



## 2D геометрия

### Скаляр, Вектор, Матрица

- Скаляр
  - (пропись, italic)
- Вектор
  - (пропись, bold)
- Матрица
  - (заглавн., bold)

$a$

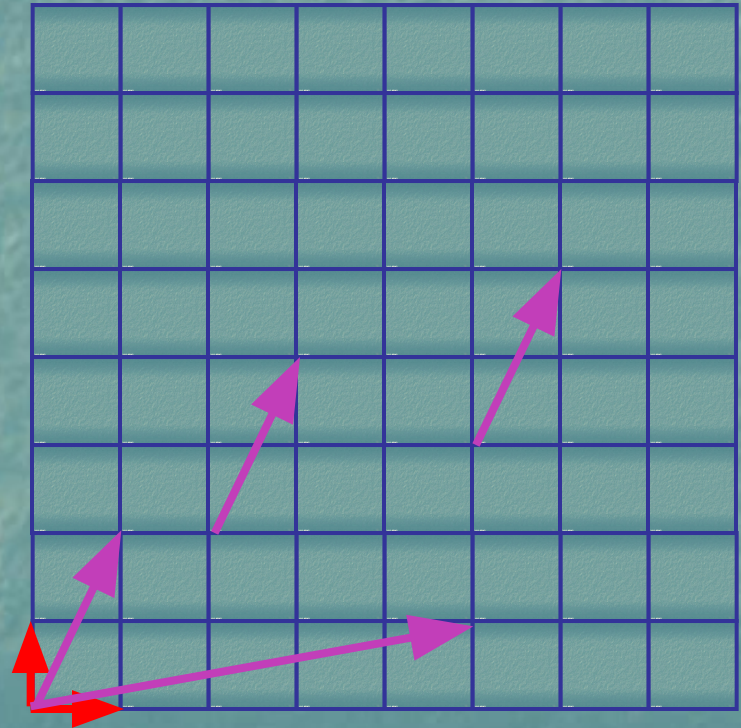
$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



## Вектора

- **Стрелка:** длина и направление
  - ориентированный сегмент в  $nD$  пространстве
- **Смещение**
  - местоположение, если задан центр





- Вектор определяется направлением и...?
- **величиной** (также называют норма или длина),
- Вектор м.б. использован для представления чего?
- **направления**, силы...
- Что такое **единичный** вектор?
- вектор **величиной 1** (измеряется в выбранных единицах)
- Что представляет **единичный** вектор?
- **направление** (tang, внешняя нормаль)
- Что есть  $sV$ , где  $s$  это скаляр?
- вектор с направлением  $V$ , но норма масштабирована на  $s$
- Что есть  $U+V$ ?
- **сумма** смещений  $U$  и  $V$



## Описание векторов

- Вектор-строка  $\mathbf{a}_{row} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$

- Вектор-столбец  $\mathbf{a}_{col} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$

- Переход с транспонированной формой

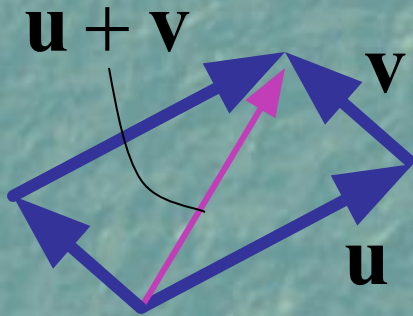
$$\mathbf{a}_{col}^T = \mathbf{a}_{row}$$



## Сложение вектор-вектор

- Сложить: vector + vector = vector
- Правило параллелограмма
  - “хвост к голове” закончит треугольник

геометрически



алгебраически

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$$

Примеры:

