

Непрерывность функций

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 , если выполнены условия:

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$
2. Существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$
2. Существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$
3. Этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность функций

Определение

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 справа (слева)*, если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$

Непрерывность функций

Определение

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 справа (слева)*, если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$
2. Существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ справа (слева)
3. Этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Непрерывность функций

Определение №2

Если существуют конечные левый и правый пределы, равные между собой и равные значению функции в точке x_0 , то функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в этой точке*.

$$\text{T.e.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$.

Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$.

Для любого $x \in (a;b)$ разность $x - x_0$ называется

приращением аргумента x в точке x_0 и

обозначается Δx .

Т.е. $\Delta x = x - x_0$. Тогда $x = x_0 + \Delta x$.

Непрерывность функций

Разность

соответствующих

значений функции

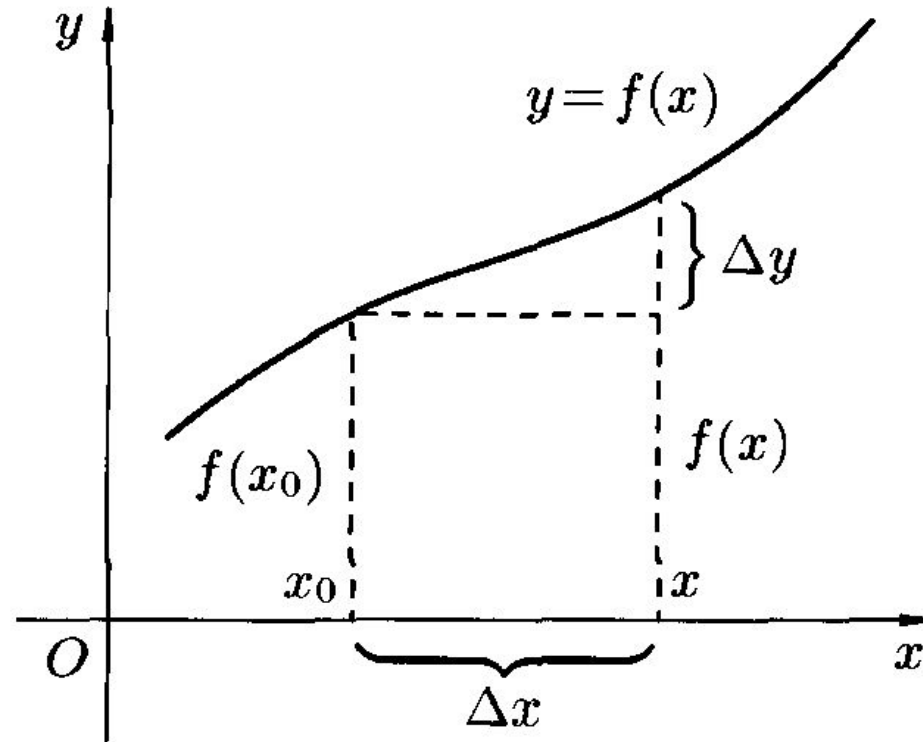
$f(x) - f(x_0)$ называется

приращением

функции $f(x)$ в точке

x_0 и обозначается Δy .

Т.е. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.



Непрерывность функций

Определение №3

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow x_0$,

т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное (при $g(x) \neq 0$) непрерывны в этой точке.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное (при $g(x) \neq 0$) непрерывны в этой точке.

Доказательство следует непосредственно из соответствующих теорем о пределах.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(g)$ непрерывна в точке g_0 , причем $g_0 = g(x_0)$, тогда сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию $f^{-1}(y)$ и непрерывна в точке x_0 , то функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0 , причем $y_0 = f(x_0)$.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Доказательство:

Пусть $f(x) = 7x - 3$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (7x - 3) = 7x_0 - 3 = f(x_0)$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = \sin x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = \sin x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0) =$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = \sin x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2} \right) =\end{aligned}$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = \sin x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2} \right) = 0\end{aligned}$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = e^x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = e^x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \right) =$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = e^x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0 .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^{x_0} \cdot \left(e^{\Delta x} - 1 \right) \right) =$$

Свойства функций, непрерывных в точке

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^{x_0} \cdot \left(e^{\Delta x} - 1 \right) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(e^{x_0} \cdot \Delta x \right) = 0$$

Точки разрыва функции и их классификация

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точки, в которых нарушается условие непрерывности функции называются *точками разрыва* этой функции.

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$

При этом:

1. Если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва**.

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$$

При этом:

2. Если $A_1 \neq A_2$, точка x_0 называется **точкой неустранимого разрыва**.

