2D геометрия
Скаляр, Вектор, Матрица

- Скаляр
  - (пропись, italic)
- Вектор
  - (пропись, bold)
- Матрица
  - (заглавн., bold)

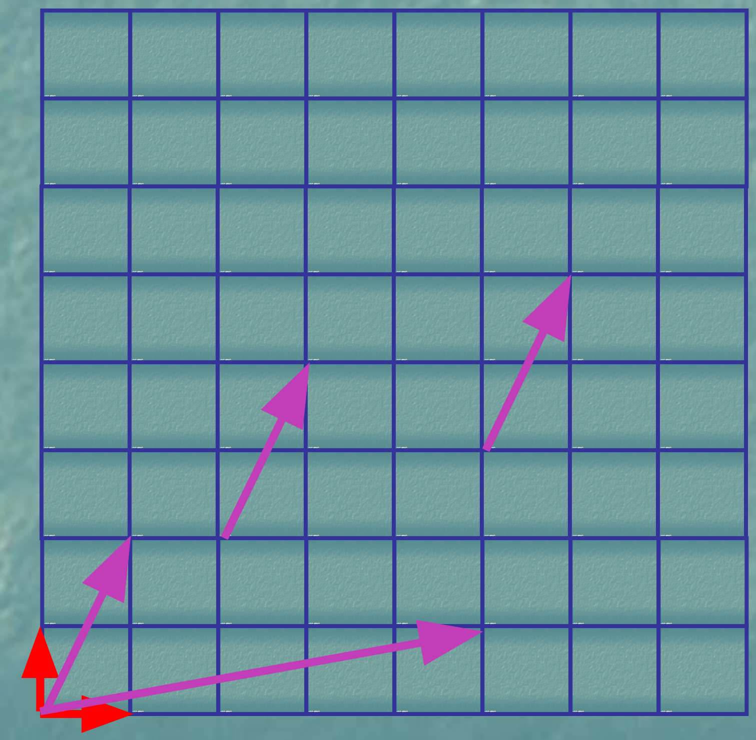
$$a$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Вектора

- **Стрелка**: длина и направление
  - ориентированный сегмент в nD пространстве
- **Смещение**
  - местоположение, если задан центр



- Вектор определяется направлением и…?
- **величиной** (также называют норма или длина),
- Вектор м.б. использован для представления чего?
- **направления**, силы…
- Что такое **единичный** вектор?
- вектор **величиной 1** (измеряется в выбранных единицах)
- Что представляет **единичный** вектор?
- **направление** (tang, внешняя нормаль)
- Что есть sV, где s это скаляр?
- вектор с направлением V, но норма масштабирована на s
- Что есть U+V?
- **сумма** смещений U и V

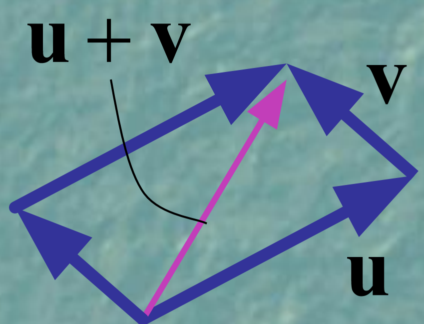
Описание векторов

- Вектор-строка $\mathbf{a}_{row} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$
- Вектор-столбец
$$\mathbf{a}_{col} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$
- Переход с транспонированной формой
$$\mathbf{a}_{col}^T = \mathbf{a}_{row}$$

Сложение вектор-вектор

- Сложить: vector + vector = vector
- Правило параллелограмма
  - “хвост к голове” закончит треугольник

геометрически



алгебраически

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}$$

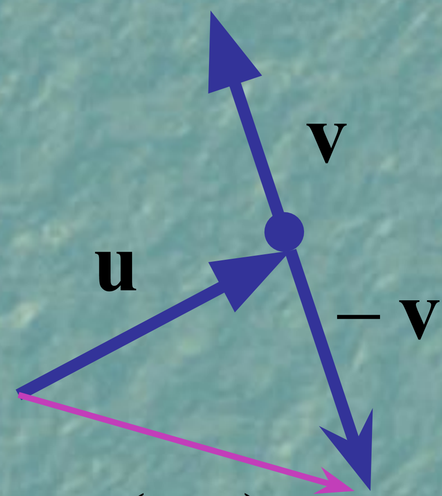
Примеры:

$$(3,2)+(6,4)=(9,6)$$

$$(2,5,1)+(3,1,-1)=(5,6,0)$$

Вычитание вектор-вектор

- вычитание: vector - vector = vector



$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{bmatrix}$$

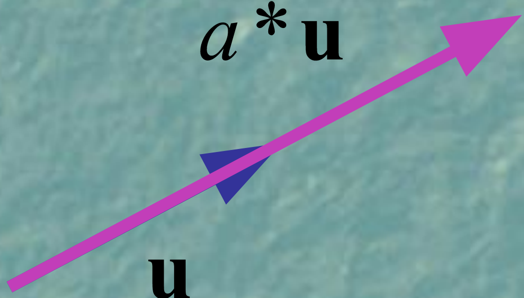
Примеры:

