфигураций в соответствующие электрические - последовательные цепи.

Существует также другой метод аналогий – «инверсная аналогия». В этом методе механическую систему представляют в виде электрической цепи, где элементы соединены параллельно. Этот тип аналогии также имеет свой недостаток, а именно с ростом частоты увеличивается эффект влияния индуктивности и массы, одновременно ёмкости и упругости уменьшаются, т.е. частотные характеристики элементов цепей обратны.

Подсистема	Фазовые переменные		Параметры элементов		
	Тип потенциал, $V$	Тип потока, $i$	C	L	R
Электрическая	Электрическое напряжение	Электрический ток	Электрическая ёмкость	Электрическая индуктивность	Электрическое сопротивление
Механическая поступательная	Сила	Скорость	Масса	Гибкость	Механическое сопротивление
Механическая вращательная	Момент силы	Угловая скорость	Момент инерции	Вращательная гибкость	Вращательное сопротивление
Тепловая	Изменение температуры	Тепловой поток	Теплоёмкость	-	Тепловое сопротивление

*Таблица 1. Виды подсистем, соответствующие им фазовые переменные и параметры*

Механические величины	Электрические величины
Сила - $F$	Напряжение - $V$
Скорость - $v$	Ток - $I$
Перемещение - $x$	Заряд - $q$
Количество движения (импульс) - $p$	Магнитный поток - $\Phi$
Вязкое трение - $R$	Сопротивление - $R$
Масса - $m$	Индуктивность - $L$
Упругость, жёсткость пружины - $k$	Ёмкость - $C$

*Таблица 2. Сопоставление механических величин с аналогичными им электрическими величинами для метода аналогий*

Пружинный маятник	Колебательный контур
$x$ - смещение	$q$ - заряд
$v = \dot{x}$ - скорость	$i = \dot{q}$ - сила тока
$a = \ddot{x}$ - ускорение	$\frac{\partial i}{\partial t} = \ddot{q}$
$m$ - масса	$L$ - индуктивность
$F$ - сила	$V$ - ЭДС
$F = ma$ - Сила, характеризующая внешнее воздействие на систему	$V = L \frac{\partial i}{\partial t}$ - ЭДС характеризующая внешнее воздействие на систему
$F = kx$	$V = \frac{Q}{C}$
$k$	$\frac{1}{C}$
$\frac{kx^2}{2}$ - Потенциальная энергия	$\frac{q}{2C}$ - энергия заряженного конденсата
$\frac{mv^2}{2}$ - Кинетическая энергия	$\frac{Li^2}{2}$ - энергия индуктивности

*Таблица 3. Суммирующая таблица для пружинного маятника и колебательного контура*

# Механическая система

При построении эквивалентной электрической цепи для механической системы надо использовать следующее правило: те элементы механической системы, которые делят смещение, располагаются последовательно, а те элементы, которые делят силу – параллельно.

