

***ВВЕДЕНИЕ В
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ***

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Под *множеством* понимают совокупность некоторых объектов, объединенных в одно целое по какому-либо признаку. Так, можно говорить о множестве студентов университета, о множестве корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, о множестве целых чисел и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами*. Множество принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, \dots, X, Y, \dots , а их элементы – малыми буквами a, b, \dots, x, y, \dots

Если элемент x принадлежит множеству X , то записывают $x \in X$; запись $x \notin X$ или $x \bar{\in} X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом \emptyset .

Множество задается двумя способами: перечислением и описанием. Например, запись $A = \{2,4,10\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 2,4 и 10; запись $X = \{x: 0 \leq x \leq 3\}$ означает, что множество X состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leq x \leq 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество A называется подмножеством множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B . Символически это обозначают так: $A \subset B$. (A содержится в B).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, и пишут $A = B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Объединением или суммой множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств обозначают $A \sqcup B$ (или $A + B$). Кратно можно записать $A \sqcup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пересечением или произведением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B . Пересечение множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Разностью множеств A и B называется множество, каждый элемент которого является элементом множества A и не является элементом множества B . Разность множеств обозначают $A \setminus B$. По определению $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ – множество целых чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N \right\}$ – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел. Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической

дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ – рациональные числа.

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Так, $\sqrt{2} = 1,4142356\dots$, $\pi = 3,1415926\dots$ – иррациональные числа.

Введем некоторые наиболее часто встречающиеся подмножества множества действительных чисел \mathbb{R} . Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$. Тогда

$[a; b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x : a < x < b\}$ – интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x : a \leq x < b\}$,

- полуоткрытые интервалы;

$(a; b] = \{x : a < x \leq b\}$

$(-\infty; b] = \{x : x \leq b\}$, $[a; +\infty) = \{x : x \geq a\}$,

- бесконечные интервалы.

$(-\infty; \infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$

Пусть x_0 – любое действительное число.

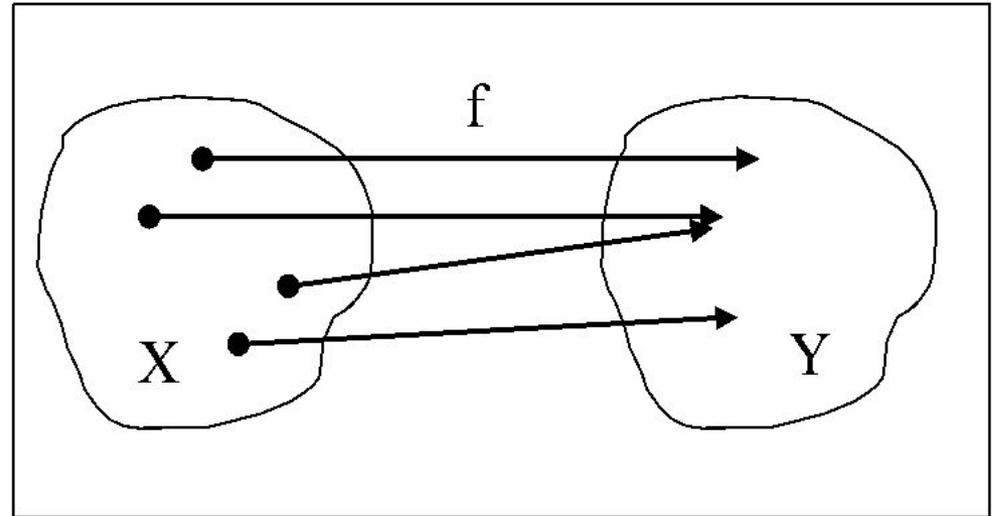
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0 . В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε -окрестностью точки x_0 . Число x_0 называется центром, а число ε – радиусом.

Если $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего означает попадание точки x в ε -окрестность точки x_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть даны два непустых множества X и Y .

Соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один единственный элемент $y \in Y$, называется функцией и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \rightarrow Y$.

Говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y .



Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

1.2.2. Числовые функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \rightarrow Y$. Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют *числовой функцией*. В дальнейшем мы будем изучать только числовые функции и их записывать: $y = f(x)$.

Переменная x называется аргументом или независимой переменной, а y – функцией или зависимой переменной.

Пусть каждой паре чисел x и y , где $y = f(x)$, поставлена в соответствие точка (x, y) координатной плоскости. Множество всех точек (x, y) плоскости таких, что $x \in D(f)$ и $y \in E(f)$, называется *графиком функции*.

В зависимости от характера соответствия f различают функции, заданные таблично, графически и аналитически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для всех x из области определения, числа $x \pm T$ также принадлежат области определения и справедливо равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

При этом наименьшее из чисел T называют *периодом* функции. Если T – период функции, то всякое число nT , где $n = \pm 1; \pm 2, \dots$ также является периодом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля и для каждого x из области определения $f(-x) = f(x)$, называется *четной*; *нечетной* – если $\forall x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – симметричен относительно начала координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть функция $y = f(x)$ определена в области D . Если для любых $x_1, x_2 \in X \subset D(f)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *возрастающей* на множестве X ; если же $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется *неубывающей* на множестве X ; если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей* на множестве X ; если же $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функция называется *невозрастающей* на множестве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Функции только возрастающие (неубывающие) или только убывающие (невозрастающие) на множестве X называются *монотонными* на этом множестве.

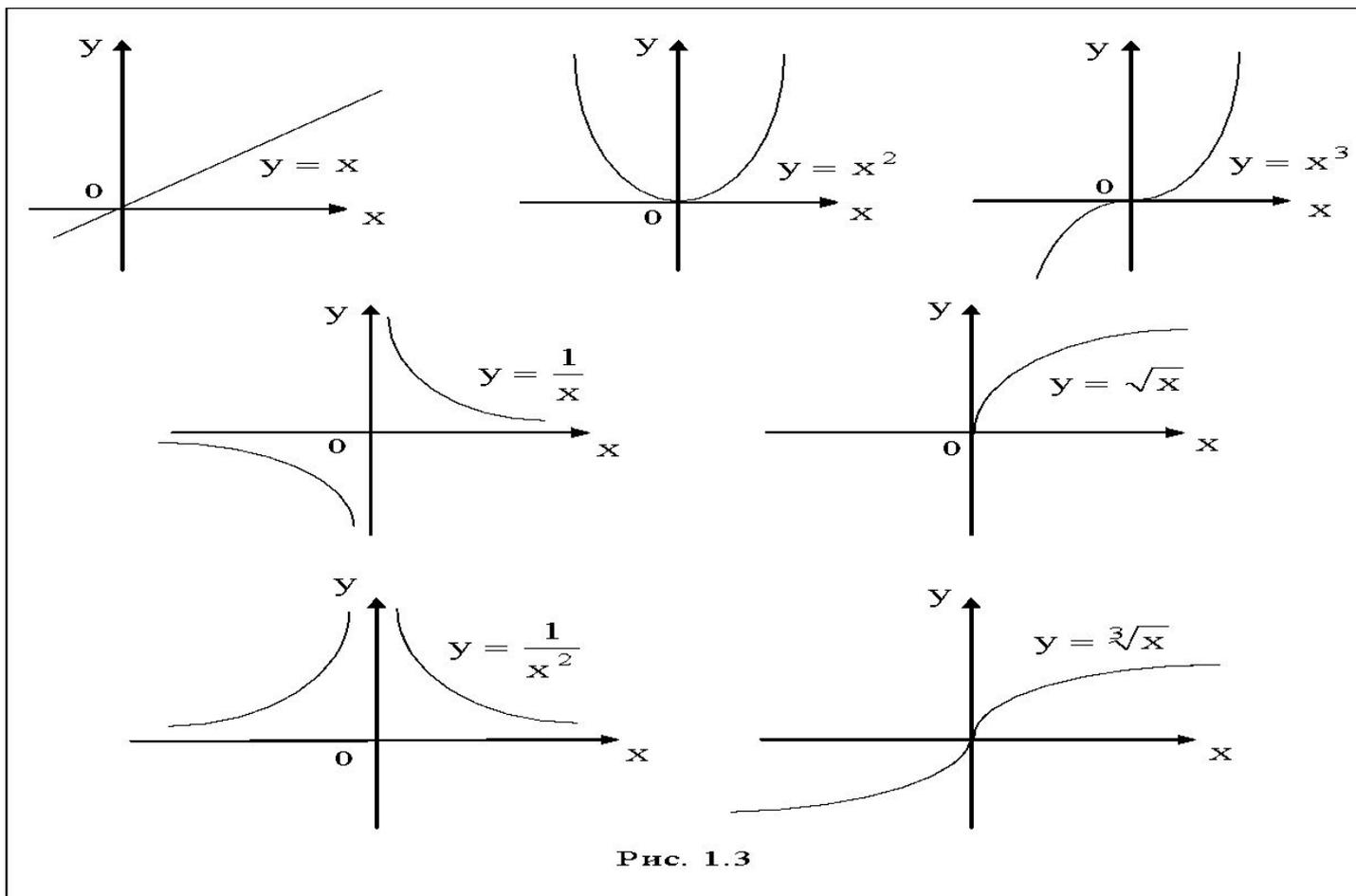
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X , если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной на всей числовой прямой ($|\sin x| \leq 1$), а функция $y = 2x + 5$ не ограничена на \mathbb{R} .