$$(3,2)-(6,4)=(-3,-2)$$

$$(2,5,1)-(3,1,-1)=(-1,4,2)$$

Умножение Скаляр-вектор

- умножение: scalar * vector = vector
  - Вектор масштабируется



$$a * \mathbf{u} = (a * u_1, a * u_2, a * u_3)$$

Примеры:

$$2 * (3,2) = (6,4)$$

$$.5 * (2,5,1) = (1,2.5,.5)$$

Умножение вектор-вектор

- умножение: vector * vector = scalar
- скалярное произведение $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (u_1 * v_1) + (u_2 * v_2) + (u_3 * v_3)$$

Умножение вектор-вектор (2)

- умножение : vector * vector = scalar
- скалярное произведение

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (u_1 * v_1) + (u_2 * v_2) + (u_3 * v_3)$$

Умножение вектор-вектор (3)

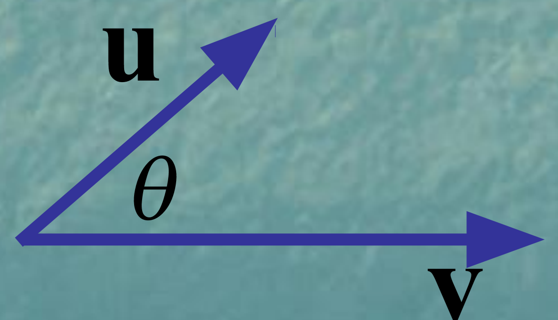
- умножение : vector * vector = scalar
- скалярное произведение

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \left(u_1 * v_1\right) + \left(u_1 * v_2\right) + \left(u_3 * v_3\right)$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

- Геометрическая интерпретация
  - длины, углы
  - можно найти угол между двумя векторами

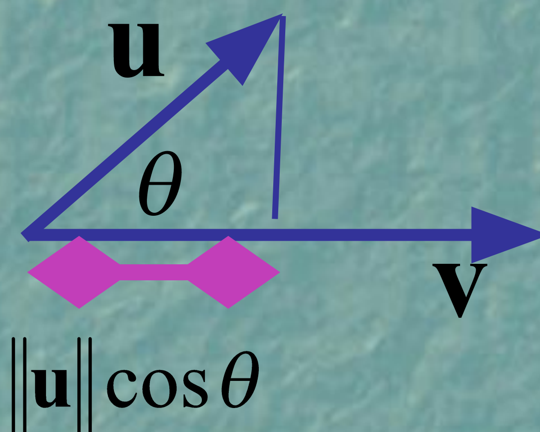


Скалярное произведение (геометрия)

- Можно найти длину проекции u на v

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

$$\|\mathbf{u}\| \cos\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$



- Линии становятся перпендикулярными, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \to 0$

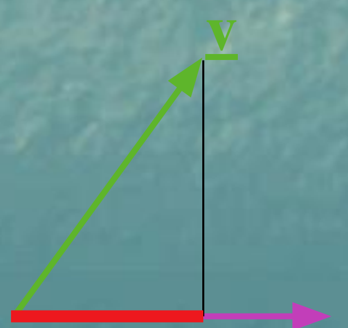
Скалярное произведение (2)

U·V = ||U|| · ||V|| · cos(angle(U,V))   U·V - скаляр.

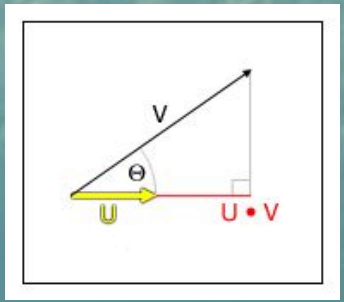
- U and V ортогональны ⇒ U·V==0

U·V==0 ⇒ (U==0 или V==0 или (U и V ортогональны)

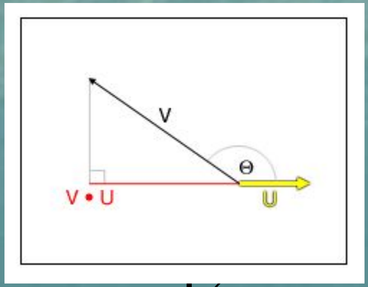
- U·V положительно если угол между U и V меньше 90°
- U·V = V·U, потому, что: cos(a)=cos(–a).
- u·v = cos(angle(u,v) # unit vectors: ||u|| = ||v|| = 1
  - Скалярное произведение двух единичных векторов - **косинус их угла**
- V·u = длина проекции V в направлении (единич.вектор) u
- ||U||= √(U·U) = длина U = норма U
- U^2 = U·U (короткая форма для $||U||^2$)



cos(angle(**u**,**v**))



