

*Уравнения и неравенства
с двумя переменными,
содержащие параметр*

Определение. Уравнение (неравенство) с параметром – математическое уравнение (неравенство), внешний вид и решение которого зависит от значений одного или нескольких параметров.

Параметр (от греческого *parametron* – отмеривающий). В математике, величина, числовые значения которой позволяют видеть определённый элемент из множества элементов того же рода.

Решение простейших уравнений

Задача.

Решить уравнение: $(a^2 - 9)x = a + 3$

Решение.

Разложим на множители коэффициент перед x

$$(a - 3)(a + 3)x = a + 3$$

Если $a \neq \pm 3$, то уравнение имеет единственный

корень $x = \frac{1}{a - 3}$

Решение простейших уравнений

Задача (продолжение).

Решить уравнение: $(a^2 - 9)x = a + 3$

Решение.

$$(a - 3)(a + 3)x = a + 3$$

Если $a = 3$, то уравнение имеет вид: $0x = 6$, уравнение корней не имеет.

Если $a = -3$, то уравнение имеет вид: $0x = 0$, уравнение имеет множество корней ($x \in \mathbb{R}$).

Ответ: при $a \neq \pm 3$ один корень $x = \frac{1}{a-3}$;

при $a = 3$ нет корней;

при $a = -3$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение. Уравнение $f(x; y) = 0$ называется уравнением с двумя переменными.

Определение. Решением уравнения с двумя переменными называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, при подстановке которой в уравнение $f(x_0; y_0) = 0$, оно обращается в верное равенство.

Пример.

Уравнение: $x^2 + y^2 = 1$ имеет бесчисленное множество решений. Решением является любая пара чисел, лежащих на единичной окружности с центром в начале координат.

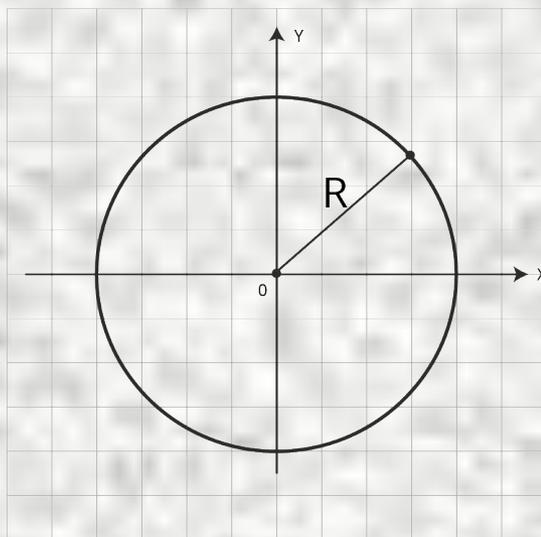
Уравнение: $x^2 + y^2 = a$. Это уравнение с двумя переменными и параметром a .

Решение: При $a = 0$, уравнение имеет одно решение $(0; 0)$;

При $a < 0$, нет решений (*сумма двух неотрицательных выражений не может быть отрицательна*);

При $a > 0$, множество решений.

Если подставить знак неравенства $x^2 + y^2 < 1$, то решением неравенства будет часть плоскости, лежащей внутри единичной окружности с центром в начале координат.

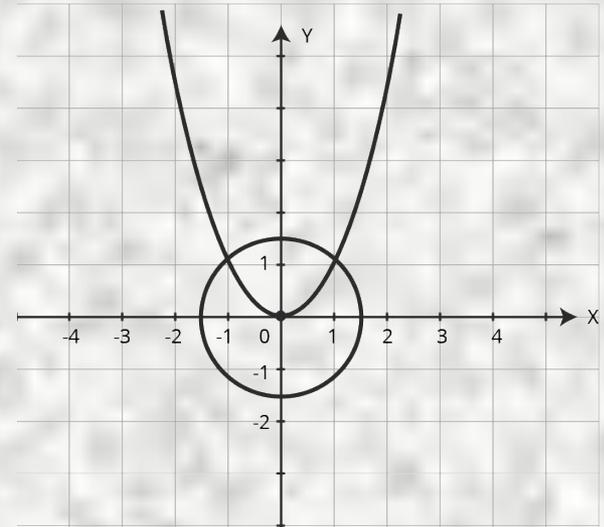


Вывод: из приведённых примеров видно, что графический способ наиболее понятен.

Пример 1.

Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y = x^2. \end{cases}$$



Решение: Строим в одной системе координат оба графика.

