ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Под *множеством* понимают совокупность некоторых объектов, объединенных в одно целое по какому-либо признаку. Так, можно говорить о множестве студентов университета, о множестве корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, о множестве целых чисел и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами*. Множество принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots, \ldots$, а их элементы – малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \,\overline{\in}\, X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Множество задается двумя способами: перечислением и описанием. Например, запись $A = \{2,4,10\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 2,4 и 10; запись $X = \{x: \ 0 \le x \le 3\}$ означает, что множество X состоит из всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \le x \le 3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Множество A называется подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так: $A \subset B$. (A содержится в B).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, и пишут $A = B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Объединением или суммой множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному их этих множеств. Объединение множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратно можно записать $A \cup B = \{x : x \in A$ **или** $x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пересечением или произведением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Разностью множеств A и B называется множество, каждый элемент которого является элементом множества A и не является элементом множества B. Разность множеств обозначают A / B. По определению $A / B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$.

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ – множество целых чисел;

$Q = \left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\}$ – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел. Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью. Так, $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ – рациональные числа.

Иррациональное число выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Так, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ – иррациональные числа.

Введем некоторые наиболее часто встречающиеся подмножества множества действительных чисел R. Пусть a и b – действительные числа, причем $a < b$. Тогда

$[a;b] = \{x : a \le x \le b\}$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a;b) = \{x : a < x < b\}$ – интервал (открытый промежуток);

$[a;b) = \{x : a \le x < b\}$,

$(a;b] = \{x : a < x \le b\}$ - полуоткрытые интервалы;

$(-\infty;b] = \{x : x \le b\}, [a;+\infty) = \{x : x \ge a\}$,

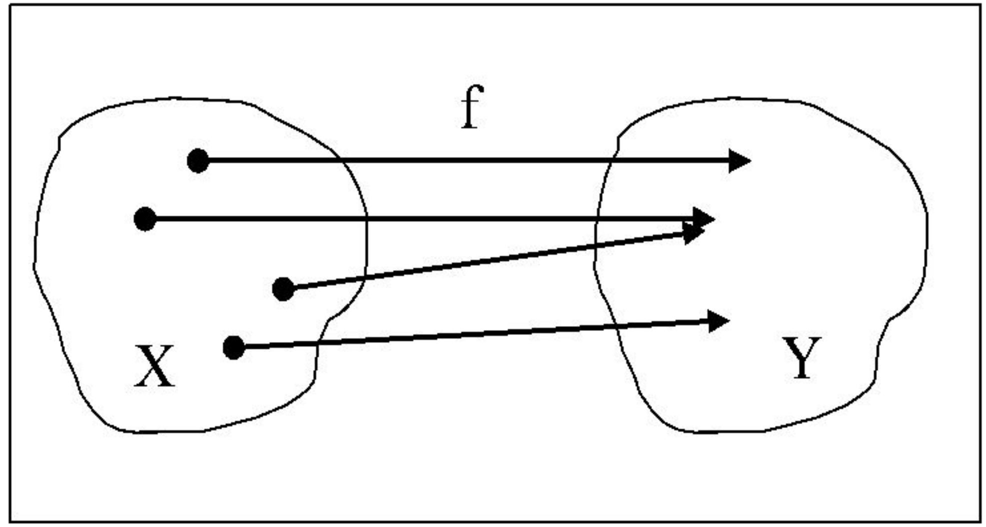
$(-\infty;\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = R$ - бесконечные интервалы.

Пусть x_0 – любое действительное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Окрестностью точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется $\varepsilon-$ окрестностью точки x_0. Число x_0 называется центром, а число ε – радиусом.

Если $x\in(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$, то выполняется неравенство $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, или, что то же, $|x-x_0|<\varepsilon$. Выполнение последнего означает попадание точки x в $\varepsilon-$ окрестность точки x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один единственный элемент $y \in Y$, называется функцией и записывается $y = f(x),\ x \in X$ или $f : X \to Y$.



Говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y.

Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

1.2.2. Числовые функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f: X \to Y$. Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют ***числовой функцией.*** В дальнейшем мы будем изучать только числовые функции и их записывать: $y = f(x)$.

Переменная x называется аргументом или независимой переменной, а y − функцией или зависимой переменной.