V·U = U·V > 0



V·U = U·V < 0

Скалярное произведение(пример)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \left(u_1 * v_1\right) + \left(u_1 * v_2\right) + \left(u_3 * v_3\right)$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = (6*1) + (1*7) + (2*3) = 6 + 7 + 6 = 19$$

- Что измеряет скалярное произведение V•U когда U единич.вектор?
- Спроектированное смещение V на U
- Чему равно V•U когда U и V единич.вектора?
- cos(angle(U,V))
- Чему равно V•U для обычных U и V?
- cos(angle(U,V)) V.norm U.norm
- Когда V•U=0?
- U.norm=0 OR V.norm=0 OR U и V ортогональны
- Когда V•U>0?
- если угол между U и V меньше 90º
- Как подсчитать V•U?
- U.xV.x+U.yV.y
- Что такое V2?
- V2 = V•V = (V.norm)2

Скалярное произведение(Продолжение)

- умножение: vector * vector = vector
- перекрестное произведение
  - алгебраически

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{u_2 v_3} - \boxed{u_3 v_2} \\ \boxed{u_3 v_1} - \boxed{u_1 v_3} \\ \boxed{u_1 v_2} - \boxed{u_2 v_1} \end{bmatrix}$$

Скалярное произведение (Продолжение)

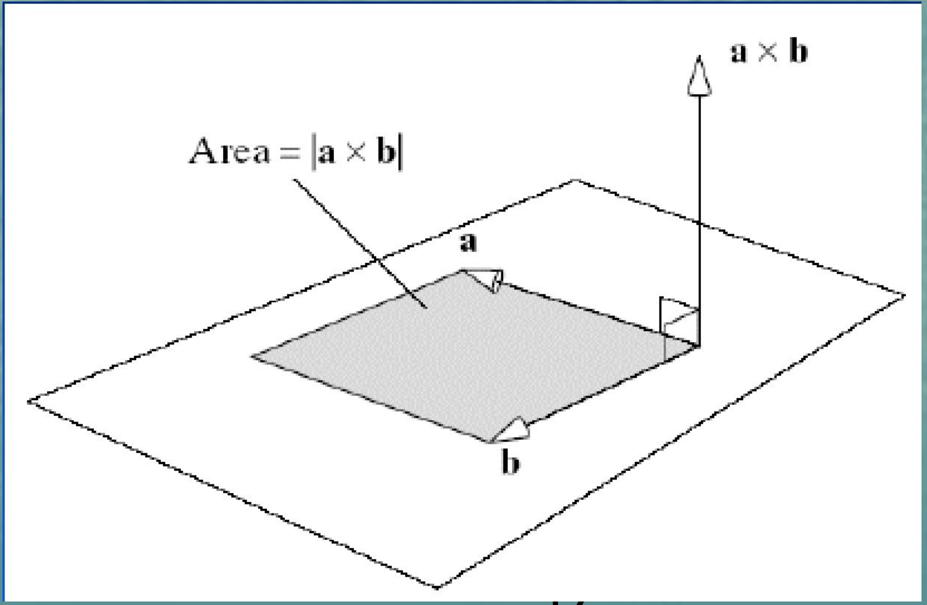
- умножение : vector * vector = vector
- перекрестное произведение

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

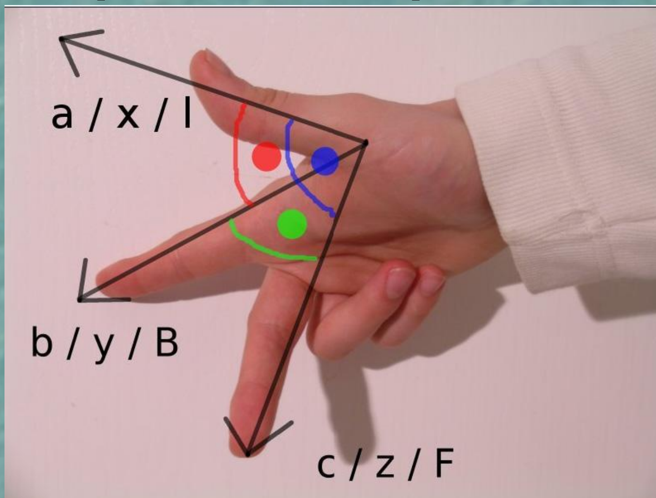
  - алгебраически
  - геометрически

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin\theta$$

    - $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ параллелогам. область
    - $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ перпендикуляр к параллелограмму

