Уравнения и неравенства с двумя переменными, содержащие параметр

Определение. Уравнение (неравенство) с параметром – математическое уравнение (неравенство), внешний вид и решение которого зависит от значений одного или нескольких параметров.

Параметр (от греческого parametron – отмеривающий). В математике, величина, числовые значения которой позволяют видеть определённый элемент из множества элементов того же рода.

Решение простейших уравнений

Задача.

Решить уравнение: $(a^2 - 9)x = a + 3$

Решение.

Разложим на множители коэффициент перед x

$(a - 3)(a + 3)\,x = a + 3$

Если a $\neq \pm 3$, то уравнение имеет единственный

корень $x = \dfrac{1}{a-3}$

Решение простейших уравнений

Задача (продолжение).

Решить уравнение: $(a^2 - 9)x = a + 3$

Решение.

$$(a - 3)(a + 3)\,x = a + 3$$

Если a = 3, то уравнение имеет вид: 0x = 6, уравнение корней не имеет.

Если a = - 3, то уравнение имеет вид: 0x = 0, уравнение имеет множество корней (x € R).

Ответ: при a $\neq \pm 3$ один корень $x = \dfrac{1}{a-3}$;

при a = 3 нет корней;

при a = - 3, x € R.

Определение. Уравнение $f(x; y) = 0$ называется уравнением с двумя переменными.

Определение. Решением уравнения с двумя переменными называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, при подстановке которой в уравнение $f(x_0; y_0) = 0$, оно обращается в верное равенство.

Пример.

Уравнение: $x^2 + y^2 = 1$ имеет бесчисленное множество решений. Решением является любая пара чисел, лежащих на единичной окружности с центром в начале координат.

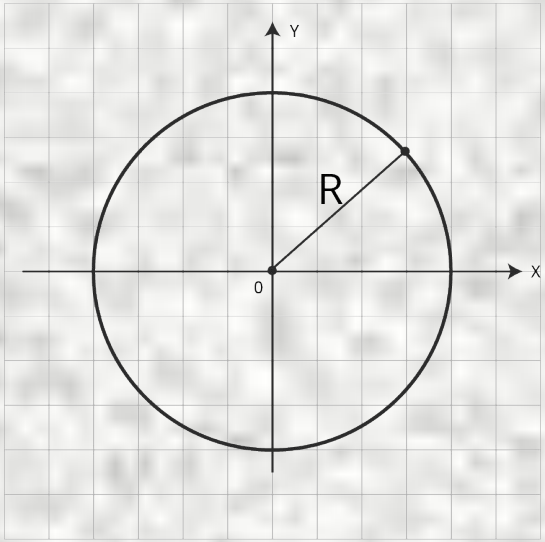
Уравнение: $x^2 + y^2 = a$. Это уравнение с двумя переменными и параметром а.

<u>Решение:</u> При а = 0, уравнение имеет одно решение (0; 0);

При а < 0, нет решений (*сумма двух неотрицательных выражений не может быть отрицательна*);

При а > 0, множество решений.

Если подставить знак неравенства $x^2 + y^2 < 1$, то решением неравенства будет часть плоскости, лежащей внутри единичной окружности с центром в начале координат.

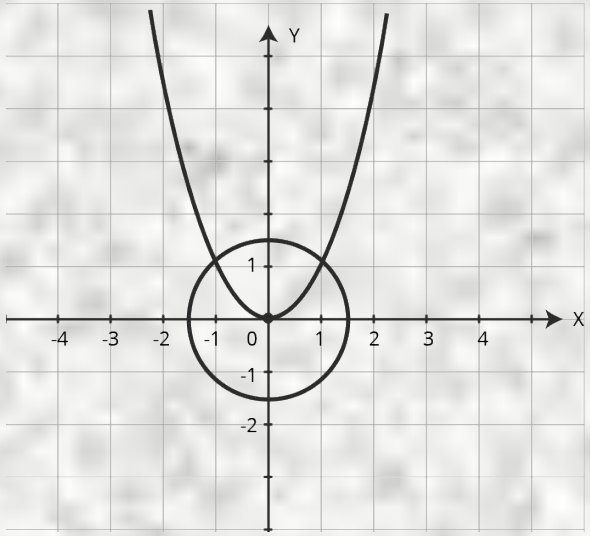


Вывод: из приведённых примеров видно, что графический способ наиболее понятен.

Пример 1.

Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y = x^2. \end{cases}$$



<u>Решение:</u> Строим в одной системе координат оба графика.