Пусть каждой паре чисел x и y, где $y = f(x)$, поставлена в соответствие точка (x, y) координатной плоскости. Множество всех точек (x, y) плоскости таких, что $x \in D(f)$ и $y \in E(f)$, называется ***графиком функции.***

В зависимости от характера соответствия f различают функции, заданные таблично, графически и аналитически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T > 0$, что для всех x из области определения, числа $x \pm T$ также принадлежат области определения и справедливо равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

При этом наименьшее из чисел T называют ***периодом*** функции. Если T – период функции, то всякое число nT, где $n = \pm 1; \pm 2, \ldots$ также является периодом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля и для каждого x из области определения $f(-x) = f(x)$, называется ***четной***; ***нечетной*** – если $\forall x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – симметричен относительно начала координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть функция $y = f(x)$ определена в области D. Если для любых $x_1, x_2 \in X \subset D(f)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется ***возрастающей*** на множестве X; если же $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** на множестве X; если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется ***убывающей*** на множестве X; если же $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция называется ***невозрастающей*** на множестве X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Функции только возрастающие (неубывающие) или только убывающие (невозрастающие) на множестве X называются ***монотонными*** на этом множестве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной на всей числовой прямой $(|\sin x| \leq 1)$, а функция $y = 2x + 5$ не ограничена на R.

1.2.3. Основные элементарные функции и их графики

1. Степенная функция .

Графики степенных функций, соответствующих различным показателям степени, представлены на рис. 1.3.