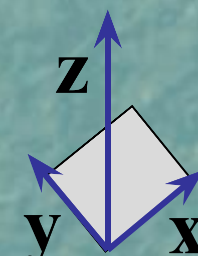


- Правосторонняя координатная система

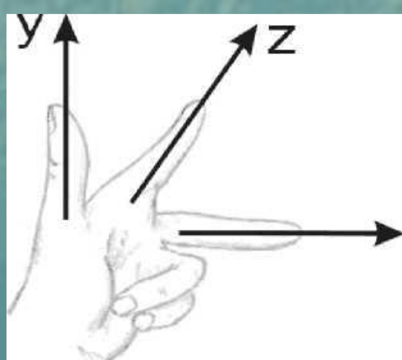


Правило правой руки:
указательный палец x, второй палец y; правый большой палец указывает вверх

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

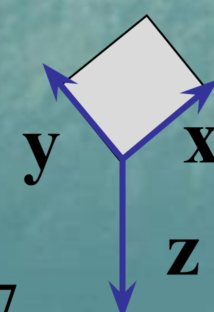


- Левосторонняя координатная система



Правило левой руки:
указательный палец x, второй палец y;; правый большой палец указывает вниз

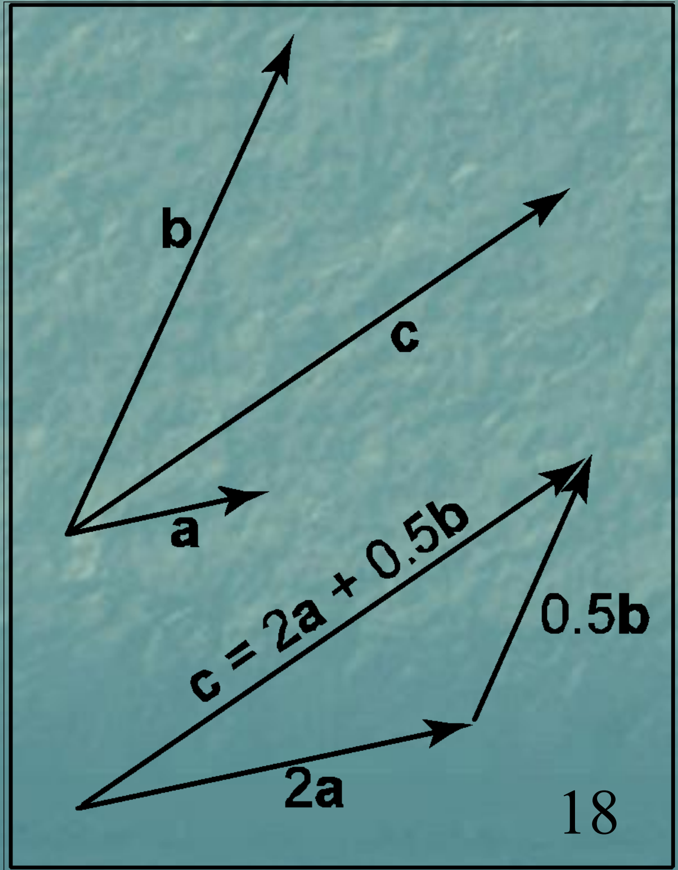
$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$



Векторы базиса

- Взять любых два линейно-независимых вектора (не равных 0 и не ||)
  - Можно использовать их линейную комбинацию для определения любого другого вектора :

$$\mathbf{c} = w_1\mathbf{a} + w_2\mathbf{b}$$

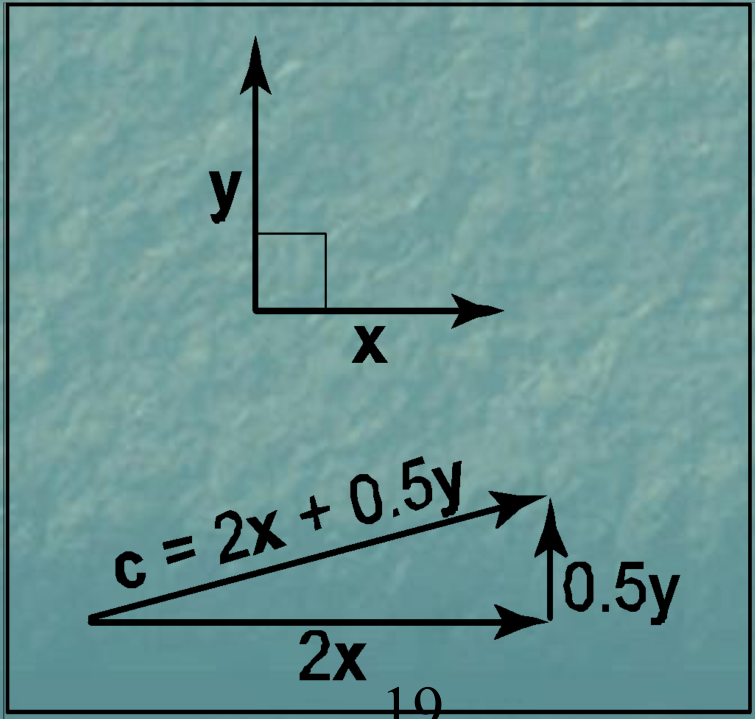


Ортонормальный базисный вектор

- Если базисные вектора ортонормальные

(ортонормальные(перпендикулярные) и единичной длины)