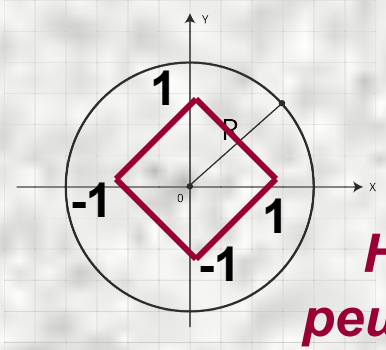
<u>Ответ:</u> При а = 0, одно решение (0; 0);

При а > 0, два решения *(окружность и парабола будут иметь две точки пересечения).*

Пример 2.

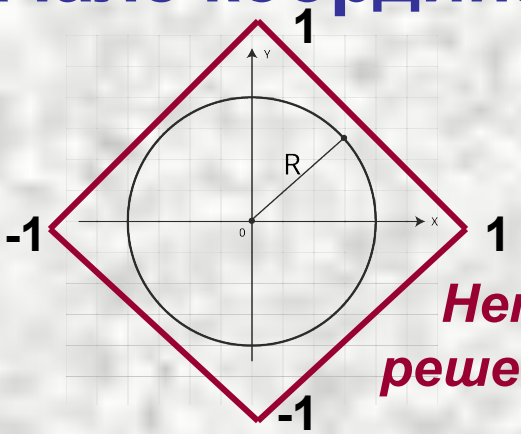
Укажите наибольшее число решений системы уравнений:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

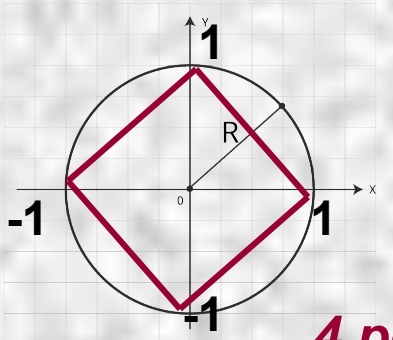


Нет решений

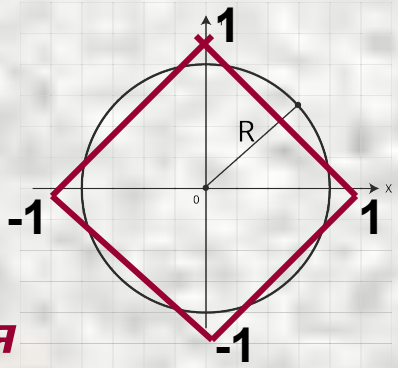
<u>Решение:</u> Строим в одной системе координат оба графика. Решением первого является квадрат, второго – окружность с центром в начале координат.



Нет решений



4 решения



8 решений

<u>Ответ:</u> 8 решений

Пример 3.

Сколько решений имеет уравнение: $|x| + |y| = a$?

<u>Решение:</u> Строим в одной системе координат графики левой и правой частей уравнения: графиком уравнения $|x| + |y|$ является квадрат, а графиком уравнения $y = a$ – прямая, параллельная оси ox.