Величина $|A_1 - A_2|$ называется **скачком функции**.

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y=f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2 - x, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2 - x, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы в точке $x = 2$:

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2 - x, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы в точке $x=2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x - 1) = 1$$

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2 - x, & 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы в точке $x=2$:

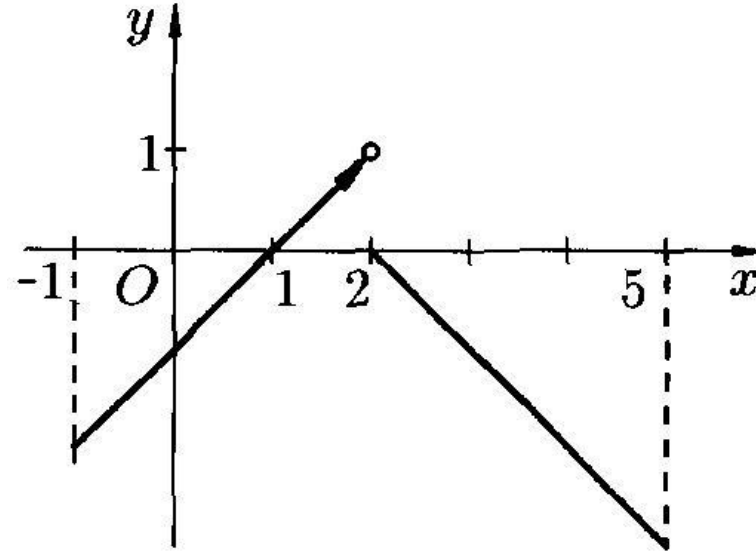
$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (2 - x) = 0$$

Пример 1

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (2 - x) = 0$$



Пределы конечны, значит в точке $x = 2$ - разрыв первого рода.

Т.к. $1 \neq 0 \Rightarrow x = 2$ - точка неустранимого разрыва.

$|1 - 0| = 1$ - скачок функции.

Пример 2

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \frac{1}{x - 2}$$

Пример 2

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Найдем односторонние пределы в точке $x=2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = -\infty$$

Пример 2

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Найдем односторонние пределы в точке $x=2$:

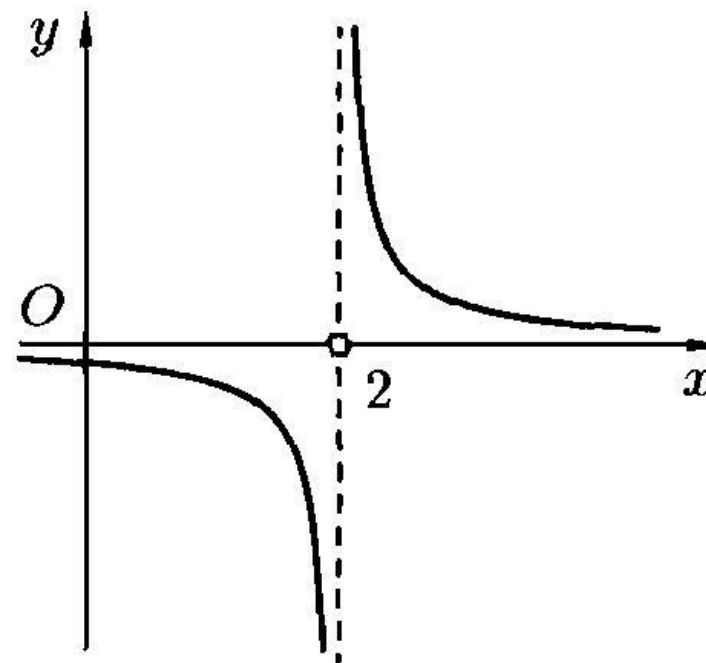
$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2+0-2} = +\infty$$

Пример 2

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2+0-2} = +\infty$$



Пределы равны бесконечности, значит $x = 2$ – точка разрыва второго рода.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и непрерывна справа в точке a и слева в точке b .