1.2.3. Основные элементарные функции и их графики

1. Степенная функция .

Графики степенных функций, соответствующих различным показателям степени, представлены на рис. 1.3.



2. Показательная функция

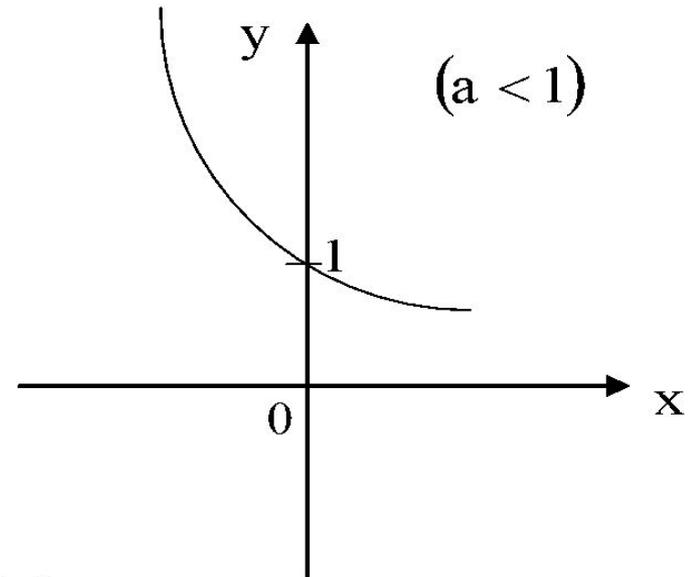
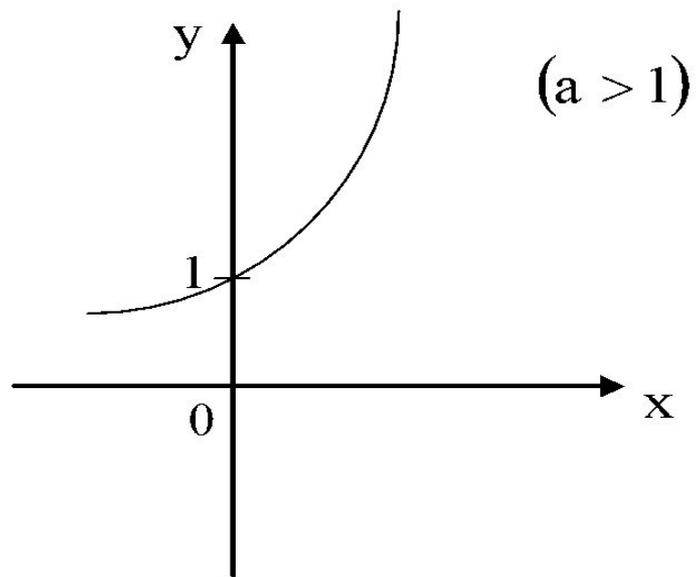


