Доверительный интервал косвенных измерений

- *Косвенное измерение* – определение искомого значения физической величины на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной.

- При косвенных измерениях искомое значение величины Q рассчитывают на основании известной функциональной зависимости этой величиной от величин, подвергаемых прямым измерениям.

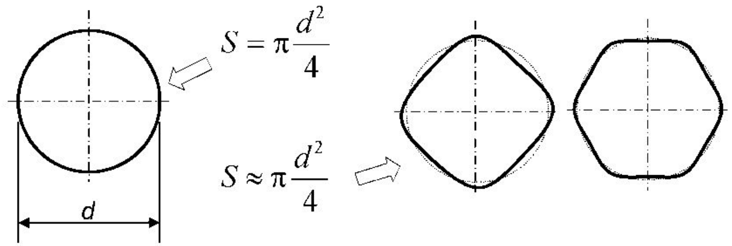
$$Q = F(X, Y, \ldots, Z),$$

где $X, Y, \ldots, Z$ – результаты прямых измерений соответствующих величин.

- Принципиальной особенностью косвенных измерений является обработка (преобразование) результатов вне прибора (вручную или автоматически с помощью компьютера). Характерным признаком косвенных измерений является процедура выбора косвенной зависимости $Q = F(X, Y, \ldots, Z)$. Имеется в виду подтверждение степени адекватности принятой идеализированной модели связи величин фактическим значениям искомой величины.

Примерами косвенных измерений можно рассматривать:

- **определение площади сечения *S* арматурного стержня круглого сечения (см. рис.) по данным измерения его диаметра: искомая величина – площадь сечения *S* , косвенный параметр – диаметр *d*. В данном случае мы имеем однопараметровые косвенные измерения**



- **определение площади помещения *S* по данным измерения его длины *a* и ширины *b***

$$S = a \cdot b\ .$$

в этом случае мы имеем многопараметровые косвенные измерения (два параметра – *a* и *b*)

В общем случае ситуацию с косвенными измерениями можно формализовать следующим образом

y **= F(x, z,…,q) , где y – искомая величина, x, z,…,q – косвенные величины (параметры)**

Независимо от числа параметров, результат должен быть представлен доверительным интервалом по стандартной форме