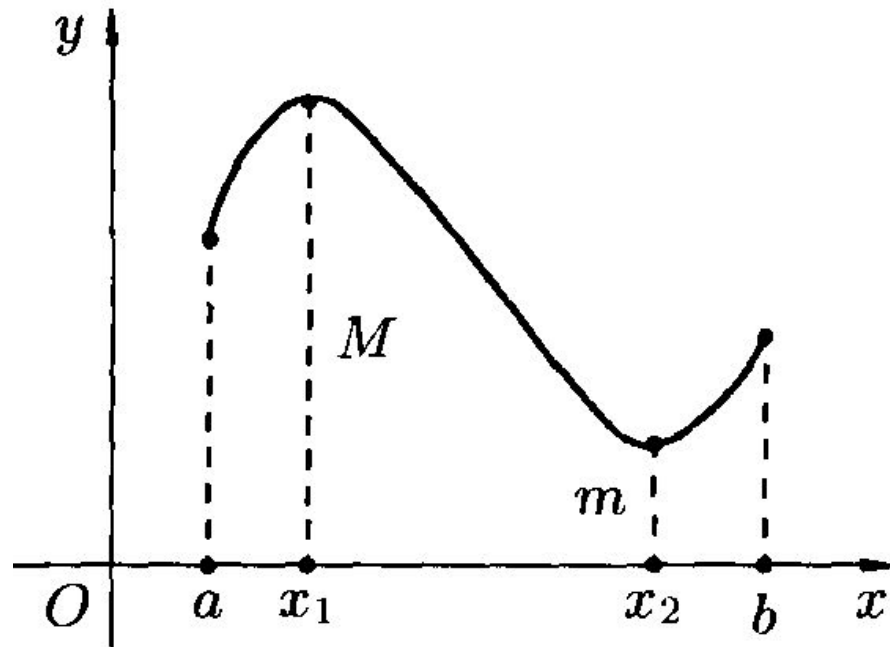
Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Вейерштрасса

Всякая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция ограничена на нем и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Свойства функций, непрерывных на отрезке
Теорема Вейерштрасса

Всякая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция ограничена на нем и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.



Свойства функций, непрерывных на отрезке

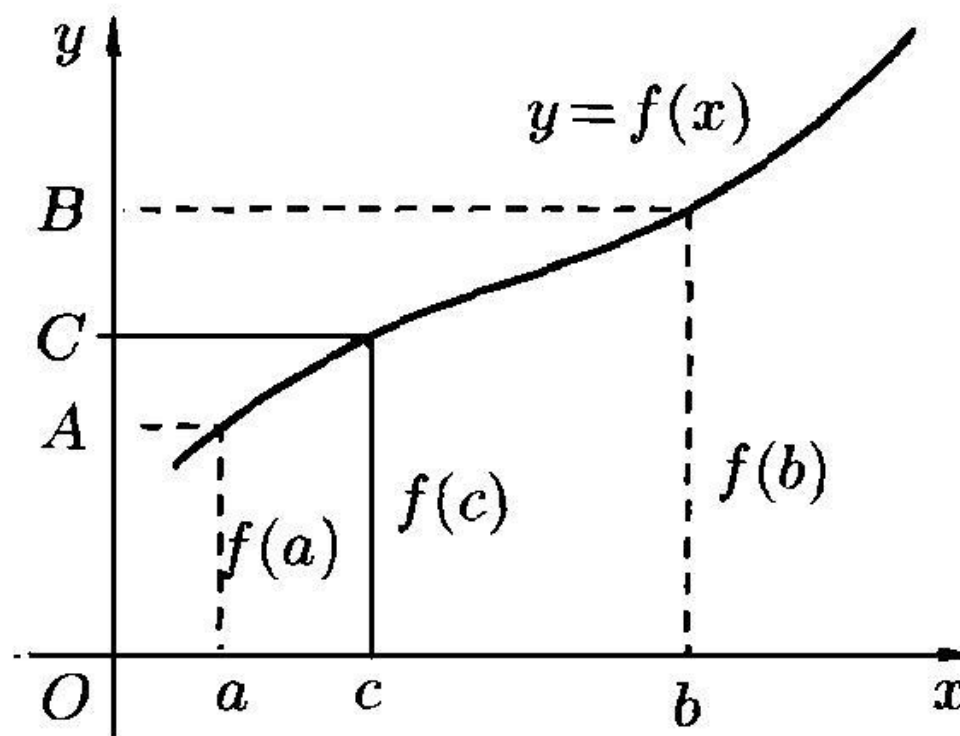
Теорема Больцано-Коши

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения A и B , тогда для любого числа C , находящегося между A и B , найдется такое число c , принадлежащее интервалу $(a;b)$, что $f(c) = C$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Больцано-Коши

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах неравные значения A и B , тогда для любого числа C , находящегося между A и B , найдется такое число c , принадлежащее интервалу $(a; b)$, что $y = f(c) = C$.



Свойства функций, непрерывных на отрезке

Следствие

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри этого отрезка найдется хотя бы одна точка c , в которой данная функция обращается в нуль: $f(c)=0$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Следствие

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри этого отрезка найдется хотя бы одна точка c , в которой данная функция обращается

в нуль: $f(c) = 0$.