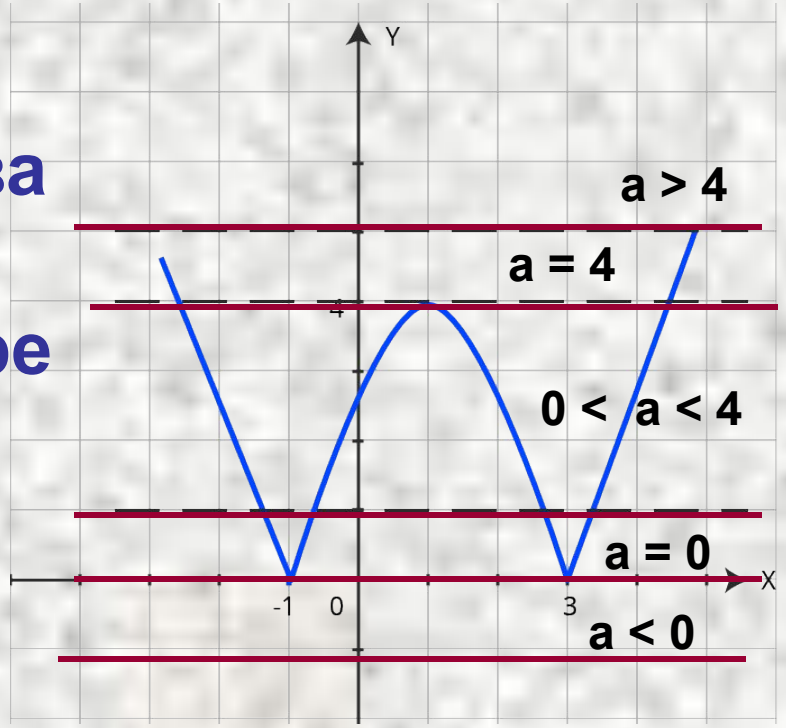
<u>Возможны 3 случая:</u>

- **бесчисленное множество решений** *(прямая $y = a$ совпадает со стороной квадрата)*;
- **два решения** *(две точки пересечения)*;
- **нет решений** *(нет точек пересечения)*.

Пример 4.

Сколько корней имеет уравнение: $|x^2 – 2x -3| = a$, в зависимости от параметра а?

<u>Решение:</u> Строим в одной системе координат графики левой и правой частей уравнения $y = |x^2 – 2x -3|$ и $y = a$.



<u>Ответ:</u> При а = 0 и а > 4, два корня;

При 0 < а < 4, четыре корня;

При а = 4 три корня;

При а < 0 корней нет.

Работа с учебником.

Стр. 259. Разобрать решение задачи № 1. Выполнить по аналогии стр. 266 № 23.

Опираясь на рассмотренные примеры, выполнить: № 32; № 47(а).

Тренировочные задания

Задание 1.

При каких значениях параметра а, уравнение не имеет корней? Установить соответствие между уравнением и значением параметра.

A. $(a - 3)x = a - 2$;

B. $3a(a - 2)x = a - 2$;

C. $(a + 2)^2x = a^2 - 8$.

1. $a = -2$;

2. $a = 3$;

3. $a = 0$.

A	B	C

Задание 2.

При каких значениях параметра а, уравнение имеет единственный корень? Установить соответствие между уравнением и значением параметра.

A. $(a - 5)x = 6$;

B. $a(x - 3) = a - 5$;

C. $(a + 3)^2x = a$.

1. $a \neq -3$;

2. $a \neq 5$;

3. $a \neq 3$;

4. $a \neq 0$.

A	B	C

Задание 3.

При каких значениях параметра p, любое число является корнем уравнения? Установить соответствие между уравнением и значением параметра.

A. $p(p - 4)(p + 3)x = 5(4 - p)$;

B. $(p - 2)x = p^2 - 4$;

C. $px = p(p - 1)(p - 2)$.

1. $p = 4$;
2. $p = 2$;
3. $p = 1$;
4. $p = 0$;
5. $p = -3$;
6. $p = -2$

A	B	C

Задание 4.

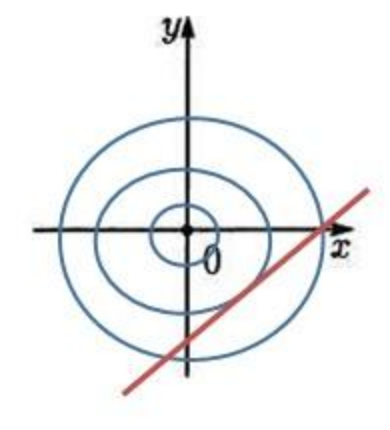
При каких значениях параметра а, выполнено неравенство $5|a| > |a|$? Выбрать номер правильного ответа.

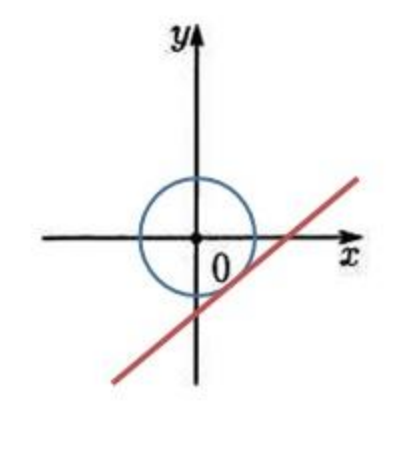
1. При любом а;
2. При $a > 0$;
3. При $a < 0$;
4. При любом а, кроме 0.

Задание 5.