  - Мы имеем ***Картезианскую* (Декартову)** систему координат
  - знакомое Пифагорово определение расстояния



Ортонормальные алгебраические свойства

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1,$$

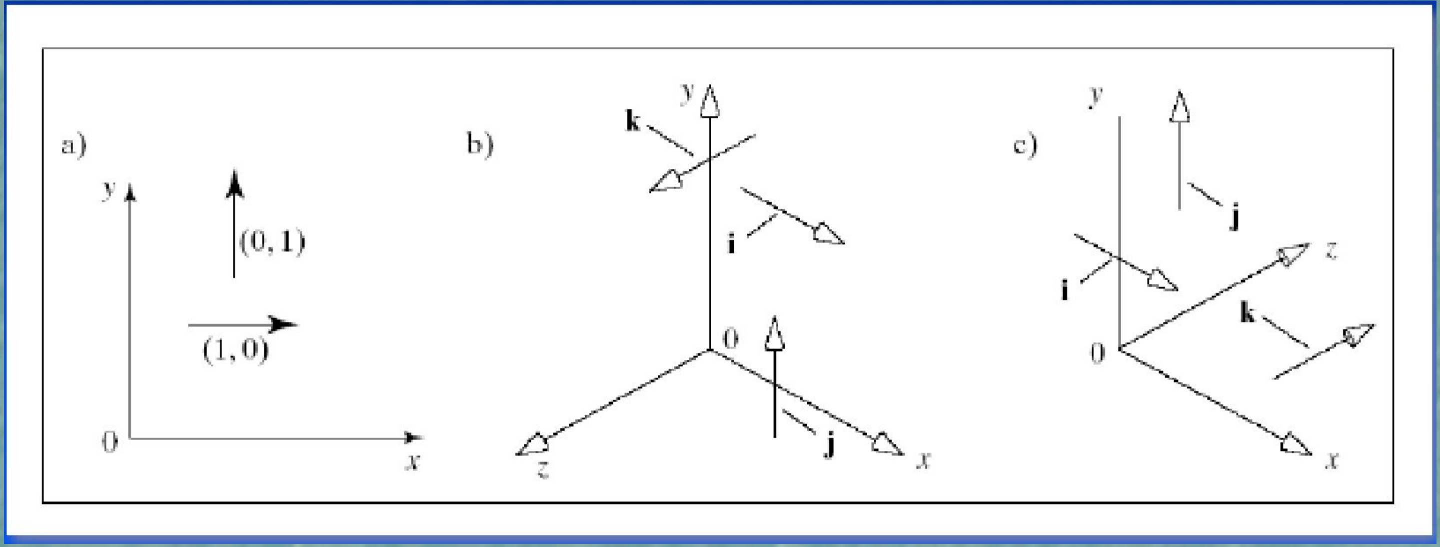
$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0$$

Стандартные единичные векторы в 3D

i = (1,0,0)

j = (0,1,0)

k = (0,0,1)

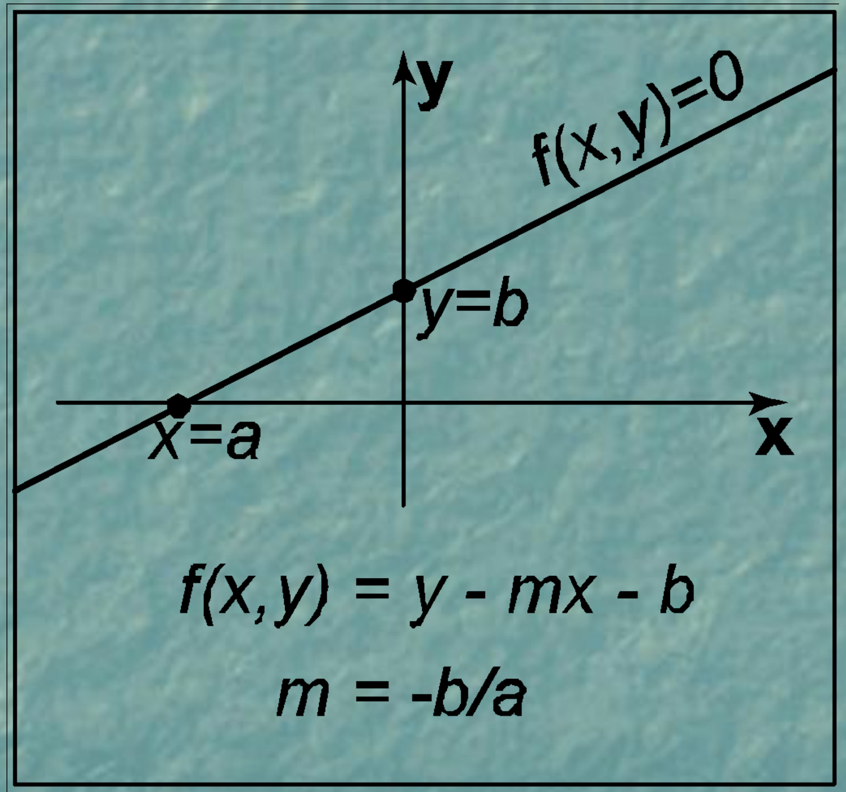


Правая рука

Левая рука

Линии

- форма наклонной, с точками пересечения
  - $y = mx + b$
- неявная форма
  - $y – mx – b = 0$
  - $Ax + By + C = 0$
  - $f(x,y) = 0$