Рис. 1.4

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

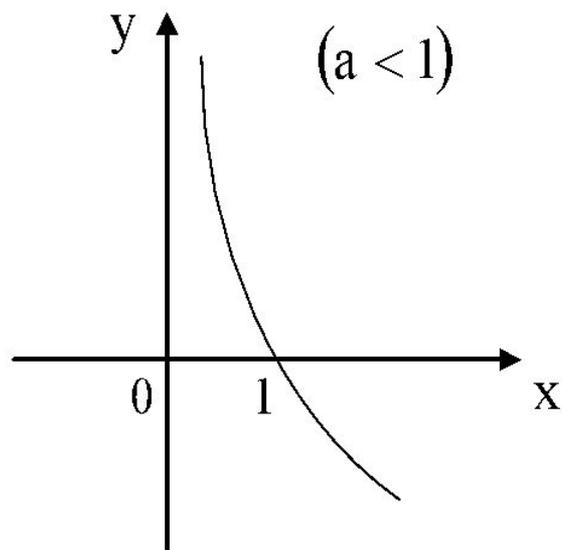
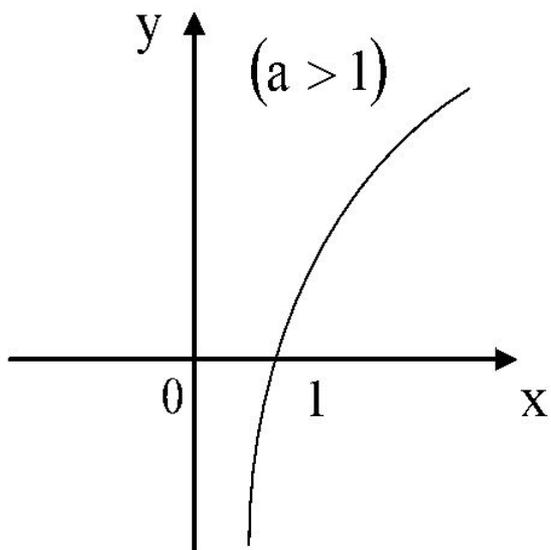