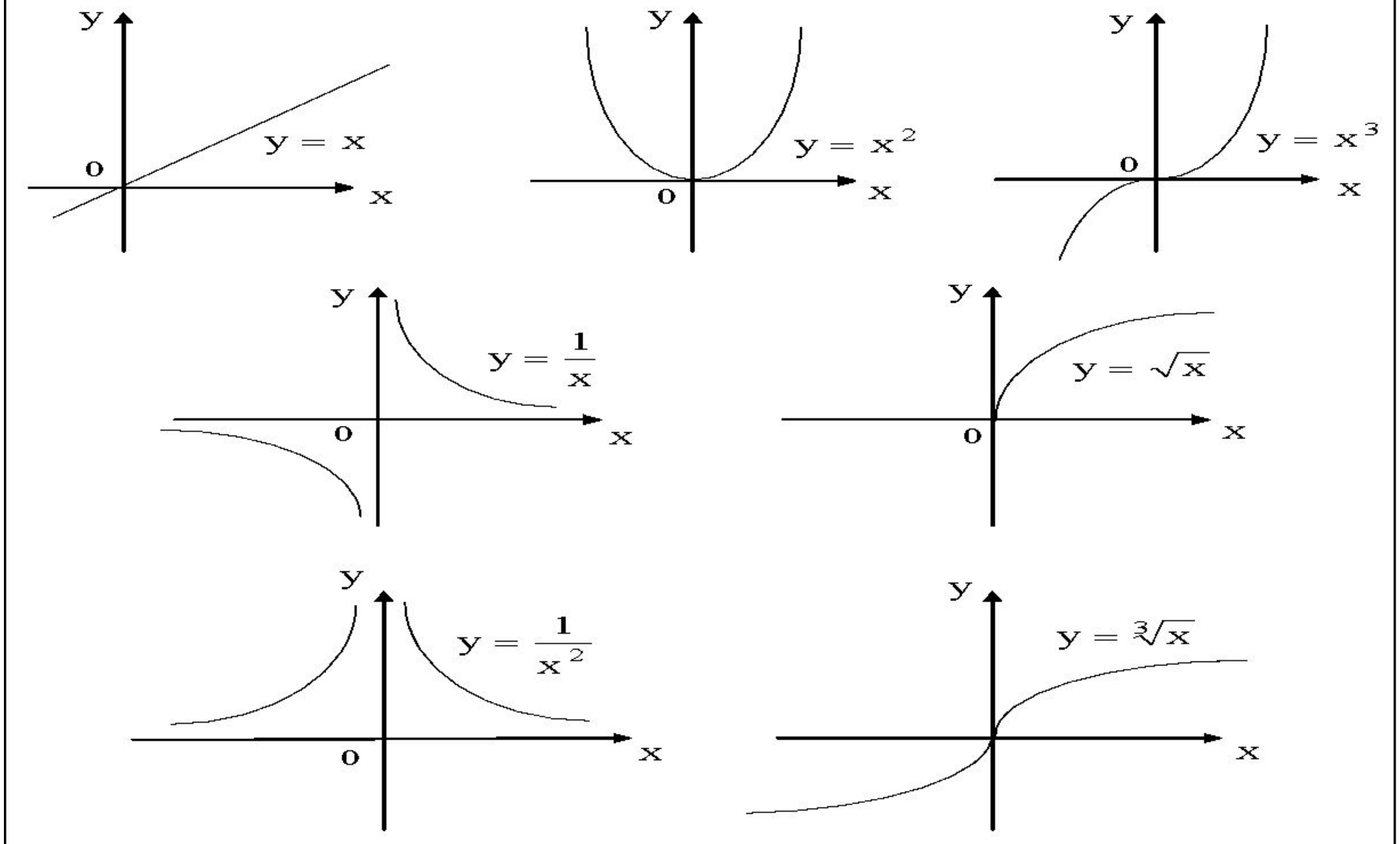


Рис. 1.3

2. Показательная функция