Окружность

- $$f(x,y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2$$
  - окружность – это точки (x,y), где f(x,y) = 0
- $$p = (x,y), c = (x_c, y_c) : (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{c}) - r^2 = 0$$
  - точки **p** на окружности имеют свойство, что вектор из **c** в **p** дает скалярное произведение r^2
- $$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^2 - r^2 = 0$$
  - точки **p** на окружности имеют свойство, что квадрат расстояния из **c** в **p** - r^2
- $$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| - r = 0$$
  - точки **p** на окружности – расстоние *r* из центра **c**

Параметрические кривые

- Параметр: индекс изменяющийся непрерывно
  - (x,y): точка на кривой
  - t: параметр

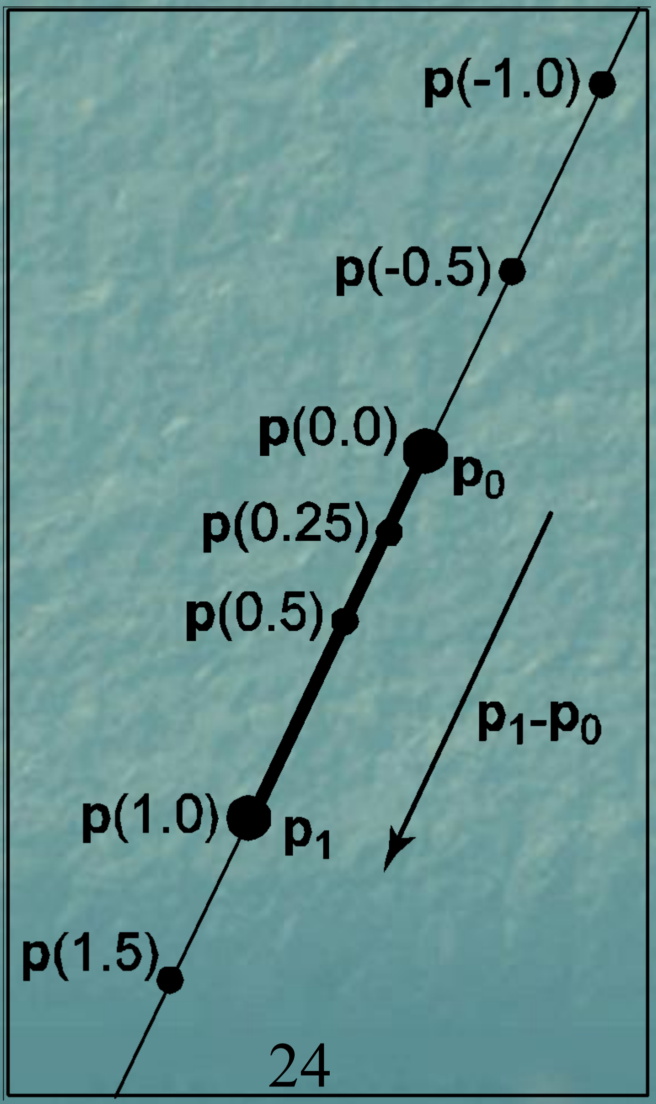
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$$

- Вектор из
  - $\mathbf{p} = f(t)$

2D параметрическая линия

- $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$
- $$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$
- $$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + t(\mathbf{d})$$

- Начинается в точке $\mathbf{p}_0$,
  и идет до $\mathbf{p}_1$,
  в соответствии с параметром t
  - $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_1$



Линейная интерполяция

- Параметричекая линия пример следующих общих поняти1
  - $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$
  - интерполяция
    - **p** идет через **a** в *t* = 0
    - **p** идет через **b** в *t* = 1
  - линейность
    - веса *t*, (1-*t*) линейные полиномиалы в t

Матрицы

- Множество чисел (m×n = m строки, n столбцы)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Сложение, умножение скаляром просто : элемент за элементом

Сложение матриц

- сложение: matrix + matrix = matrix

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}+m_{11} & n_{12}+m_{12} \\ n_{21}+m_{21} & n_{22}+m_{22} \end{bmatrix}$$

- пример

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 3+5 \\ 2+7 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Умножение скаляр - матрица