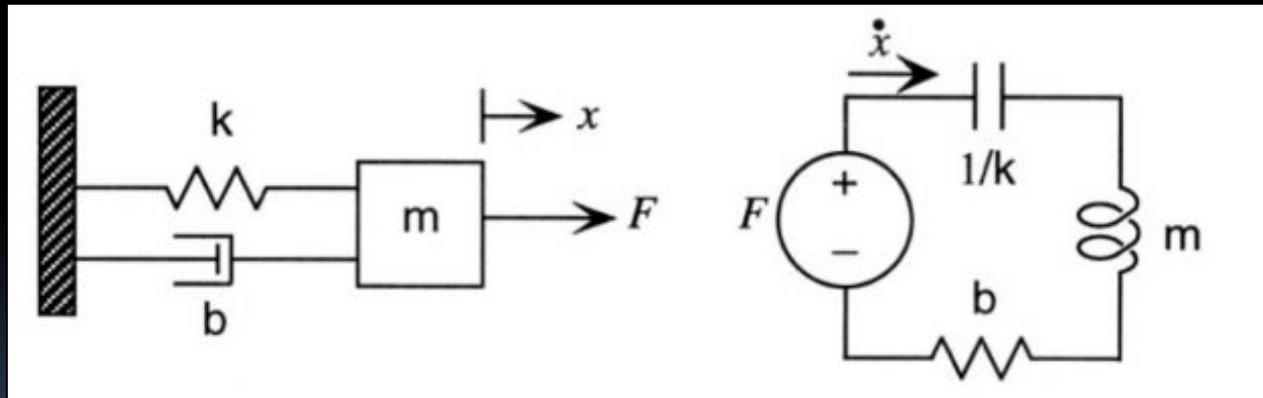
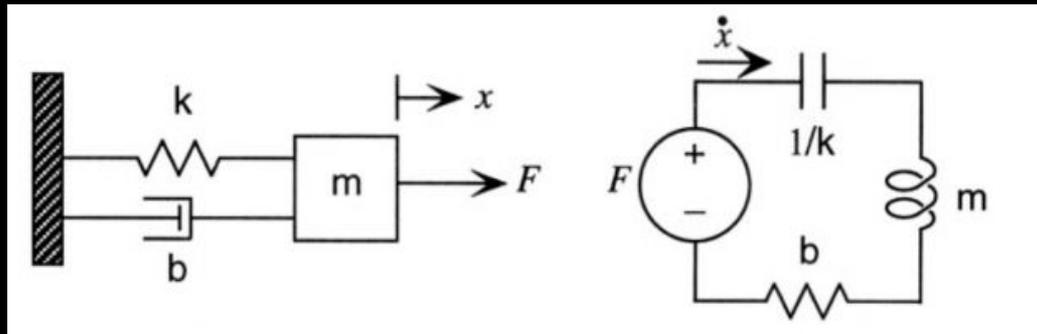


Рис. 1. а) система «пружина - демпфер – масса» б) эквивалентная электрическая схема.



Используя второй закон Ньютона можно расписать силы системы :

$$-F_{\text{внешняя}} + F_k + F_m + F_b = 0$$

Можно записать дифференциальное уравнение этой системы:

$$m_x \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k_x x = F_{\text{внешняя}} = m a_{\text{внешняя}}$$

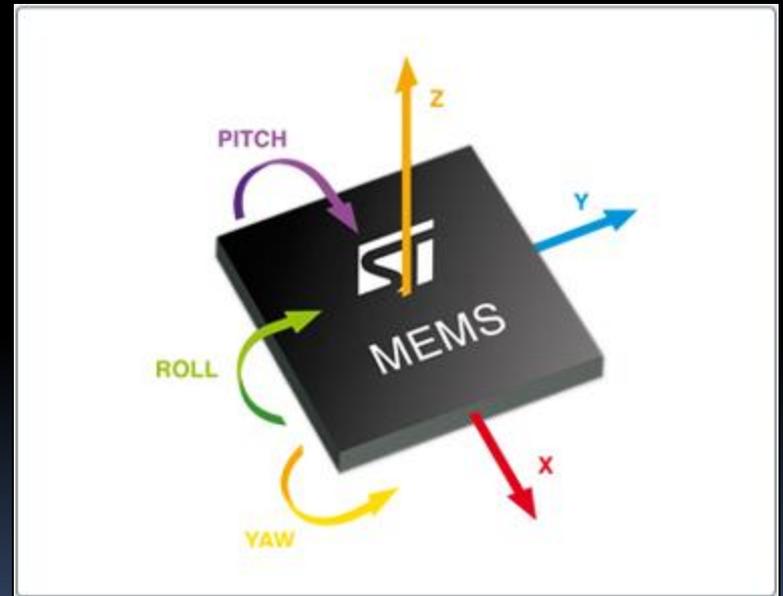
и по аналогии написать уравнение для электрического контура:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U(t).$$

При сопоставлении уравнений (2) и (3) видно, что эти уравнения, отличаются только обозначениями. Если знать решение одного из этих уравнений, то можно написать решение другого, просто изменив обозначения на эквивалентные в соответствии с таблицей 3., провести дальнейший анализ или найти желаемые величины. Также можно найти передаточную функцию, которая является одним из способов математического описания динамической системы.

# Энергопреобразующие устройства

Датчики – энергопреобразующие устройства. По определению, датчики взаимодействуют с двумя разными энергетическими подсистемами, всегда работают по крайней мере два энергетических домена. При их анализе используется метод, в котором для корректного моделирования посредством мультипортового элемента происходит соединение входов и выходов для разных типов энергий.



