Высшая математика

Начала линейной алгебры, математического анализа и теории вероятностей

Лектор Марголис Наталья Юрьевна

Литература

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика

Содержание:

- **I. Линейная алгебра** (матрицы, определители, решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера)
- **II. Математический анализ** (последовательности, функции, предел, производная, интеграл неопределенный, интеграл определенный, несобственные интегралы, числовые и функциональные ряды, функции многих переменных, кратные интегралы)
- **III. Теория вероятностей** (вероятность случайного события, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса, предельные теоремы, случайные величины: функции распределения и плотности вероятностей, числовые характеристики)

I. Линейная алгебра

Линейная алгебра – раздел алгебры, изучающий линейные объекты: системы линейных уравнений, линейные пространства, линейные отображения.

Линейная алгебра широко применяется в приложениях: линейном программировании, прикладном статистическом анализе, эконометрике и других дисциплинах.

Одним из основных инструментов, используемых в линейной алгебре, являются матрицы.

1.1. Матрицы

Определение 1. Матрицей размера $m \times n$ называется <u>прямоугольная таблица</u>, образованная элементами некоторого множества (числами, функциями, векторами) и имеющая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}.$$

Две матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ одинакового размера $m \times n$ равны ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), если

$\forall\, i = \overline{1,m}\,, j = \overline{1,n} \quad a_{ij} = b_{ij}.$

Матрица называется **квадратной,** если $m = n$.

Матрица A называется **нулевой**, если все ее элементы $a_{ij} = 0, \quad i = \overline{1, m}\ , j = \overline{1, n}$.

Квадратная матрица A размера $n \times n$ называется **диагональной,** если все элементы ее главной диагонали $a_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1, n}$, а все остальные элементы $a_{ij} = 0, i \neq j$.

Диагональная матрица, у которой все элементы $a_{ii} = 1,\ i = \overline{1, n}$, называется **единичной,**

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- Квадратная матрица A называется **симметричной,** если ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны, $a_{ij} = a_{ji},\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,n}.$

- **Действия над матрицами:**

1) Умножение матрицы на число

Чтобы матрицу $A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$ умножить на вещественное число C, нужно все ее элементы умножить на это число $\mathrm{C} \cdot A = \left\|C \cdot a_{ij}\right\|$.

2) Сложение матриц одинакового размера

Чтобы сложить две матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$ и $\mathrm{B} = \left\|b_{ij}\right\|_{m\times n}$, нужно сложить их элементы с одинаковыми номерами $A + B = \left\|a_{ij} + b_{ij}\right\|_{m\times n}$.

Сложение матриц коммутативно: $A + B = B + A$,
и ассоциативно: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3) Умножение матриц

Матрицу $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ можно умножить лишь на такую матрицу $B = \|b_{ij}\|_{n\times k}$, у которой число строк n совпадает с числом n столбцов матрицы A.

В этом случае произведением $A \times B$ матриц A и B называется

такая матрица $C = \|c_{ij}\|_{m\times k}$, у которой $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}.$

Таким образом, чтобы получить элемент c_{ij} матрицы $C = A \times B$, надо найти сумму произведений элементов i-ой строки матрицы A на элементы j-ого столбца матрицы B .

4) Транспонирование матрицы

Транспонировать матрицу – значит сделать ее строки столбцами, а столбцы – строками.

Транспонированная матрица $A^{\mathrm{T}} = \left\|a_{ji}\right\|_{n\times m}$ получается из матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$.

Свойства транспонирования матриц:

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(cA)^T = cA^T$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$;
5) у симметричной матрицы A $\quad A^T = A$.

Важной характеристикой квадратной матрицы $A = \|a_{i,j}\|_{n\times n}$ является ее **определитель** $\det A$ – число, равное алгебраической сумме произведений элементов матрицы А, полученной по определенному правилу.

Так при n=2 получаем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\text{-}a_{21}a_{12},$$

При n=3 $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} -$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}\text{-}a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32}\text{-}a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Свойства определителя:

1) $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$.
2) При перестановке двух строк матрицы или двух ее столбцов определитель меняет знак.
3) Общий множитель элементов любой строки/столбца определителя можно выносить за знак определителя.
4) Определитель не изменится, если к любой его строке/столбцу прибавить другую строку, умноженную на число $\alpha \neq 0$.

- Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если ее определитель $\det A = 0$.

Определение 2. Минором M_k k-го порядка матрицы $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием $m-k$ её строк и $n-k$ её столбцов.

Например, минорами первого порядка матрицы $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ являются все ее элементы. Если вычеркнуть у матрицы $A = \|a_{ij}\|_{3\times 3}$ вторую строку и второй столбец, то получившийся минор второго порядка имеет следующий вид:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определение 3. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{n-1}$, где M_{n-1} - это минор $(n-1)$-го порядка матрицы A, полученный вычеркиванием i-й строки и j-го столбца матрицы A.

Вычисление определителя матрицы $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$ удобно выполнять разложением определителя $\det A$ по элементам какой либо строки или столбца. Если делать это разложение по элементам первой строки матрицы, то $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$.

Определение 4. Ранг rang A **матрицы** $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ - это наибольший порядок k отличного от нуля минора M_k этой матрицы.

Определение 5. Матрица $S = \|\mathrm{A}_{ij}\|_{n\times n}$ алгебраических дополнений элементов a_{ij} матрицы $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$ называется **союзной матрицей** для матрицы A.

Определение 6. Матрица A^{-1} называется **обратной матрицей** для матрицы A, если $\mathrm{A}\, A^{-1} = A^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{E}$.

У каждой невырожденной матрицы $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$ существует единственная обратная матрица, определяемая по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} S^T$$

- 1.2. Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (*)$$

- Матрица $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ называется **основной матрицей,** а матрица $\mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ **- расширенной матрицей** этой системы уравнений.

Согласно теореме Кронекера-Капелли, система линейных уравнений $(*)$ имеет решение тогда и только тогда, когда $rang\ A = rang\ A^*$. Решение этой системы будет единственным, когда

$$rang\ A = rang\ A^* = n.$$

Матричный метод решения системы уравнений.

Обозначим вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец правых частей уравнений системы

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ соответственно, тогда система

уравнений примет вид: $AX = B$.

Если A – невырожденная квадратная матрица, то решение системы уравнений $(*)$ определяют по формуле: $\mathrm{X} = A^{-1}\mathrm{B}$.

Метод Крамера

Пусть A – невырожденная квадратная матрица. Обозначим определитель основной матрицы системы $(*)$ $\det A = D$, D_i - определители матриц, полученных заменой i-го столбца матрицы A на столбец свободных членов B. Тогда

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = \overline{1, n}$$