Непрерывность функций

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполнены условия:

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$
2. Существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$

Непрерывность функций

Определение №1

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$
2. Существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$
3. Этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***справа (слева)***, если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$

Непрерывность функций

Определение

Функция *y=f(x)* называется ***непрерывной в точке*** x_0 ***справа (слева)***, если выполнены условия:

1. Функция определена в точке x_0 , т.е. определено число $f(x_0)$
2. Существует конечный предел функции *f(x)* при $x \to x_0$ справа (слева)
3. Этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

$$\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Определение №2

Если существуют конечные левый и правый пределы, равные между собой и равные значению функции в точке x_0 , то функция *y=f(x)* называется ***непрерывной в*** этой ***точке***.

Т.е. $$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$.

Непрерывность функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a;b)$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$.

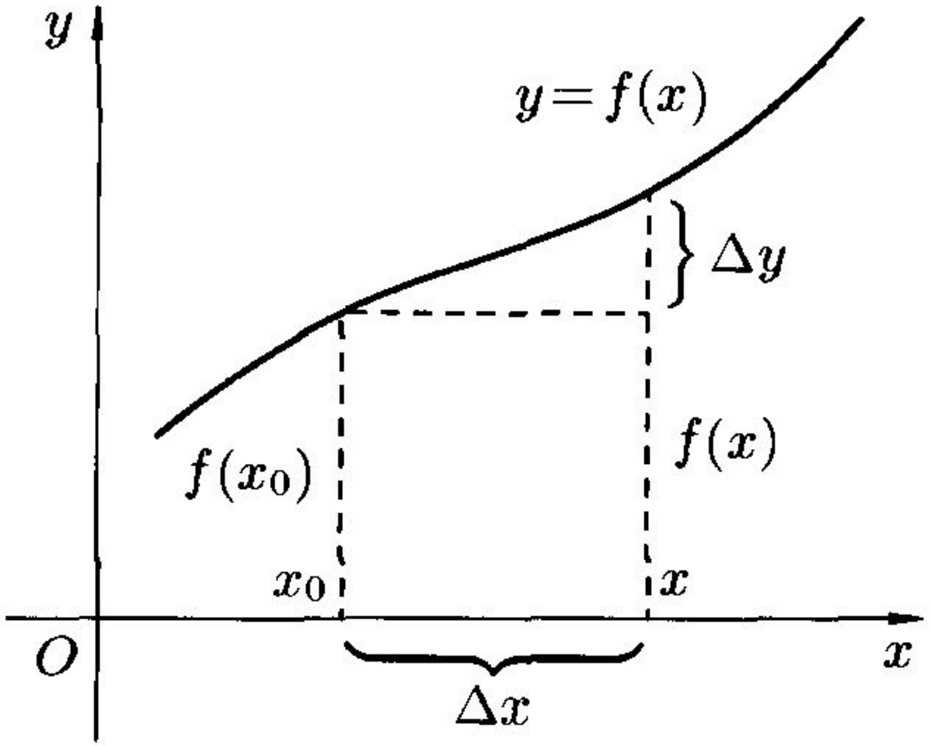
Для любого $x \in (a;b)$ разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** x в точке x_0 и обозначается Δx.

Т.е. $\Delta x = x - x_0$. Тогда $x = x_0 + \Delta x$.

Непрерывность функций

Разность соответствующих значений функции $f(x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции*** $f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy.

Т.е. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.



Непрерывность функций

Определение №3

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0 , если ее приращение в этой точке является бесконечно малой функцией при $x\to x_0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное (при $g(x) \neq 0$) непрерывны в этой точке.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное (при $g(x)\neq 0$) непрерывны в этой точке.

Доказательство следует непосредственно из соответствующих теорем о пределах.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(g)$ непрерывна в точке g_0, причем $g_0 = g(x_0)$, тогда сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию $f^{-1}(y)$ и непрерывна в точке x_0, то функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0, причем $y_0 = f(x_0)$.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Доказательство:

Пусть *f(x)* = 7x-3. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (7x - 3) = 7x_0 - 3 = f(x_0)$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть *f(x)* = sinx. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть *f(x)* = sinx. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0 \right) =$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть *f(x)* = sinx. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sin\left(x_0+\Delta x\right)-\sin x_0\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right)=$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть *f(x)* = sinx. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sin\left(x_0 + \Delta x\right) - \sin x_0 \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2\sin\frac{\Delta x}{2} \cos\frac{2x_0 + \Delta x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x \cos\frac{2x_0 + \Delta x}{2} \right) = 0$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть $f(x) = e^x$. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть *f(x)* = e^x. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \right) =$$

Свойства функций, непрерывных в точке

Пусть *f(x)* = e^x. Докажем, что функция непрерывна в любой точке x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{x_0} \cdot \left(e^{\Delta x} - 1 \right) \right) =$$

Свойства функций, непрерывных в точке

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{x_0} \cdot \left(e^{\Delta x} - 1 \right) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{x_0} \cdot \Delta x \right) = 0$$

Точки разрыва функции и их классификация

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точки, в которых нарушается условие непрерывности функции называются ***точками разрыва*** этой функции.