# Электростатический датчик на основе конденсатора и пружины

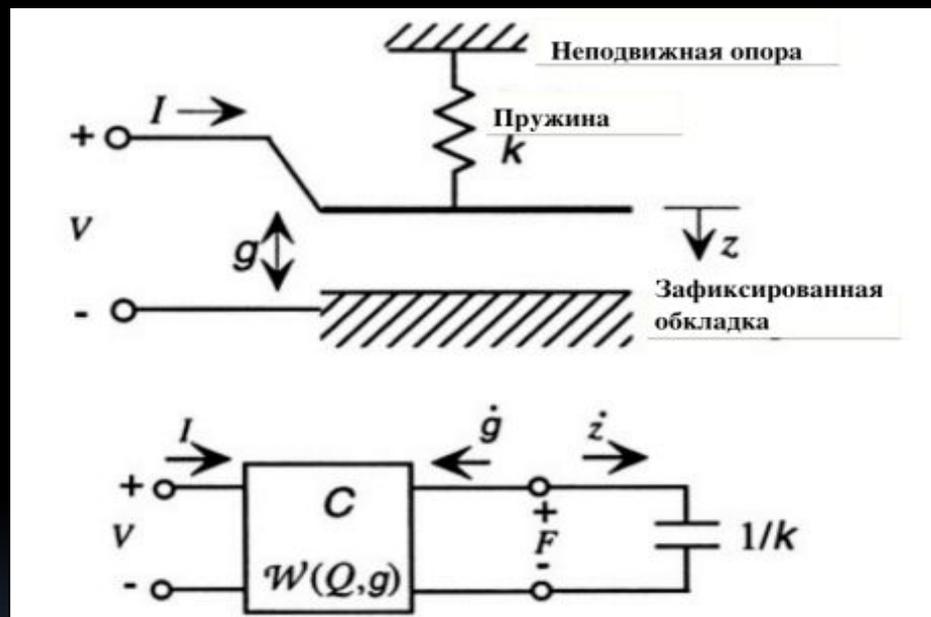
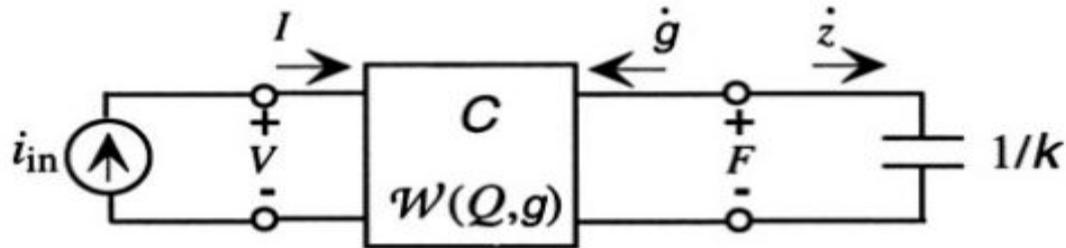


Рисунок 2.. Механическая и электрическая схемы базового электростатического сенсора



Где  $\dot{g}$  - смещение подвижной обкладки;  $\dot{z}$  - смещение (растяжение) пружины,  $i_{in}$  или  $i_{вх}$  - ток от источника тока;  $W(Q, g)$  - энергия заряженного конденсатора;  $\frac{1}{k}$  - жёсткость пружины, прикреплённой к подвижной обкладке конденсатора.

1.)

$$Q = \int_0^t i_{вх}(t) dt.$$

2.)

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon A},$$

3.)