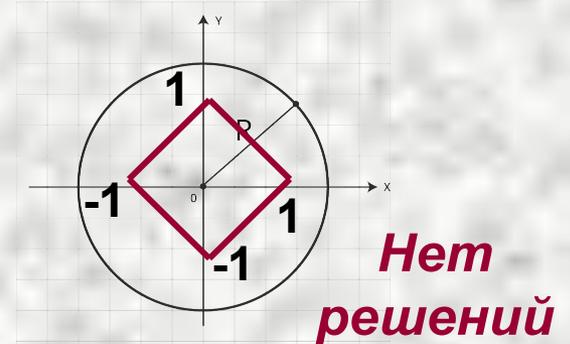
Ответ: При $a = 0$, одно решение $(0; 0)$;

При $a > 0$, два решения (окружность и парабола будут иметь две точки пересечения).

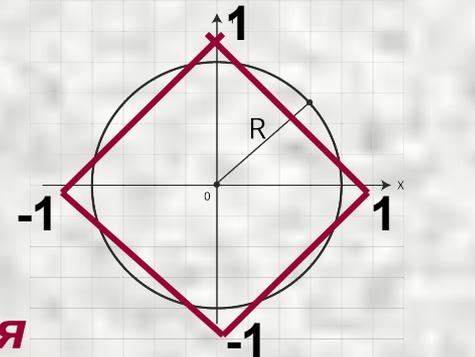
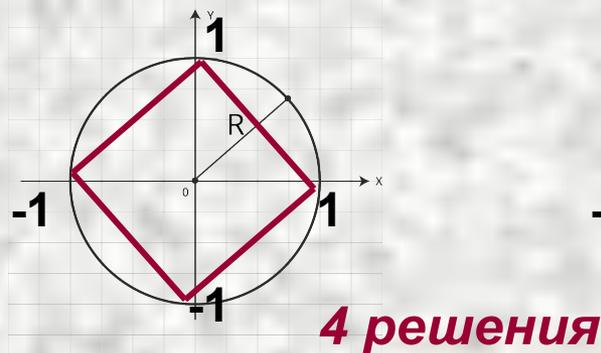
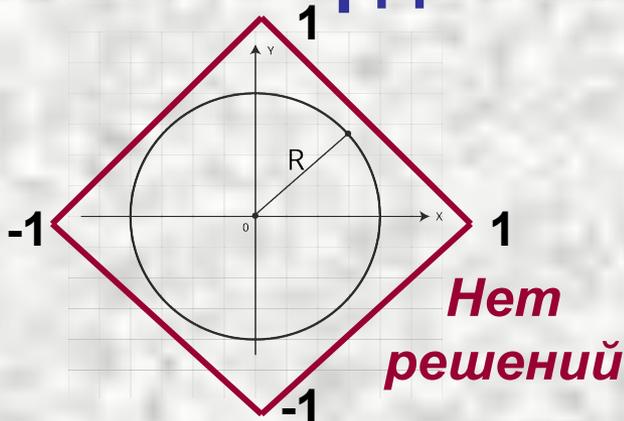
Пример 2.

Укажите наибольшее число решений системы уравнений:

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$



Решение: Строим в одной системе координат оба графика. Решением первого является квадрат, второго – окружность с центром в начале координат.



Ответ: 8 решений 8 решений

Пример 3.

Сколько решений имеет уравнение: $|x| + |y| = a$?

Решение: Строим в одной системе координат графики левой и правой частей уравнения: графиком уравнения $|x| + |y|$ является квадрат, а графиком уравнения $y = a$ — прямая, параллельная оси ox .

Возможны 3 случая:

- **бесчисленное множество решений** (*прямая $y = a$ совпадает со стороной квадрата*);
- **два решения** (*две точки пересечения*);
- **нет решений** (*нет точек пересечения*).

Пример 4.

Сколько корней имеет уравнение:
 $|x^2 - 2x - 3| = a$, в зависимости от параметра a ?