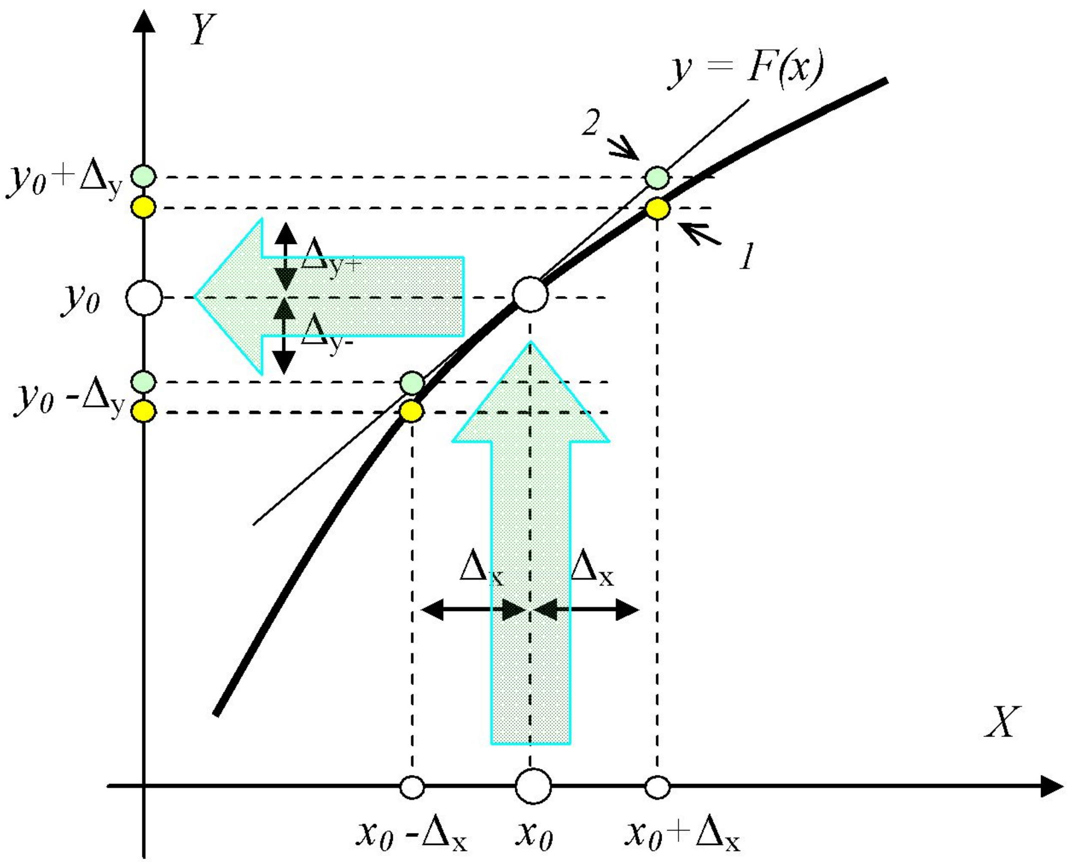
$$y = y_0 \pm \Delta y$$

где y_0 – точечная оценка, Δy – полуширина доверительного интервала

I . Однопараметровые косвенные измерения

Алгоритм расчета доверительного интервала косвенных измерений базируется на алгоритме расчета доверительного интервала прямых измерений косвенных параметров.

Дано: $y = F(x)$; $x = x_0 \pm \Delta x$



$y_0 = F(x_0)$

Точные (универсальные) зависимости

$+\Delta y = F(x_0+\Delta x) - F(x_0)$

$-\Delta y = F(x_0-\Delta x) - F(x_0)$

Приближенная зависимость

$\Delta y \approx \Delta x \cdot dF(x)/dx;\ x = x_0$

Разница результатов расчета доверительного интервала **Δy** по точной и приближенной зависимостям зависит от степени «кривизны» функциональной зависимости и от ширины доверительного интервала для **x** - **±Δx**.

В подавляющем большинстве практических случаев, и учитывая необходимость округления доверительного интервала, разницу расчетных значений доверительного интервала по точной формуле и по приближенной можно не принимать во внимание.

Приближенная формула особенно удобна в случаях, когда связь между *y* и *x* выражается степенной функцией, то есть

! $$y = A \cdot x^{B}$$

В этом случае $\Delta y = A \cdot B \cdot x^{B-1} \cdot \Delta x$

Воспользуемся представлением доверительного интервала в относительных показателях

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y_0} \qquad \delta x = \frac{\Delta x}{x_0}$$

В этом случае можно записать

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{A \cdot B \cdot x^{B-1} \cdot \Delta x}{A \cdot x_0^B} = B\frac{\Delta x}{x_0} = B \cdot \delta x$$

$$! \quad \delta y = B \cdot \delta x$$

Относительная погрешность искомой величины ***y*** будет в *B* раз больше относительной погрешности косвенной величины ***x***

Например, требуется определить доверительный интервал оценки объема V шара, если величина его диаметра 1). D = 15±1 см . 2). D = 15,0±0,1 см .

Расчет точечной оценки объема шара V_0.
Исходя из формулы объема шара можем записать:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi \cdot D_0^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}1415 \cdot 15^3 = 14136{,}7 см^3$$

Вариант решения 1. Используем точную формулу расчета ΔV.
Исходя из формулы объема шара можем записать:

$$+\Delta V = \frac{4}{3}\pi \cdot (D_0 + \Delta D)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot D_0^3 = 17156{,}8 - 14136{,}7 = 3020{,}1 см^3$$

$$-\Delta V = \frac{4}{3}\pi \cdot (D_0 - \Delta D)^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot D_0^3 = 11493{,}7 - 14136{,}7 = -2643{,}0 см^3$$

D = 15±1 см

$$V = 14100^{+3000}_{-2600} см^3$$

Для D = 15,0±0,1 см получим следующие значения
ΔV:

$$+\Delta V=\frac{4}{3}\pi\cdot(D_0+\Delta D)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot D_0^3=14421{,}4-14136{,}7=284{,}7см^3$$

$$-\Delta V=\frac{4}{3}\pi\cdot(D_0-\Delta D)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot D_0^3=13855{,}9-14136{,}7=-280{,}8см^3$$

$$\boxed{V=14140\pm280см^3}$$

D = 15,0±0,1 см

Вариант решения 2. Используем приближенную формулу расчета ΔV, учитывая, что связь объема и диаметра выражается степенной функцией

$$\delta D=\frac{\Delta D}{D_0}=\frac{1}{15}=0{,}06666$$

$$\delta V=3\cdot\delta D=3\cdot0{,}0666(6)=0{,}2$$

$$\Delta V=\delta V\cdot V_0=0{,}2\cdot14136{,}4=2827{,}3см^3$$

$$\boxed{V=14100\pm2800см^3}$$

D = 15±1 см

Для D = 15,0±0,1 см получим следующие значения
ΔV:

$$\delta D=\frac{\Delta D}{D_0}=\frac{0{,}1}{15{,}0}=0{,}0066(6)\quad\delta V=3\cdot\delta D=3\cdot0{,}00666(6)=0{,}02$$

$$\Delta V=\delta V\cdot V_0=0{,}02\cdot14136{,}4=282{,}73см^3$$

$$\boxed{V=14140\pm280см^3}$$

D = 15,0±0,1 см

II . Многопараметровые косвенные измерения

Дано: Известен доверительный интервал для величин *X, Z, Q,…,S* записанный в стандартном виде:

$$X = x_0 \pm \Delta x;$$
$$Z = z_0 \pm \Delta z;$$
$$Q = q_0 \pm \Delta q;$$
$$\ldots$$
$$S = s_0 \pm \Delta s;$$

известна функциональная зависимость

$$y = F\left(x, z, q, \ldots, s\right),$$

.Требуется записать выражение для доверительного интервала *Y* в стандартном виде:

$$\boldsymbol{Y = y_0 \pm \Delta y} \qquad (1)$$

.

Порядок расчета следующий:

1. Рассчитывается точечная оценка $\boldsymbol{y_0}$ результата косвенных измерений величины *Y* путем подстановки в выражение (1) для косвенной величины *Y* точечные оценки результатов измерения аргументов, то есть

$$\boldsymbol{y_0 = F\,(x_0, z_0, q_0, \ldots, s_0),} \qquad (2)$$

2. Рассчитываются составляющие доверительного интервала по каждому параметру

Границы доверительного интервала для *Y* можно определить из выражений:

$$\Delta y_x = |F\,[(x_0 + \Delta x), z_0, q_0, \ldots, s_0] - y_0|$$

$$\Delta y_z = |F\,[x_0, (z_0 + \Delta z), q_0, \ldots, s_0] - y_0| \qquad (3)$$

$$\Delta y_q = |F\,[x_0, z_0, (q_0 + \Delta q), \ldots, s_0] - y_0|$$

...

$$\Delta y_s = |F\,[x_0, z_0, q_0, \ldots, (s_0 + \Delta s)] - y_0|$$

.Каждая составляющая погрешности расчитывается так же, как погрешность однопараметровых косвенных измерений, рассматривая *F* поочередно, как функцию одного параметра: *x*, затем *z*, *q*, и *s*.

3.Составляющие дов.интервала объединяются геометрическим суммированием, то есть

$$\Delta y = \sqrt{\Delta y_x^2 + \Delta y_z^2 + \Delta y_q^2 + \ldots + \Delta y_s^2} \qquad (4)$$

Расчет абсолютной погрешности (дов.интервала) можно выполнить и через относительные показатели, т.е., если

$$y = A \cdot x^{B} \cdot z^{C} \cdot q^{D} \cdot \ldots \cdot s^{N}$$

то

$$\delta y_x = B \cdot \delta x; \; \delta y_z = C \cdot \delta z; \; \delta y_q = D \cdot \delta q$$

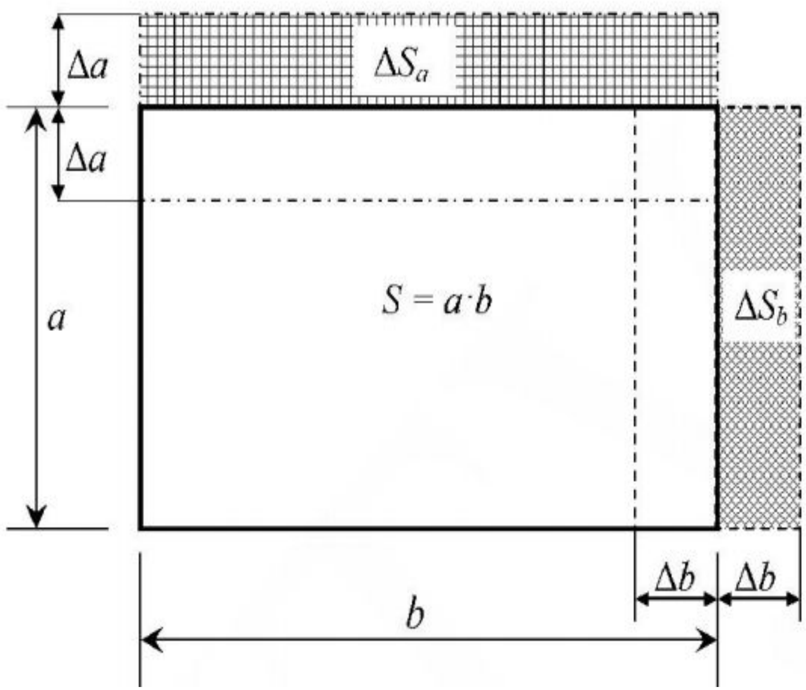
$$\delta y_s = N \cdot \delta s \, ;$$

$$\delta y = \sqrt{\delta y_x^2 + \delta y_z^2 + \delta y_q^2 + \ldots + \delta y_s^2} \qquad (5)$$