- умножение: скаляр * matrix = matrix

$$a\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a*m_{11} & a*m_{12} \\ a*m_{21} & a*m_{22} \end{bmatrix}$$

- пример

$$3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3*2 & 3*4 \\ 3*1 & 3*5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

Умножение матрица-матрица

- Можно только умножить (n,k) на (k,m): число левых столбцов = числу правых строк
  - разрешено

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$

  - неопределено

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ o & p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}$$

Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} \boxed{m_{11} & m_{12}} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{p_{11}} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$

Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$
$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$

Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$
$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$
$$p_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22}$$

Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ \boxed{m_{21} \quad m_{22}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_{11} & \boxed{n_{12}} \\ n_{21} & \boxed{n_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & \boxed{p_{22}} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$

$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$

$$p_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22}$$

$$p_{22} = m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22}$$

Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ \boxed{m_{21} \quad m_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & \boxed{n_{12}} \\ n_{21} & \boxed{n_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & \boxed{p_{22}} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$

$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$

$$p_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22}$$

$$p_{22} = m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22}$$

- некоммутативно: **AB != BA**

Умножение матрица-вектор

- точки вектора-столбца: постумножаются

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{bmatrix} \qquad \mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p}$$

- точки вектора-строка : предумножаются

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}^T \qquad \mathbf{p}'^T = \mathbf{p}^T \mathbf{M}^T$$

Умножение матрица-матрица

Пример умножения матриц

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 3} \\ 5 \quad 2 \\ 0 \quad 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{9 \quad 27 \quad 33 \quad 13} \\ 19 \quad 44 \quad 61 \quad 26 \\ 8 \quad 28 \quad 32 \quad 12 \end{pmatrix}$$

Матрицы

- транспонированная

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}$$

- идентичности

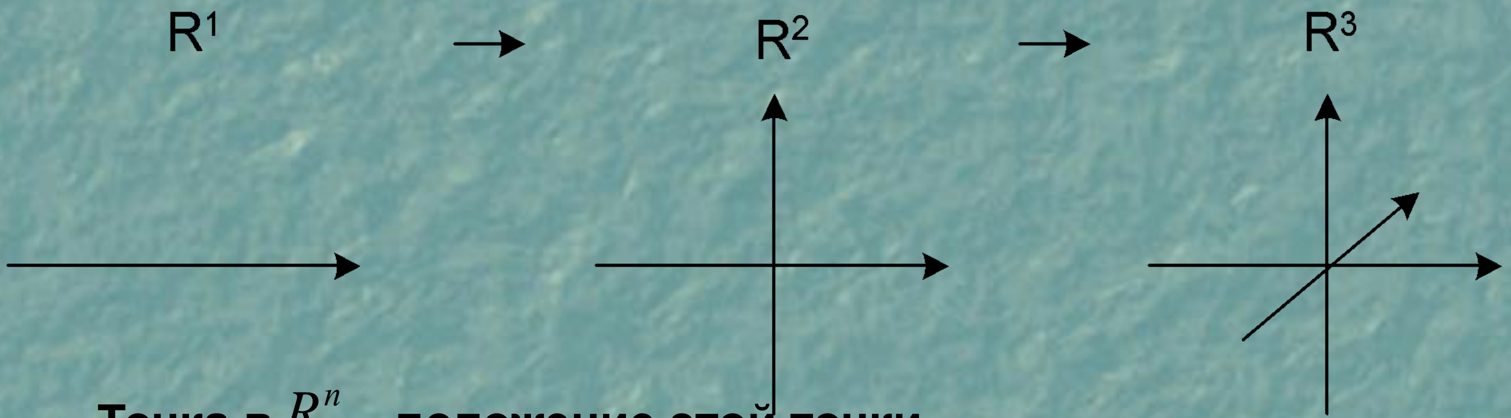
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- обратная

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

  - не все матрицы являются обратимыми

• Пространства



Точка в R^n - положение этой точки.

Для описания положения точки можно использовать:

- Векторное (линейное) пространство

- Аффинное пространство

- Евклидово пространство

- **Линейное пространство** создают скаляры и векторы.
- **Аффинное пространство** – добавляется понятие точки.
- **Евклидово пространство** – вводят понятие расстояние.
- **Системы координат:** Положение точки в пространстве может быть описано в виде комбинации некоторых линейно-независимых векторов .
- Если ввести скаляры , то можно описать вектор (положение точки) так:

$$W = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$$

Декартова (Картезианская) система координат

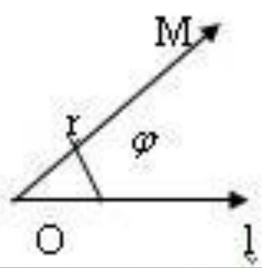
- **Базовая косоугольная система координат**

  Координаты определяются осями (x – ось абсцисс, y - ось ординат)

  Расстояние определяется проекциями $P(x, y)$

- **Полярная система координат**

  Точка О – полюс, - полярный угол , r – полярное расстояние.