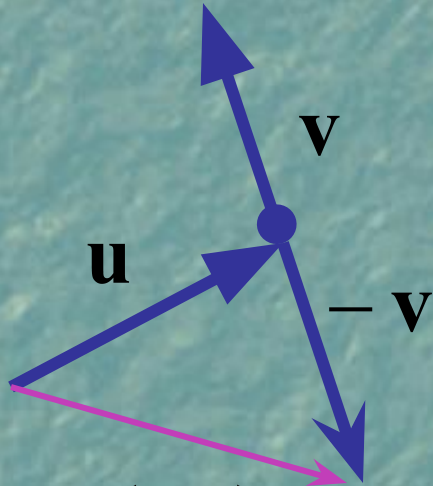
$$(3,2) + (6,4) = (9,6)$$

$$(2,5,1) + (3,1,-1) = (5,6,0)$$



## Вычитание вектор-вектор

- вычитание: vector - vector = vector



$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{bmatrix}$$

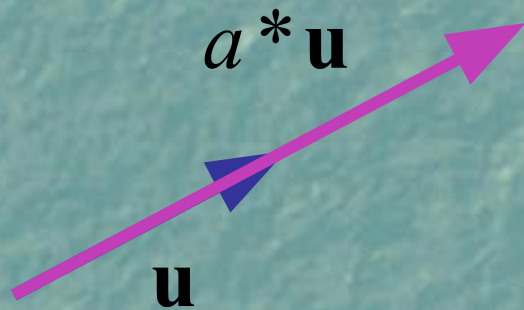
Примеры:  $(3,2) - (6,4) = (-3,-2)$

$$(2,5,1) - (3,1,-1) = (-1,4,2)$$



## Умножение Скаляр-вектор

- умножение: scalar \* vector = vector
  - Вектор масштабируется



$$a * \mathbf{u} = (a * u_1, a * u_2, a * u_3)$$

Примеры:

$$2 * (3, 2) = (6, 4)$$

$$.5 * (2, 5, 1) = (1, 2.5, .5)$$



## Умножение вектор-вектор

- умножение: vector \* vector = scalar
- скалярное произведение

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (u_1 * v_1) + (u_2 * v_2) + (u_3 * v_3)$$





## Умножение вектор-вектор (2)

- умножение : vector \* vector = scalar

- скалярное произведение  $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (u_1 * v_1) + (u_2 * v_2) + (u_3 * v_3)$$



## Умножение вектор-вектор (3)

- умножение : vector \* vector = scalar

- скалярное произведение

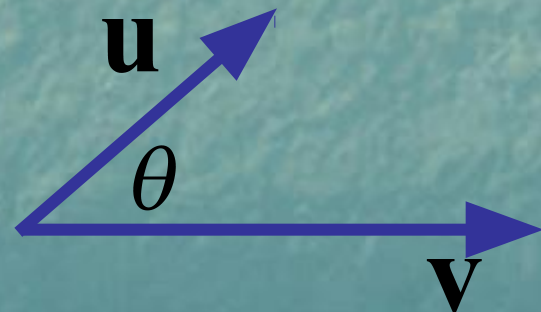
$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (u_1 * v_1) + (u_2 * v_2) + (u_3 * v_3)$$

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

- Геометрическая интерпретация

- длины, углы
- можно найти угол между двумя векторами



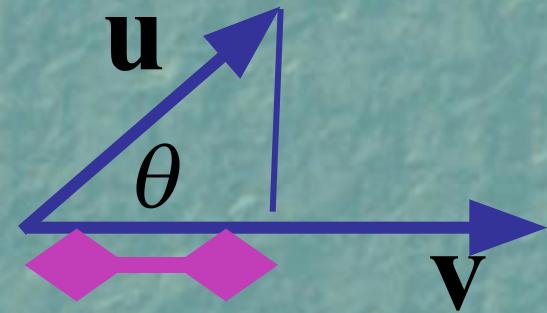


## Скалярное произведение (геометрия)

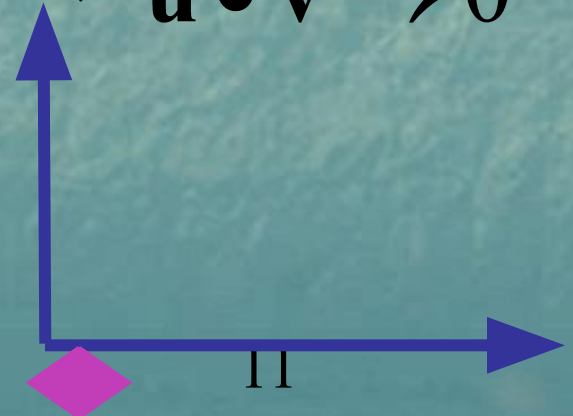
- Можно найти длину проекции  $u$  на  $v$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

$$\|\mathbf{u}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$



- Линии становятся перпендикулярными,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rightarrow 0$