Рис. 1.5

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$,

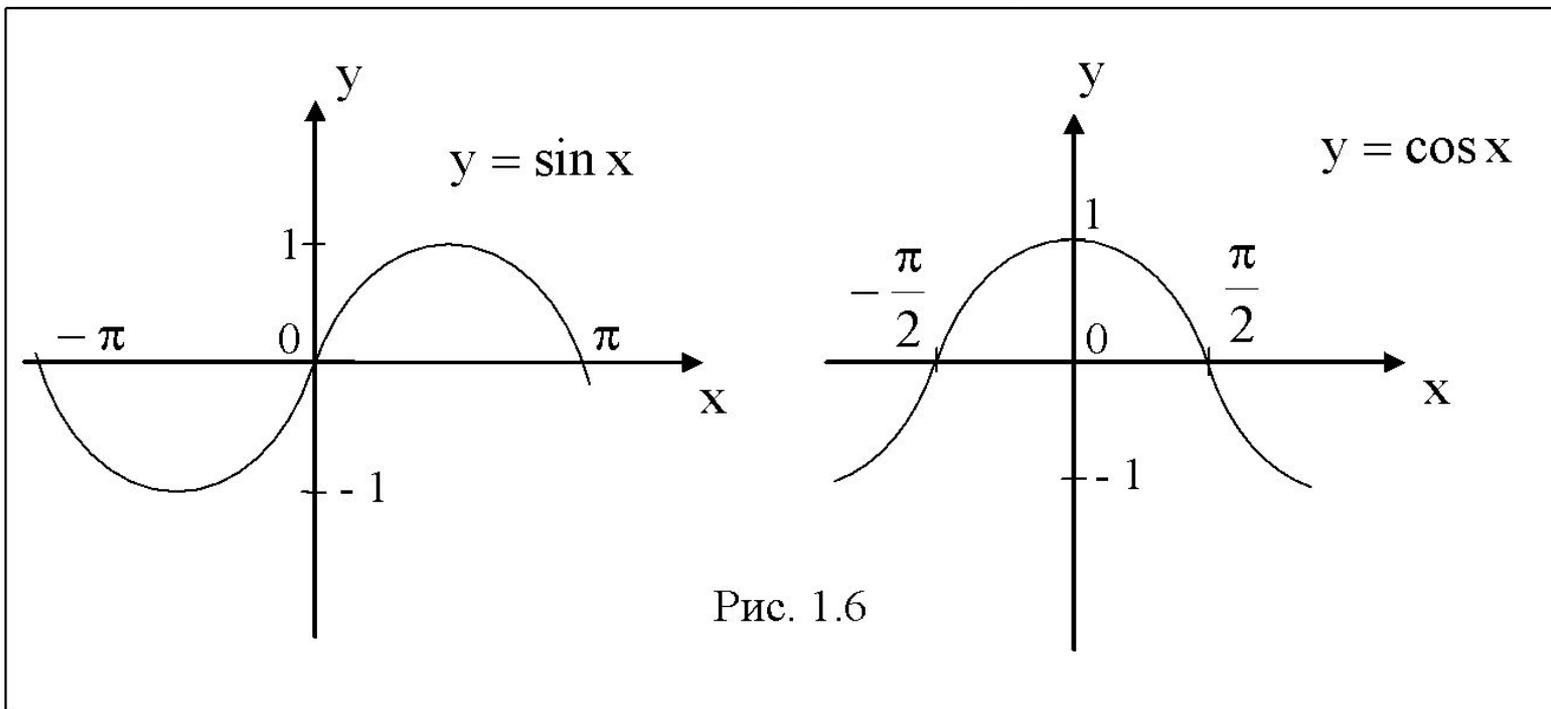
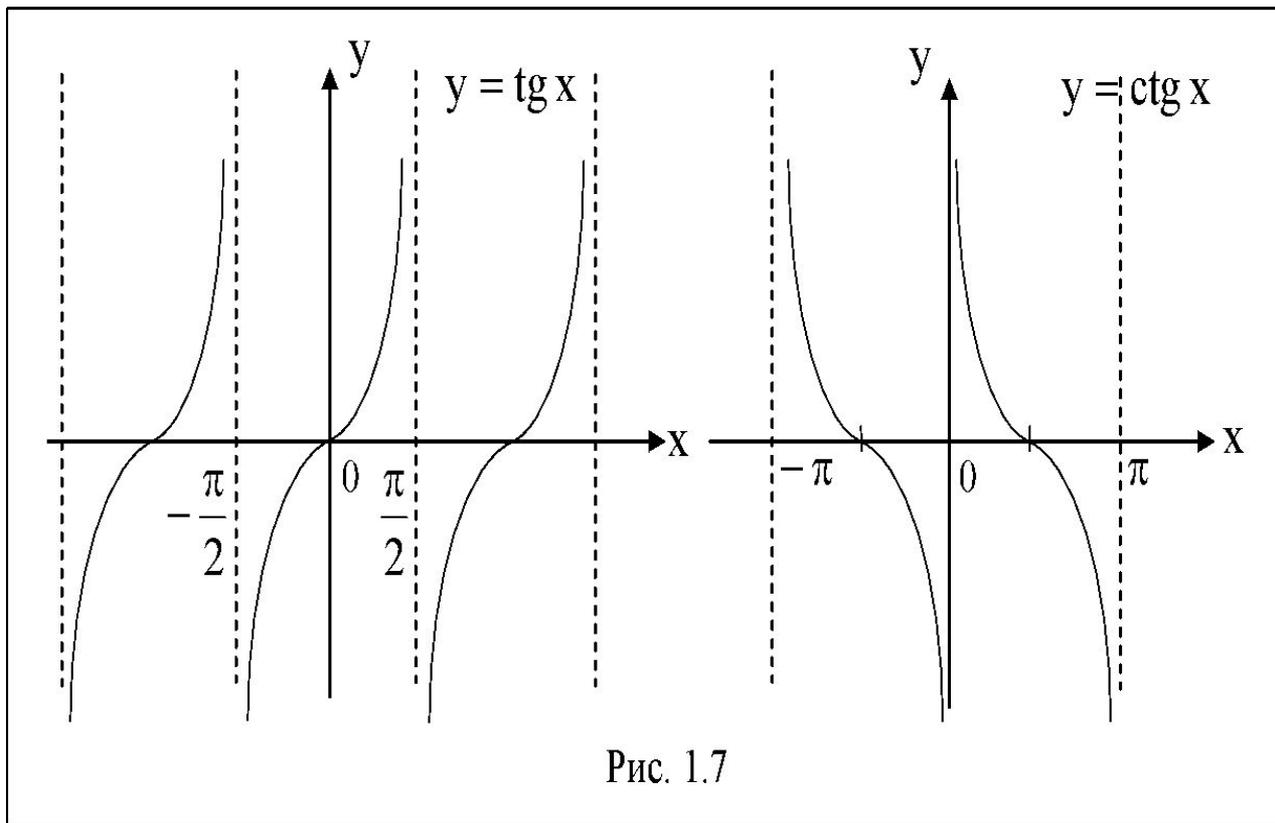