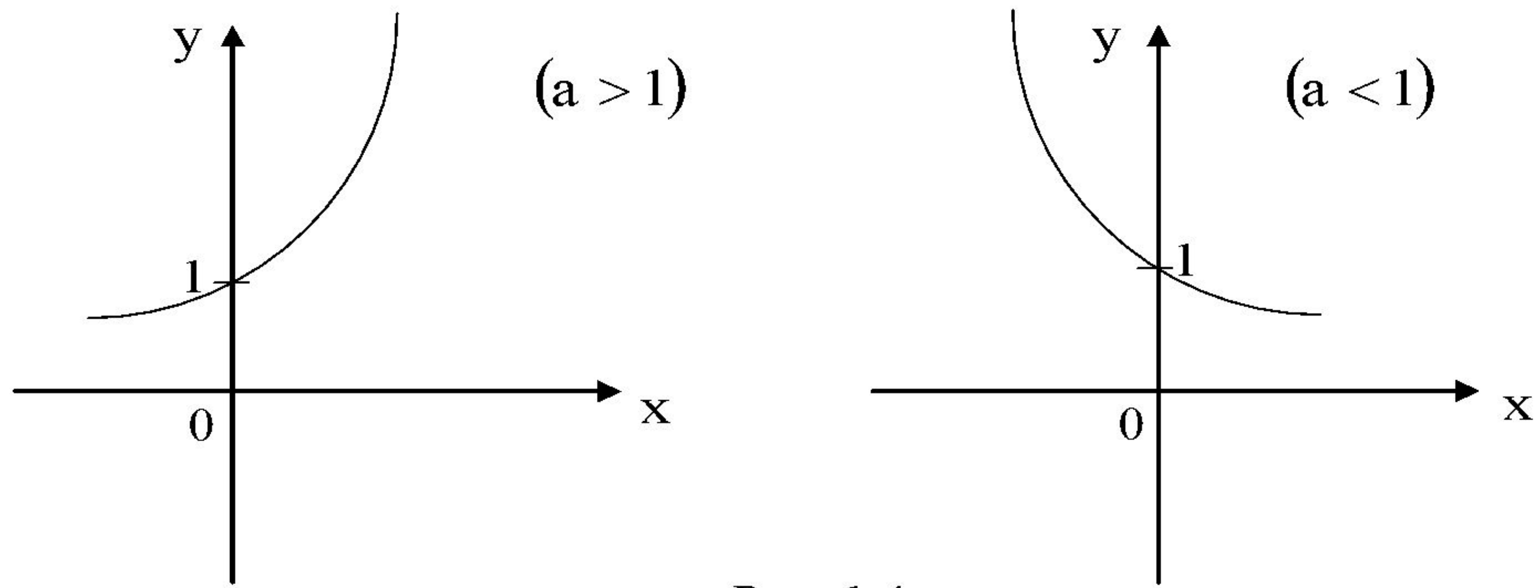
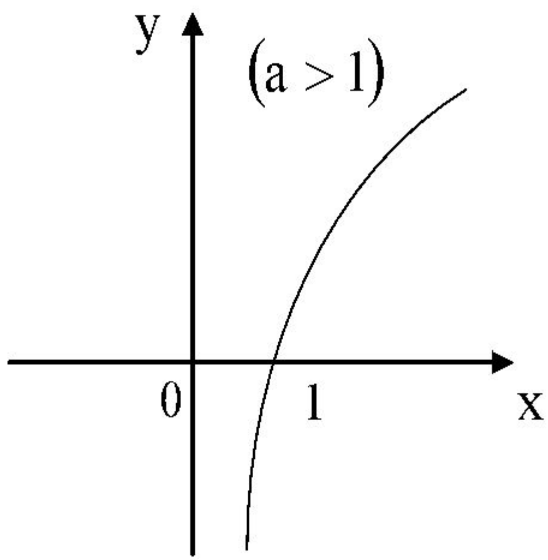