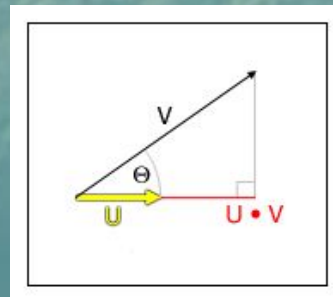
## Скалярное произведение (2)

$U \cdot V = \|U\| \cdot \|V\| \cdot \cos(\text{angle}(U, V))$   $U \cdot V$  - скаляр.

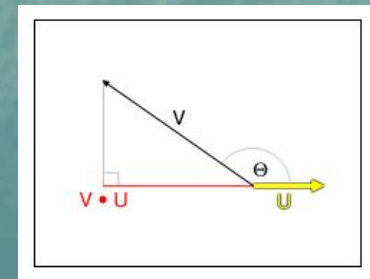
- $U$  and  $V$  ортогональны  $\Rightarrow U \cdot V = 0$

$U \cdot V = 0 \Rightarrow (U = 0 \text{ или } V = 0 \text{ или } (U \text{ и } V \text{ ортогональны}))$

- $U \cdot V$  положительно если угол между  $U$  и  $V$  меньше  $90^\circ$
- $U \cdot V = V \cdot U$ , потому, что:  $\cos(a) = \cos(-a)$ .
- $u \cdot v = \cos(\text{angle}(u, v))$  # unit vectors:  $\|u\| = \|v\| = 1$ 
  - Скалярное произведение двух единичных векторов - **косинус их угла**
- $V \cdot u$  = длина проекции  $V$  в направлении (единич.вектор)  $u$
- $\|U\| = \sqrt{U \cdot U}$  = длина  $U$  = норма  $U$
- $U^2 = U \cdot U$  (короткая форма для  $\|U\|^2$ )



$$V \cdot U = U \cdot V > 0$$



$$V \cdot U = U \cdot V < 0$$



## Скалярное произведение(пример)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = (u_1 * v_1) + (u_1 * v_2) + (u_3 * v_3)$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = (6 * 1) + (1 * 7) + (2 * 3) = 6 + 7 + 6 = 19$$



- Что измеряет скалярное произведение  $V \cdot U$  когда  $U$  единич.вектор?
  - Спроектированное смещение  $V$  на  $U$
- Чему равно  $V \cdot U$  когда  $U$  и  $V$  единич.вектора?
  - $\cos(\text{angle}(U, V))$
- Чему равно  $V \cdot U$  для обычных  $U$  и  $V$ ?
  - $\cos(\text{angle}(U, V)) V.\text{norm} U.\text{norm}$
- Когда  $V \cdot U = 0$ ?
  - $U.\text{norm} = 0$  OR  $V.\text{norm} = 0$  OR  $U$  и  $V$  ортогональны
- Когда  $V \cdot U > 0$ ?
  - если угол между  $U$  и  $V$  меньше  $90^\circ$
- Как подсчитать  $V \cdot U$ ?
  - $U.xV.x + U.yV.y$
- Что такое  $V^2$ ?
  - $V^2 = V \cdot V = (V.\text{norm})^2$



## Скалярное произведение(Продолжение)

- умножение: vector \* vector = vector
- перекрестное произведение
  - алгебраически