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции *y=f(x),* если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad и \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции *y=f(x),* если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \quad и \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$$

При этом:

1. Если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$$

При этом:

2. Если $A_1 \neq A_2$, точка x_0 называется ***точкой неустранимого разрыва***.

Величина $|A_1 - A_2|$ называется ***скачком функции***.

Точки разрыва функции и их классификация

Определение

Точка разрыва x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции *y=f(x),* если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует.

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x-1, & -1 \le x \le 2, \\ 2-x, & 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x-1, & -1 \le x \le 2, \\ 2-x, & 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы в точке x = 2:

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases} x-1, & -1\le x\le 2,\\ 2-x, & 2\le x\le 5.\end{cases}$$

Найдем односторонние пределы в точке x=2:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)=1$$

Пример 1

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x - 1, & -1 \le x \le 2, \\ 2 - x, & 2 \le x \le 5. \end{cases}$$

Найдем односторонние пределы в точке x=2:

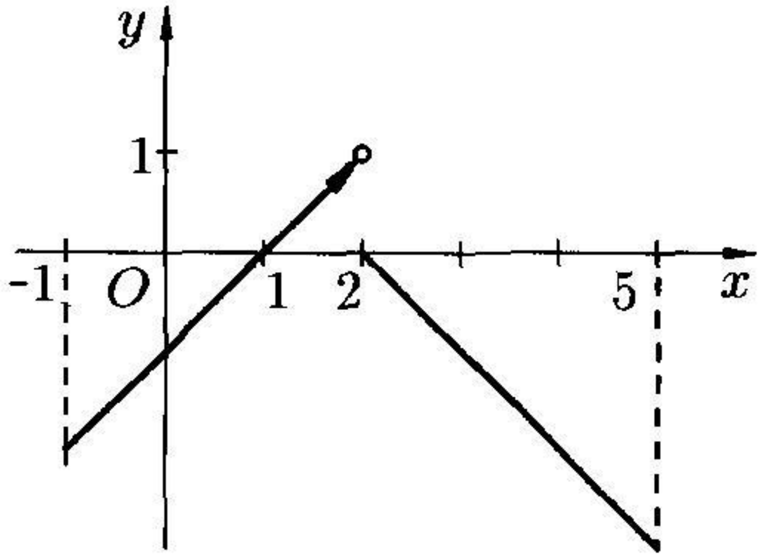
$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (2 - x) = 0$$

Пример 1

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x-1) = 1$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(2-x) = 0$$



Пределы конечны, значит в точке x = 2 - разрыв первого рода.

Т.к. $1 \neq 0 \Rightarrow$ x = 2 - точка неустранимого разрыва.

$|1 - 0| = 1$ – скачок функции.

Пример 2

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Пример 2

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \frac{1}{x-2}$$

Найдем односторонние пределы в точке x=2:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = -\infty$$

Пример 2

Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\frac{1}{x-2}$$

Найдем односторонние пределы в точке x=2:

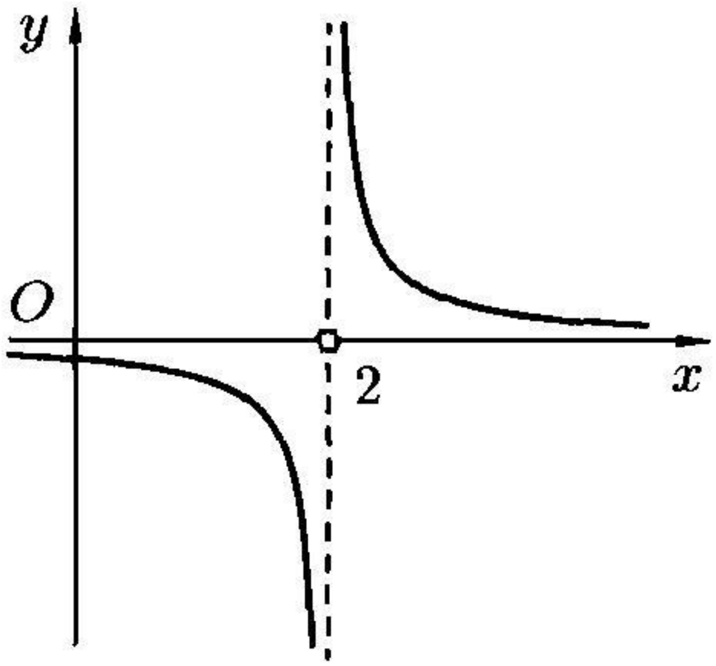
$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2-0-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2+0-2}=+\infty$$

Пример 2

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-0-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2+0-2} = +\infty$$



Пределы равны бесконечности, значит x = 2 – точка разрыва второго рода.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение

Функция у = $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение

Функция у = $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и непрерывна справа в точке a и слева в точке b.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