Рис. 1.6

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x$$



5. Обратные тригонометрические функции

$$y = \arcsin x, \quad D(f) = [-1; 1], \quad E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, \quad D(f) = [-1; 1], \quad E(f) = [0; \pi];$$

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arccctg} x, \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad E(f) = (0; \pi).$$

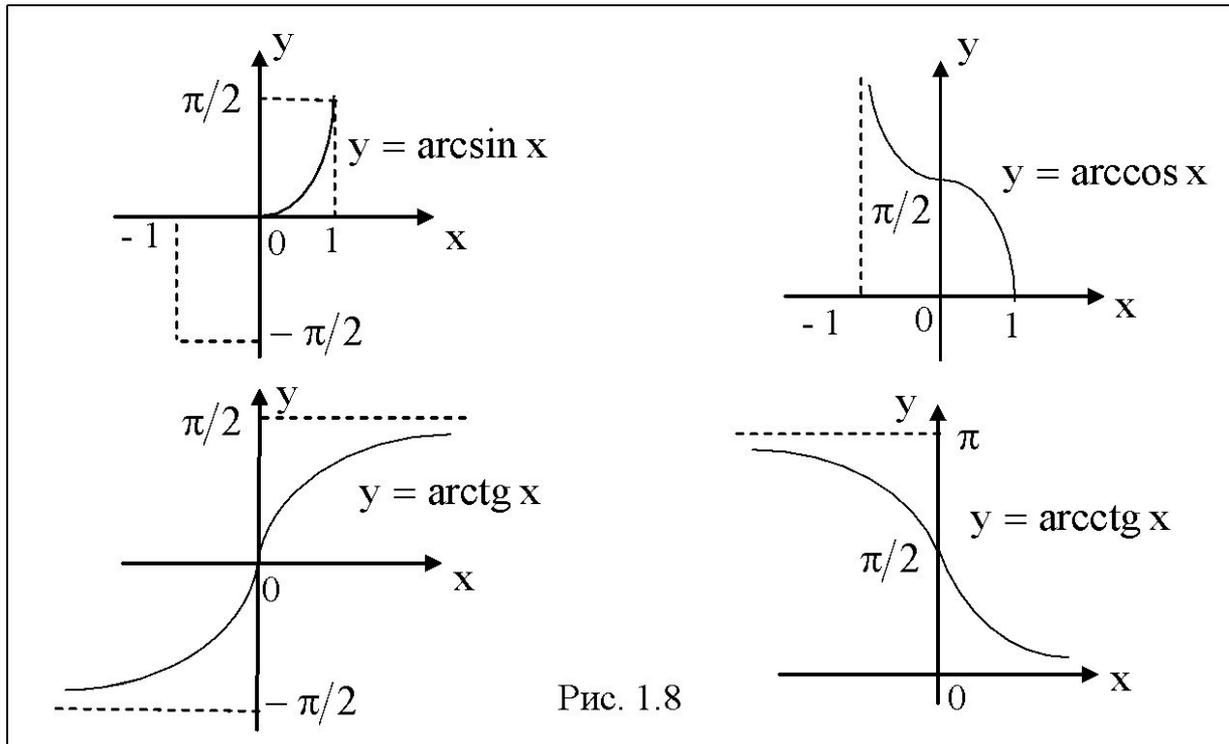


Рис. 1.8

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных величин с помощью конечного числа арифметических операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций взятия функции от функции, называется *элементарной функцией*.