Рис. 1.4

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1;$



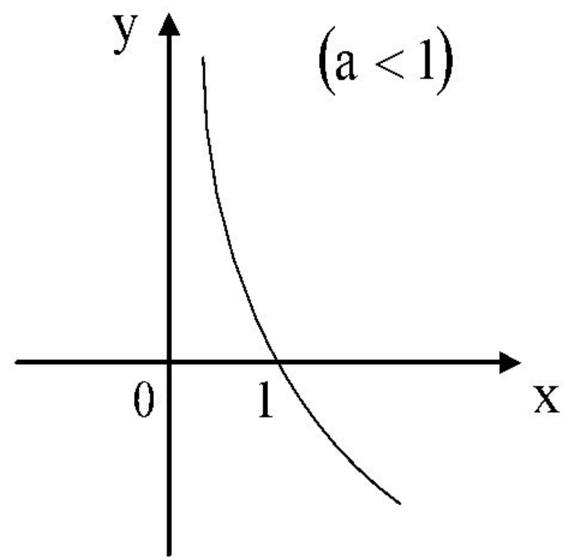


Рис. 1.5

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$,

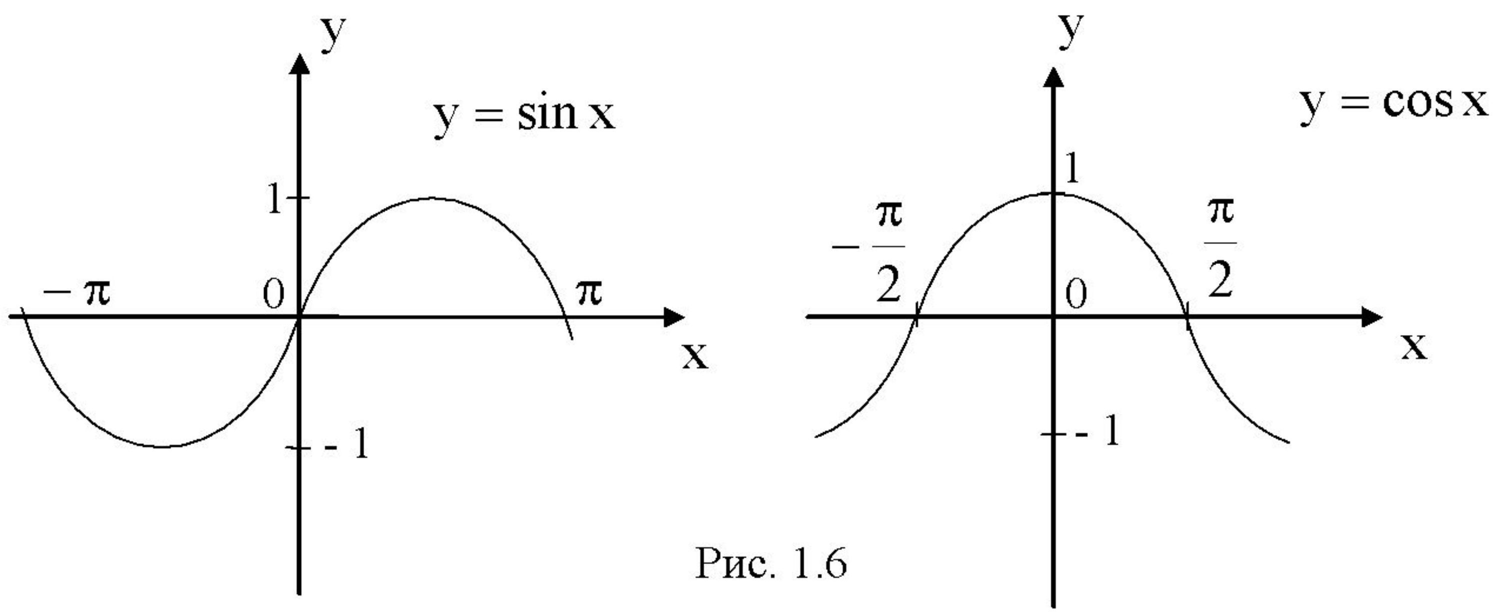


Рис. 1.6

$y = \mathrm{tg}\, x,\ y = \mathrm{ctg}\, x$

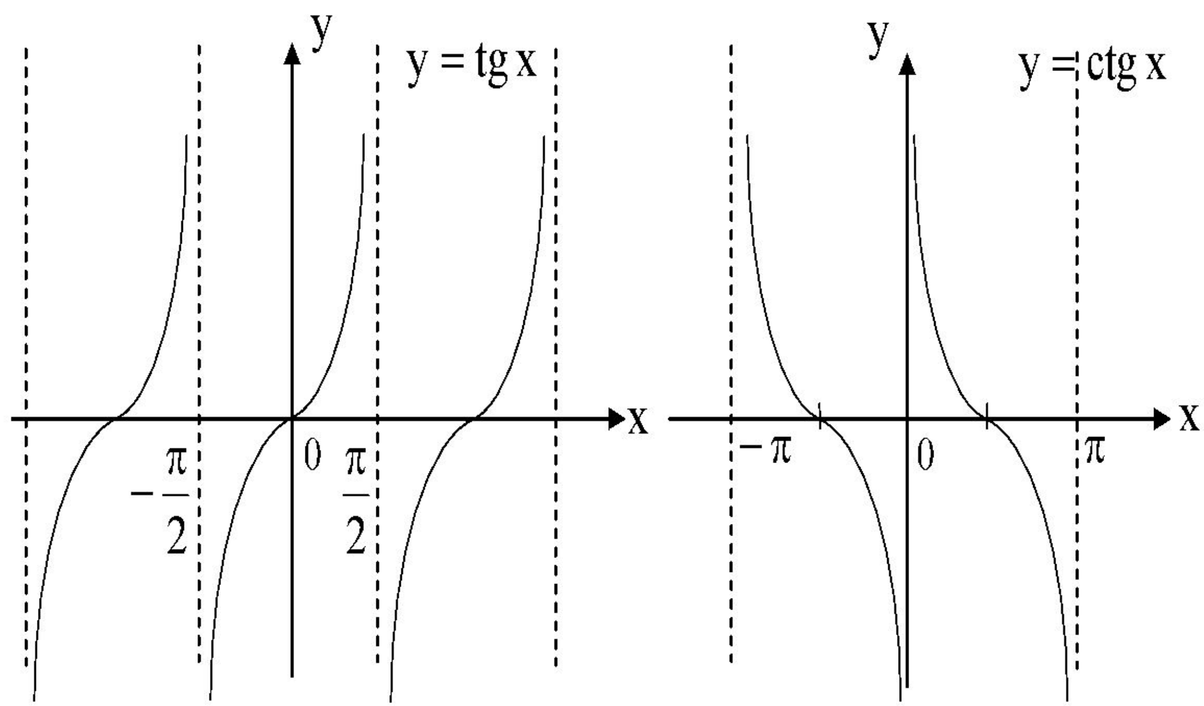


Рис. 1.7

5. Обратные тригнометрические функции

$$y = \arcsin x, \quad D(f) = [-1;1], \quad E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, \quad D(f) = [-1;1], \quad E(f) = [0; \pi];$$

$$y = \mathrm{arctg}\, x, \quad D(f) = R, \quad E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \mathrm{arcctg}\, x, \quad D(f) = R, \quad E(f) = (0; \pi).$$