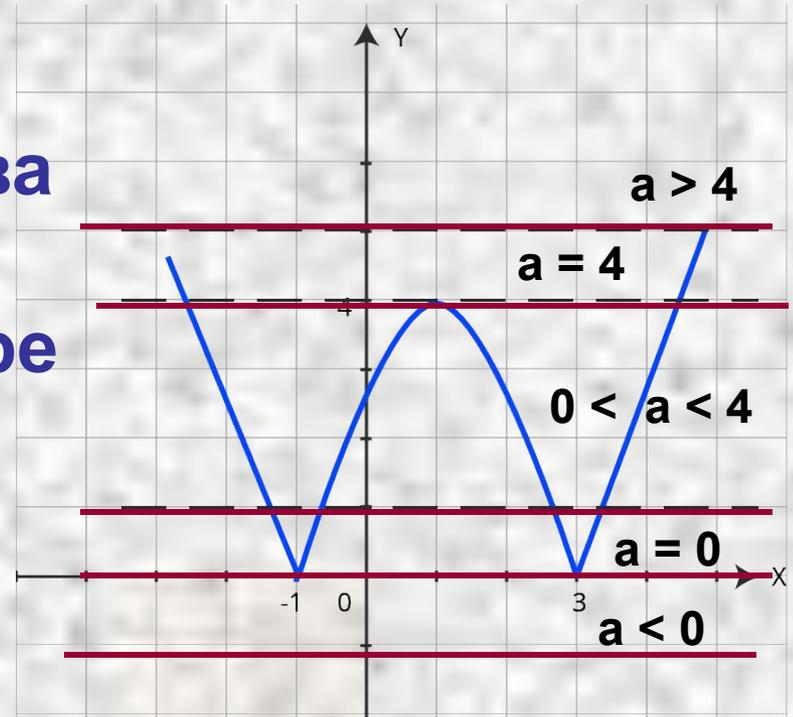
Решение: Строим в одной системе координат графики левой и правой частей уравнения $y = |x^2 - 2x - 3|$ и $y = a$.

Ответ: При $a = 0$ и $a > 4$, два
корня;

При $0 < a < 4$, четыре
корня;

При $a = 4$ три корня;

При $a < 0$ корней нет.



Работа с учебником.

**Стр. 259. Разобрать решение задачи № 1.
Выполнить по аналогии стр. 266 № 23.**

**Опираясь на рассмотренные примеры,
выполнить: № 32; № 47(а).**

Тренировочные задания

Задание 1.

При каких значениях параметра a , уравнение не имеет корней? Установить соответствие между уравнением и значением параметра.

A. $(a - 3)x = a - 2;$

1. $a = -2;$

B. $3a(a - 2)x = a - 2;$

2. $a = 3;$

C. $(a + 2)^2x = a^2 - 8.$

3. $a = 0.$

A	B	C

Задание 2.

При каких значениях параметра a , уравнение имеет единственный корень? Установить соответствие между уравнением и значением параметра.

A. $(a - 5)x = 6$;

B. $a(x - 3) = a - 5$;

C. $(a + 3)^2x = a$.

1. $a \neq -3$;

2. $a \neq 5$;

3. $a \neq 3$;

4. $a \neq 0$.

A	B	C

Задание 3.

При каких значениях параметра p , любое число является корнем уравнения? Установить соответствие между уравнением и значением параметра.

А. $p(p - 4)(p + 3)x = 5(4 - p)$;

В. $(p - 2)x = p^2 - 4$;

С. $px = p(p - 1)(p - 2)$.

А	В	С

1. $p = 4$;

2. $p = 2$;

3. $p = 1$;

4. $p = 0$;

5. $p = -3$;

6. $p = -2$

Задание 4.

При каких значениях параметра a , выполнено неравенство $5|a| > |a|$? Выбрать номер правильного ответа.

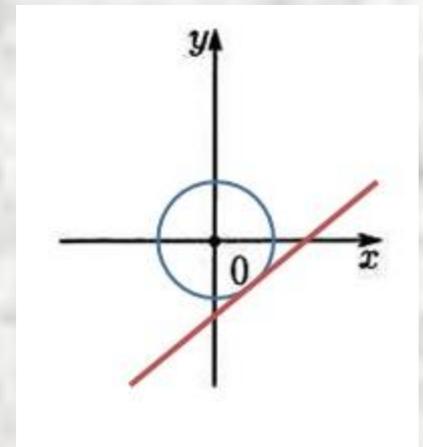
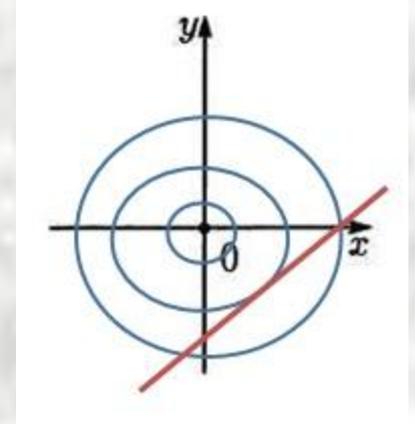
1. При любом a ;
2. При $a > 0$;
3. При $a < 0$;
4. При любом a , кроме 0 .