Сколько корней может иметь система уравнений, в зависимости от параметра а? Выбери номера верных ответов.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = 2. \end{cases}$$



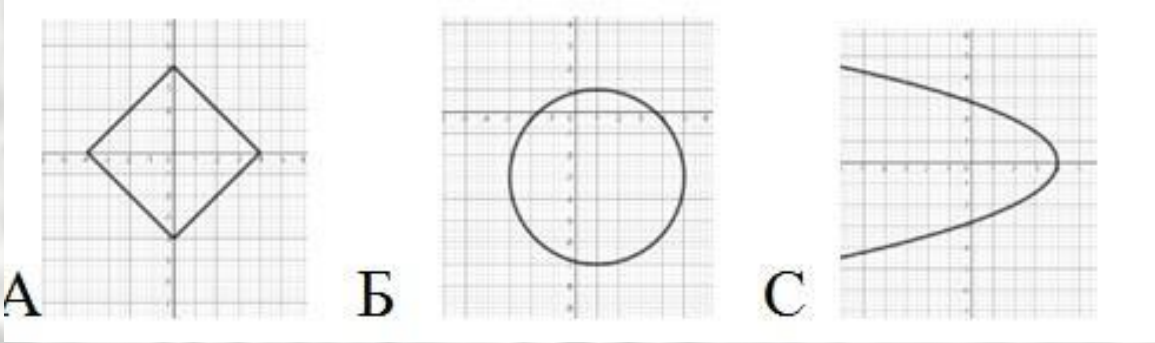


1. Один;
2. Два;
3. Множество;
4. Не имеет корней.

Задание 6.

Каждый график соотнести с формулой:

1. $|x| + |y| = 4$;
2. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$;
3. $x = -y^2 + 4$.



А	Б	С

Задание 7.

При каком значении параметра а, система уравнений не имеет решений? Выбери номер верного ответа.

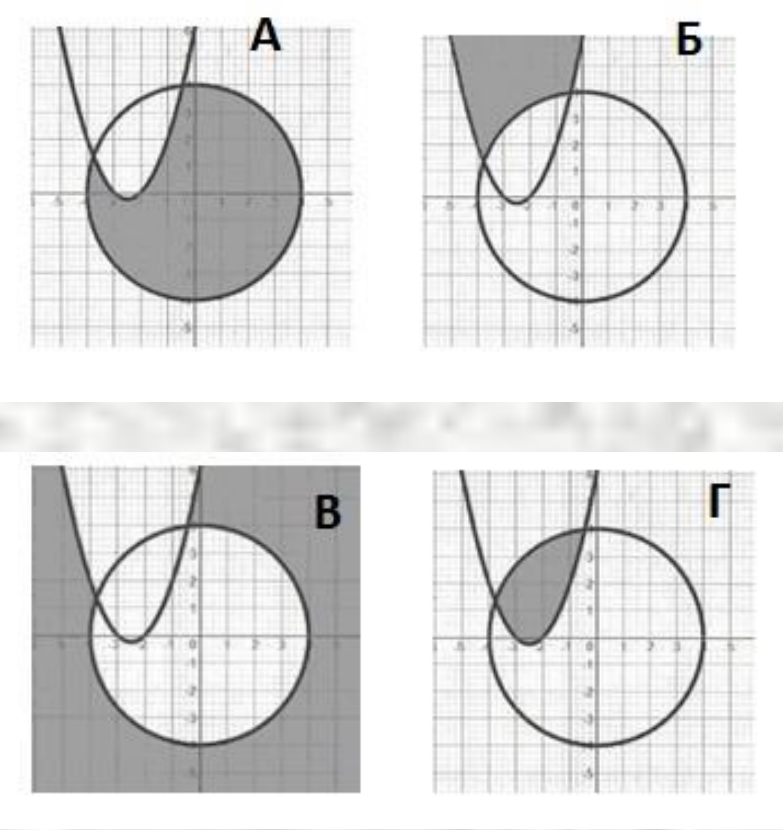
$$\begin{cases} 2(a+1)x+2y=21, \\ 5(a-3)x+y=13. \end{cases}$$

1. а = 4;
2. а = - 4;
3. а = - 1;
4. а = 3.

Задание 8.

При каком из графиков изображено решение системы неравенств?

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \geq y, \\ x^2 + y^2 \leq 16. \end{cases}$$



Оценивание

Ответы отправить в таблице, вписав выбранные. Каждое задание оценивается одним баллом.

№ задания	№ 1			№ 2			№ 3			№ 4	№ 5	№ 6			№ 7	№ 8
ОТВЕТ	А	В	С	А	В	С	А	В	С			А	Б	С		

«5» - 8 б.

«4» - 6 – 7 б.

«3» - 3 – 5 б.