Примерами элементарных функций являются:

$y = ax + b$ - линейная функция $a, b \in \mathbb{R}$;

$y = ax^2 + bx + c$ - квадратичная функция $a, b, c \in \mathbb{R}$;

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ - целая рациональная функция или многочлен степени n $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$;

1.2.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E . Тогда каждому значению $x \in D$ соответствует единственное значение $y \in E$. Пусть, в свою очередь, каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, тогда мы получаем новую функцию $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (рис. 1.9).

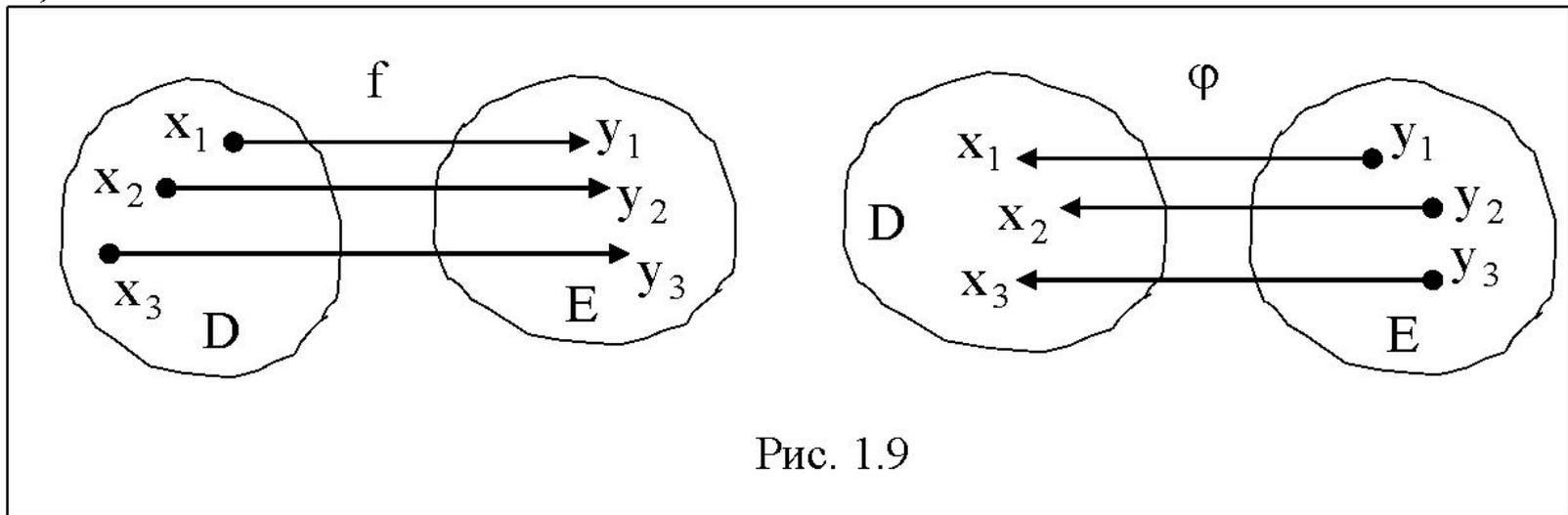


Рис. 1.9

ПРИМЕР 1.1. Для функции $y = 3x + 5$ обратной функцией является

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}.$$

ПРИМЕР 1.2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0; +\infty)$ обратной функцией является $x = \sqrt{y}$, $y \in [0; +\infty)$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной в промежутке $(-\infty; \infty)$, обратной не существует, так как одному значению y соответствуют два значения x .

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ симметричны относительно прямой $y = x$.