Пример 2. Рассчитать площадь сечения колонны по известным значениям линейных размеров сечения

a = 253,429 ± 2,145 мм после округления **a = 253,4 ± 2,1 мм**

b = 248,333 ± 2,039 мм **b = 248,3 ± 2,0 мм**



Расчетная формула

S = a· b

результат следует записать по форме:

$S = S_0 \pm \Delta S$

погрешность площади будет иметь две составляющие ΔS_a и ΔS_b, которые объединяются геометрическим суммированием

$$\Delta S = \sqrt{\Delta S_a{}^2 + \Delta S_b{}^2}$$

$S_0 = a_0 \cdot b_0 = 253{,}43 \cdot 248{,}33 = 62934{,}3$ мм^2

$\pm\Delta S_a = (a_0 \pm \Delta a) \cdot b - S_0 = \pm\Delta a \cdot b = 2{,}145 \cdot 248{,}33 = 532{,}68$ мм^2

$\pm\Delta S_b = (b_0 \pm \Delta b) \cdot a - S_0 = \pm\Delta b \cdot a = 2{,}039 \cdot 253{,}43 = 516{,}74$ мм^2

Объединяем составляющие $\Delta S = \sqrt{\Delta S_a{}^2 + \Delta S_b{}^2} = \sqrt{532{,}7^2 + 516{,}7^2} = 742{,}1 \ \text{мм}^2$

Записываем результат S = 62934,3 ± 742,1 мм^2

$\boxed{\text{После округления S = 62900 ± 700 мм}^2 \quad \text{или} \quad \text{S = 62950 ± 750 мм}^2}$

Вариант расчета 2. Поскольку функциональная зависимость для площади является степенной функцией, то для расчета составляющих общей погрешности можно воспользоваться формулами для относительных погрешностей

$$\delta S = \frac{\Delta S}{S_0} = \sqrt{\delta S_{L1}{}^2 + \delta S_{L2}{}^2}$$

$$\delta S_{L1} = \frac{\Delta S_a}{S_0} = 1 \cdot \frac{\Delta a}{a} = \frac{2{,}145}{253{,}43} = 0{,}00846$$

$$\delta S_{L2} = \frac{\Delta S_b}{S_0} = 1 \cdot \frac{\Delta b}{b} = \frac{2{,}039}{248{,}33} = 0{,}00821$$

$$\delta S = \sqrt{\delta S_a{}^2 + \delta S_b{}^2} = 0{,}0118$$

$$\Delta S = \delta S \cdot S_0 = 0{,}0118 \cdot 62934{,}3 = 742{,}0 \ \text{мм}^2$$

$\boxed{\text{После округления S = 62900 ± 700 мм}^2 \quad \text{или} \quad \text{S = 62950 ± 750 мм}^2}$

Пример 3.5 **.** Рассчитать доверительный интервал (относительную погрешность) оценки объема помещения, если относительная погрешности оценки его высоты δ*h* = 2% , а относительные погрешности длины *a* и ширины *b* равны δ*a* = δ*b* = 1%.

Решение. Выражение для объема помещения *V* представляет собой степенную функцию трех параметров – длины, ширины и высоты

$$V = a \cdot b \cdot h$$

поэтому расчет относительной погрешности объема выполним по формуле

$$\delta V = \sqrt{\delta V_a^2 + \delta V_b^2 + \delta V_h^2} = \sqrt{\delta a^2 + \delta b^2 + \delta h^2}$$

.Подставляя значения относительных погрешностей линейных размеров, получаем относительную погрешность объема

$$\delta V = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}01^2 + 0{,}02^2} = 0{,}0245 \approx 2{,}5\%$$

Рассчитаем погрешность объема «по частям», сначала определим дов.интервал площади основания S

$$S = a \cdot b$$

,

$$\delta S = \sqrt{\delta S_a^2 + \delta S_b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1{,}4142\%$$

затем определим дов. интервал объема $V = S \cdot h$

$$\delta V = \sqrt{\delta V_S^2 + \delta V_h^2} = \sqrt{\delta S^2 + \delta h^2} = \sqrt{2 + 2^2} = 2{,}45 \approx 2{,}5\%$$

Пример 3.6. Задача обратная задаче примера 3.5. Рассчитать допустимую погрешность измерения высоты δh помещения, если известны погрешности измерения длины и ширины помещения $\delta a = \delta b = 1\%$, и задано предельное значение погрешности объема $\delta V = 2{,}5\%$.