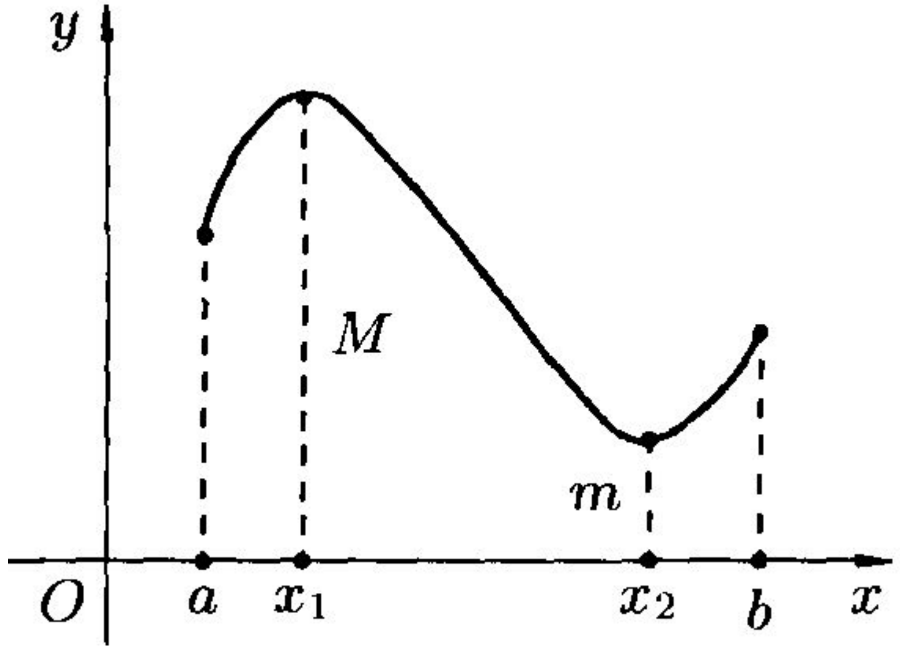
Теорема Вейерштрасса

Всякая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция ограничена на нем и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Вейерштрасса

Всякая непрерывная на отрезке [$a;b$] функция ограничена на нем и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.



Свойства функций, непрерывных на отрезке

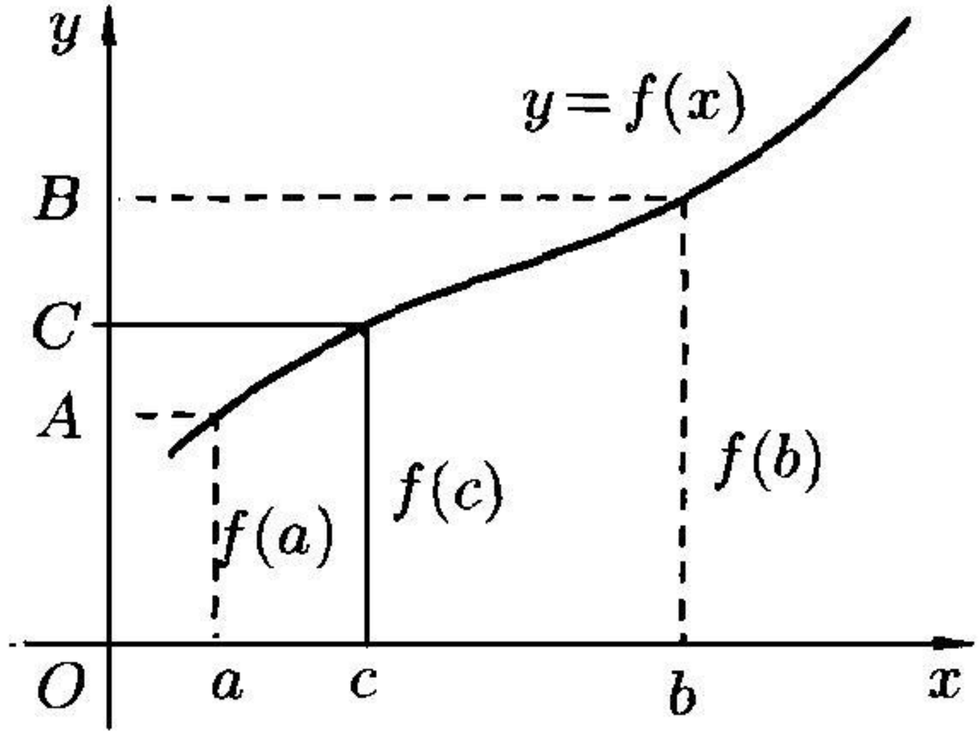
Теорема Больцано-Коши

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения A и B, тогда для любого числа C, находящегося между A и B, найдется такое число c, принадлежащее интервалу $(a;b)$, что $f(c)=C$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Больцано-Коши

Если функция у = *f(x)* определена и непрерывна на отрезке [*a;b*] и принимает на его концах неравные значения А и В, тогда для любого числа С, находящегося между А и В, найдется такое число с, принадлежащее интервалу *(a;b)*, что у = *f(c)=C*.



Свойства функций, непрерывных на отрезке

Следствие

Если функция у = $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри этого отрезка найдется хотя бы одна точка с, в которой данная функция обращается в нуль: $f(c)=0$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Следствие

Если функция у = *f(x)* непрерывна на отрезке [*a;b*] и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри этого отрезка найдется хотя бы одна точка с, в которой данная функция обращается

в нуль: *f(c)=0.*