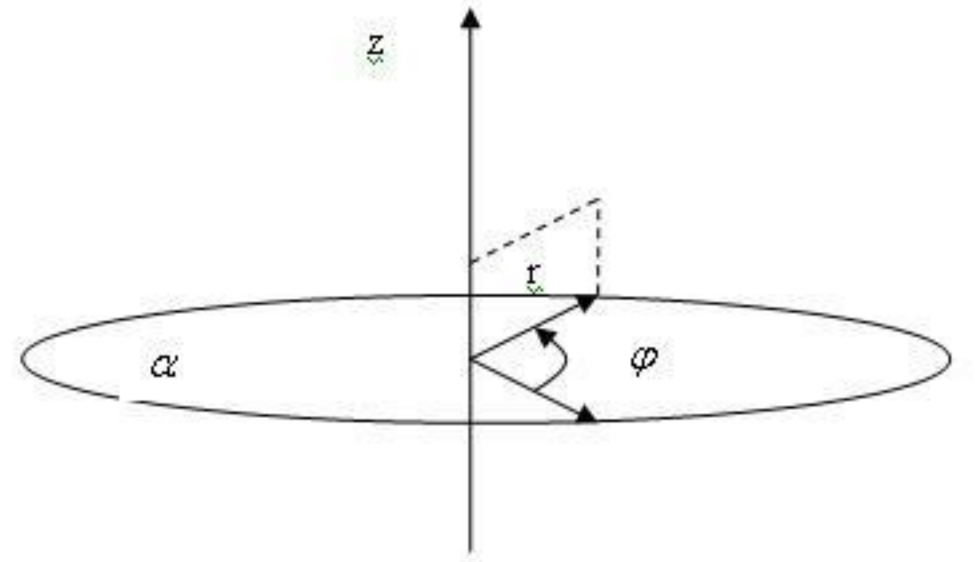
Точка O – полюс, φ - полярный угол , r – полярное расстояние.

M(r, φ)

Соответственно $x = r\cos\varphi$

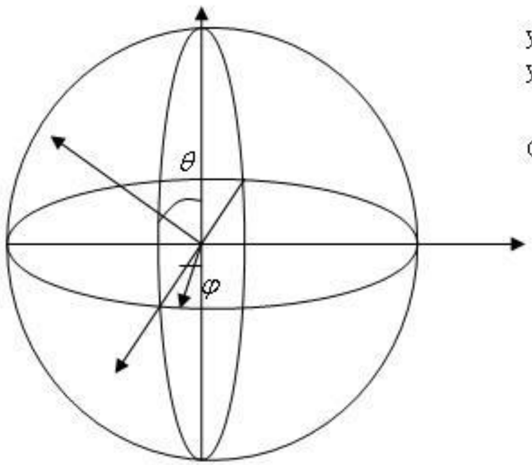
$y = r\sin\varphi$

Цилиндрические координаты



Есть некая плоскость Z проекция на точку М

Сферические системы координат



угол θ - полярное расстояние
угол φ - долгота

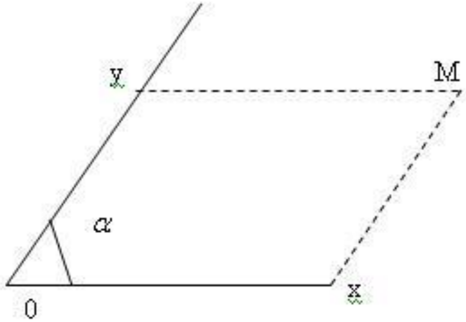
$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$

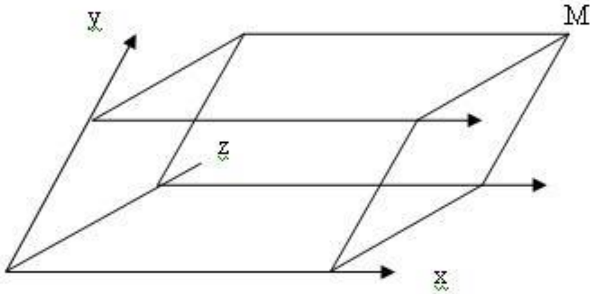
Соответственно $y = r\sin\varphi\sin\theta$

$$z = r\cos\varphi$$

1. $r = |OM|$
2. φ
3. θ

Косоугольная система координат





Декартова система координат	M(x,y,z)	
Полярная	$M(r,\varphi,\theta)$	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$
Цилиндрическая	$M(r,\varphi,z)$	$x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi = z$
Сферическая с коор.	$M(r,\varphi,\theta)$	$x = r\sin\varphi\cos\theta$ $y = r\sin\varphi\sin\theta$ $z = z\cos\varphi$

0 в середине экрана у Картезианской системе координат.

(.) $P(x,y)$ Все наши представления в векторах, в виде матрицы $|x,y|, \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$