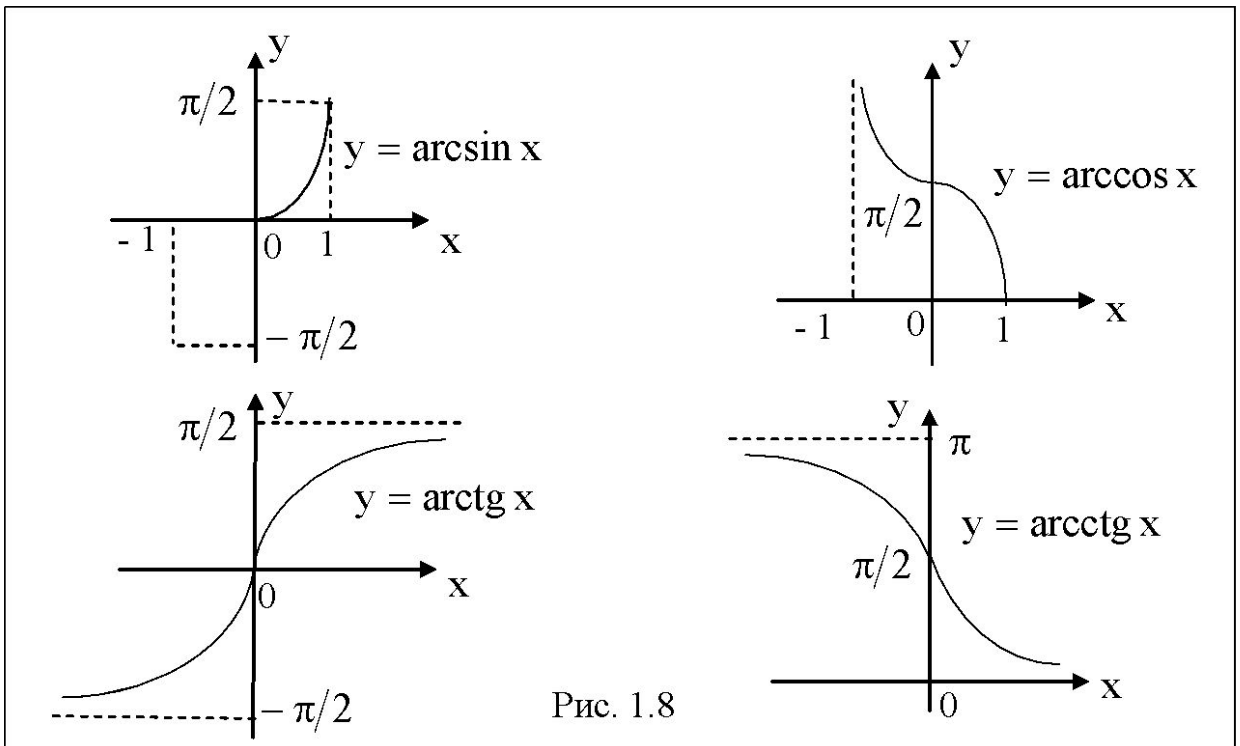


Рис. 1.8

Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных величин с помощью конечного числа арифметических операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***.

Примерами элементарных функций являются:

$y = ax + b$ - линейная функция $a, b \in R$;

$y = ax^2 + bx + c$ - квадратичная функция $a, b, c \in R$;

$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ - целая рациональная функция или многочлен степени n $a_0, \dots, a_n \in R$, $n \in N$;

1.2.4. Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Тогда каждому значению $x \in D$ соответствует единственное значение $y \in E$. Пусть, в свою очередь, каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, тогда мы получаем новую функцию $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (рис. 1.9).

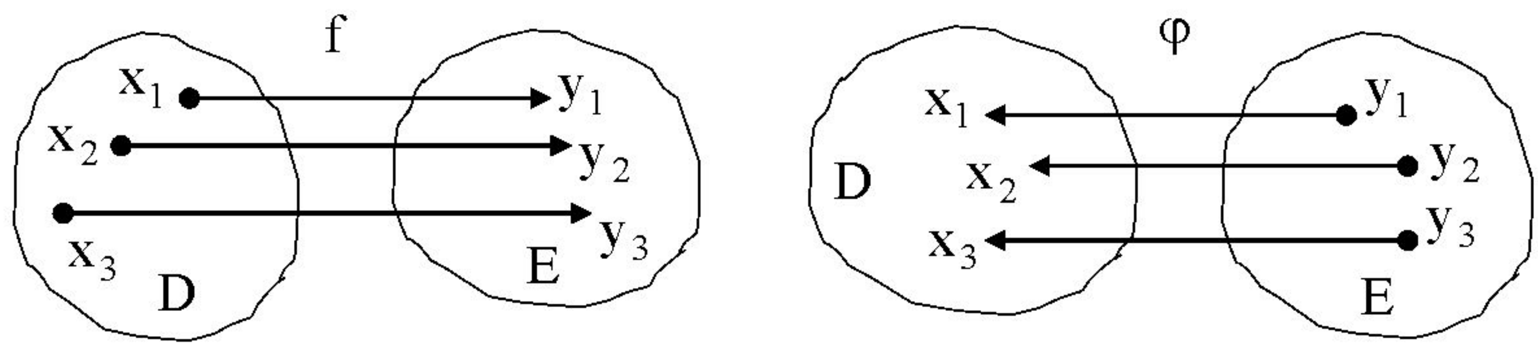


Рис. 1.9

ПРИМЕР 1.1. Для функции $y = 3x + 5$ обратной функцией является $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$.

ПРИМЕР 1.2. Для функции $y = x^2$, $x \in [0;+\infty)$ обратной функцией является $x = \sqrt{y}$, $y \in [0;+\infty)$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной в промежутке $(-\infty;\infty)$, обратной не существует, так как одному значению y соответствуют два значения x.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ симметричны относительно прямой $y = x$.