Задание 5.

Сколько корней может иметь система уравнений, в зависимости от параметра a ?
Выбери номера верных ответов.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

1. Один;
2. Два;
3. Множество;
4. Не имеет корней.



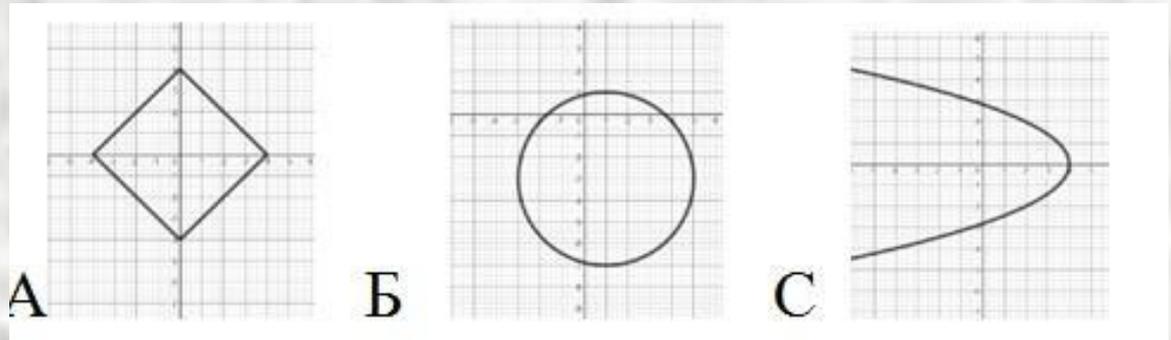
Задание 6.

Каждый график соотнести с формулой:

1. $|x| + |y| = 4$;

2. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$;

3. $x = -y^2 + 4$.



А	Б	С

Задание 7.

При каком значении параметра a , система уравнений не имеет решений? Выбери номер верного ответа.

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 2y = 21, \\ 5(a-3)x + y = 13. \end{cases}$$

1. $a = 4$;

2. $a = -4$;

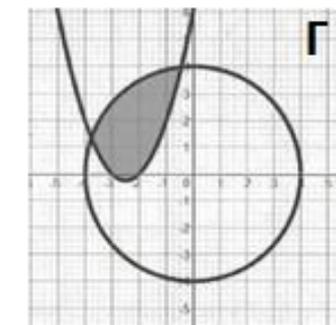
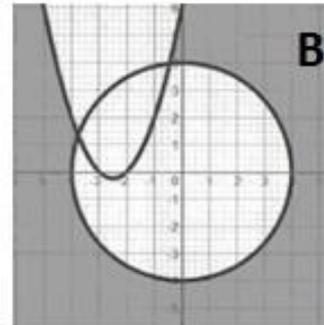
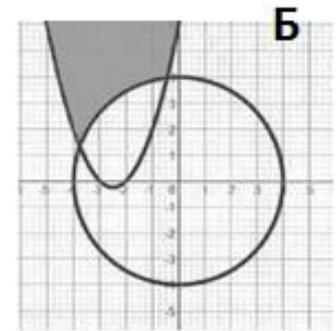
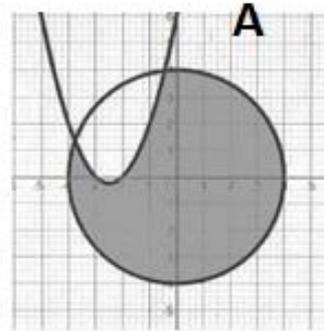
3. $a = -1$;

4. $a = 3$.

Задание 8.

При каком из графиков изображено решение системы неравенств?

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \geq y, \\ x^2 + y^2 \leq 16. \end{cases}$$



Оценивание

Ответы отправить в таблице, вписав выбранные. Каждое задание оценивается одним баллом.

№ задания	№ 1			№ 2			№ 3			№ 4	№ 5	№ 6			№ 7	№ 8
	А	В	С	А	В	С	А	В	С			А	Б	С		
О Т В Е Т																

«5» - 8 б.

«4» - 6 – 7 б.

«3» - 3 – 5 б.