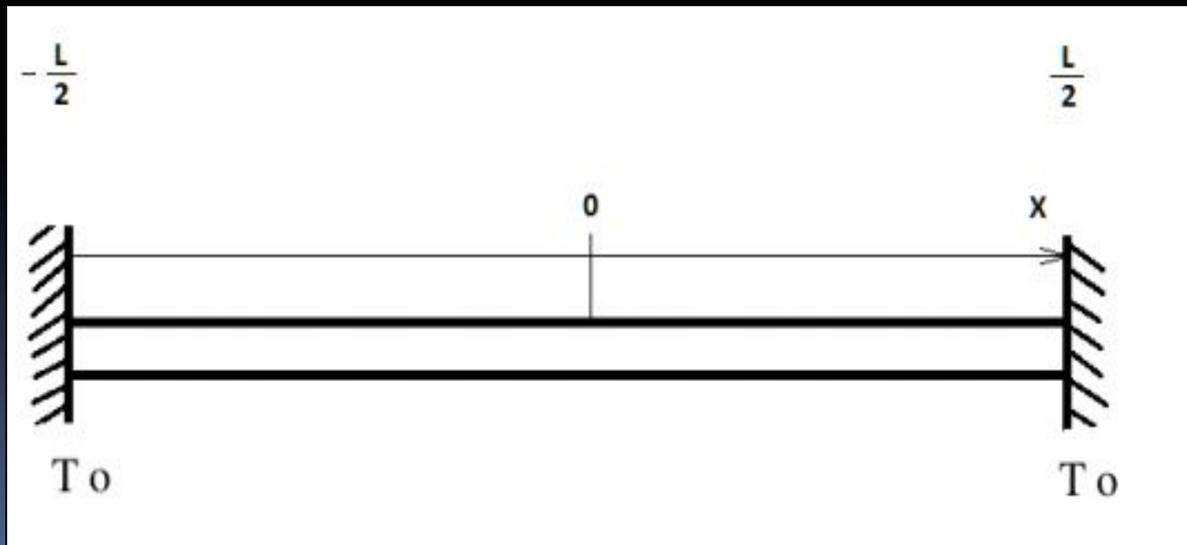
$$V = \frac{Qg}{\epsilon A} = \frac{Q(g_0 - \frac{Q^2}{2\epsilon A k})}{\epsilon A}.$$

# Датчик с диссипацией энергии из-за джоулева нагрева

Джоулев нагрев (также называют резистивным или омическим нагревом) описывает процесс, в котором при прохождении электрического тока по проводнику, энергия электрического тока преобразуется в тепловую энергию и выделяется тепло. В некоторых случаях, джоулев нагрев полезен для МЭМС устройств, а в других, это является нежелательным эффектом. В обоих случаях, выделение энергии является необратимым диссипативным процессом.

Подсистема	Диссипативный процесс
Движение твёрдого тела	Трение при контакте
Эластичность материала	Внутреннее трение
Электрическая	Джоулев нагрев, потери от диэлектриков
Магнитная	Вихревые токи, гистерезис
Жидкости	Вязкость
Химическая	Диффузия, химическая реакция
Тепловая	Теплопередача

Когда кремниевая балка нагревается, возникает явление теплового расширения кремния и/или возникает продольное механическое напряжение вдоль оси  $x$ , но концы балки фиксированы, и от опор возникает сила реакции опоры из этого следует, что механическое напряжение, возникший в результате теплового расширения – имеет сжимающий (компрессионный) характер.



Выгибание балки или потеря устойчивости первоначальной формы тела начнётся, когда напряжение в балке будет больше критического механического напряжения. Критическое механическое напряжение вычисляется по формуле Эйлера:

$$\sigma_{\text{Эйлера}} = -\frac{\pi^2}{3} E \left(\frac{H}{L}\right)^2.$$

Максимальный ток будет:

$$I_{\text{max}} = \sqrt{\frac{(-\sigma_{\text{Эйлера}})12kA^2}{\rho_e E \alpha_T L^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E H^2 12kW^2 H^2}{3L^2 \rho_e E \alpha_T L^2}} = 4\pi \frac{H^2 W}{L^2} \sqrt{\frac{k}{\rho_e \alpha_T}}.$$

Соответствующее увеличение температуры:

$$\Delta T_{\text{max}} = \Delta T(0) = \frac{\rho_e I_{\text{max}}^2 L^2}{2kA^2} \frac{1}{4} = \frac{\rho_e L^2}{8kW^2 H^2} \frac{16\pi^2 H^4 W^2 k}{L^4 \rho_e \alpha_T} = \frac{2\pi^2 H^2}{L^2 k \alpha_T}.$$

**Спасибо за внимание**