Решение А. Запишем выражение для высоты помещения исходя из известных объема, длины и ширины

$$h = \frac{V}{a \cdot b}., \qquad ()$$

Расчетная формула для относительной погрешности высоты будет иметь вид

$$\delta h = \sqrt{\delta h_V^2 + \delta h_a^2 + \delta h_b^2} = \sqrt{\delta V^2 + (-1 \cdot \delta a)^2 + (-1 \cdot \delta b)^2}\,. \qquad ()$$

Подставляя известные значения относительных погрешностей, получаем относительную погрешность высоты

$$\delta h = \sqrt{0{,}025^2 + 0{,}01^2 + 0{,}01^2} = 0{,}0283 \approx 2{,}8\%$$

Результат неверный !!!

Частная погрешность - δh превосходит погрешность объема (2,5%) и не согласуется с данными примера 3.5 , где относительная погрешность высоты $\delta h \approx 2\%$!

Для верного решения необходимо воспользоваться формулой, в которой нет необходимости учитывать корреляцию

$$\delta V = \sqrt{\delta V_a^2 + \delta V_b^2 + \delta V_h^2} = \sqrt{\delta a^2 + \delta b^2 + \delta h^2}$$

$$\delta h = \sqrt{\delta V^2 - \delta V_a^2 - \delta V_b^2} = \sqrt{\delta V^2 - \delta a^2 - \delta b^2} = 0{,}0206 = 2{,}1\%$$

С какой погрешностью будет определен модуль упругости арматурной стали E, если получены следующие данные испытаний 6 образцов арматурной стали

ε,%	0,004	0,0035	0,003	0,0035	0,004	0,004
F,*кН*	172	120	116	131	152	148
d, *мм*	16,2	16	15,9	15,8	15,8	16

Коэффициент доверия (Стьюдента)

Число изм.	**Надежность**				
N	**0.5**	**0.9**	**0.95**	**0.98**	**0.99**
2	1	6.3	12.7	31.8	63.7
3	0.82	2.9	4.3	7.0	9.9
4	0.77	2.4	3.2	4.5	5.8
5	0.74	2.1	2.8	3.7	4.6
6	0.73	2.0	2.6	3.4	4.0
7	0.72	1.9	2.4	3.1	3.7
8	0.71	1.9	2.4	3.0	3.5
9	0.71	1.9	2.3	2.9	3.4
10	0.70	1.8	2.3	2.8	3.2
20	0.69	1.7	2.1	2.5	2.8
>20	0.67	1.6	2.0	2.5	2.8

1. Записываем формулу, связывающую модуль упругости E и имеющиеся параметры.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon};\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{A \cdot \varepsilon} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2 \cdot \varepsilon}$$

2. Записываем формулу, связывающую относительную погрешность E с погрешностями измеренных параметров.

$$\delta E = \sqrt{\delta F^2 + (-2 \cdot \delta d)^2 + (-1 \cdot \delta\varepsilon)^2}$$

$$\boxed{F = E \cdot A \cdot \varepsilon}$$

$$\delta F = \sqrt{\delta E^2 + (2 \cdot \delta d)^2 + (\delta\varepsilon)^2}$$

$$\boxed{\delta E = \sqrt{\delta F^2 - (2 \cdot \delta d)^2 - (\delta\varepsilon)^2}} \qquad (1)$$

$$E = \frac{F}{A \cdot \varepsilon} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2 \cdot \varepsilon}$$

(2)

С учетом корреляции F и ε

$$\delta E = \sqrt{\delta E_F{}^2 + \delta E_\varepsilon{}^2 + \boxed{2 \cdot r \cdot \delta E_F \cdot \delta E_\varepsilon} + (-2 \cdot \delta d)^2}$$

$$\delta E = \sqrt{\delta F^2 + (-1 \cdot \delta\varepsilon)^2 + \boxed{2 \cdot r \cdot \delta F \cdot (-1 \cdot \delta\varepsilon)} + (-2 \cdot \delta d)^2} \qquad (2)$$