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$



## Скалярное произведение (Продолжение)

- умножение : vector \* vector = vector
- перекрестное произведение

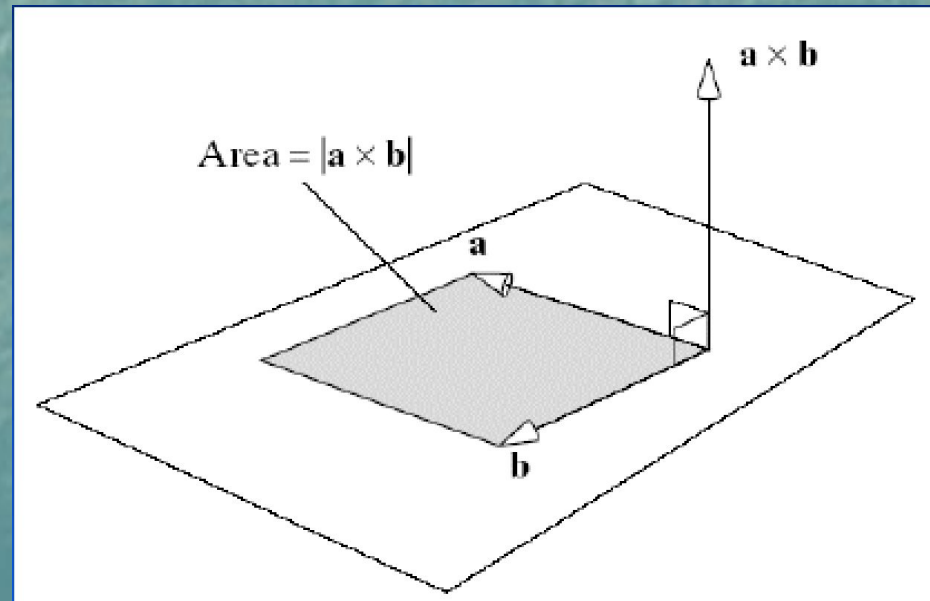
- алгебраически

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

- геометрически

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

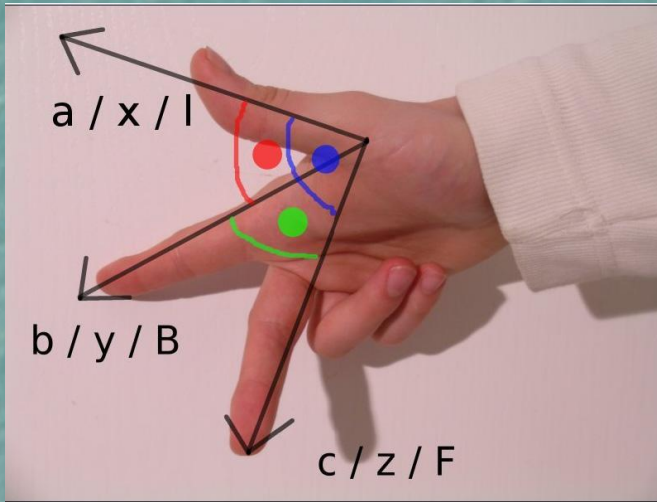
- $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$  параллелограм. область
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  перпендикуляр к параллелограмму





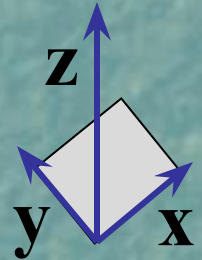


- Правосторонняя координатная система

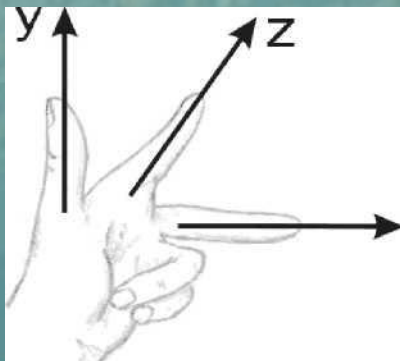


*Правило правой руки:*  
 указательный палец  $x$ , второй палец  $y$ ;  
 правый большой палец  
 указывает вверх

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

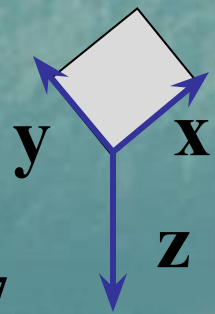


- Левосторонняя координатная система



*Правило левой руки:*  
 указательный палец  $x$ , второй палец  $y$ ;;  
 левый большой палец  
 указывает вниз

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

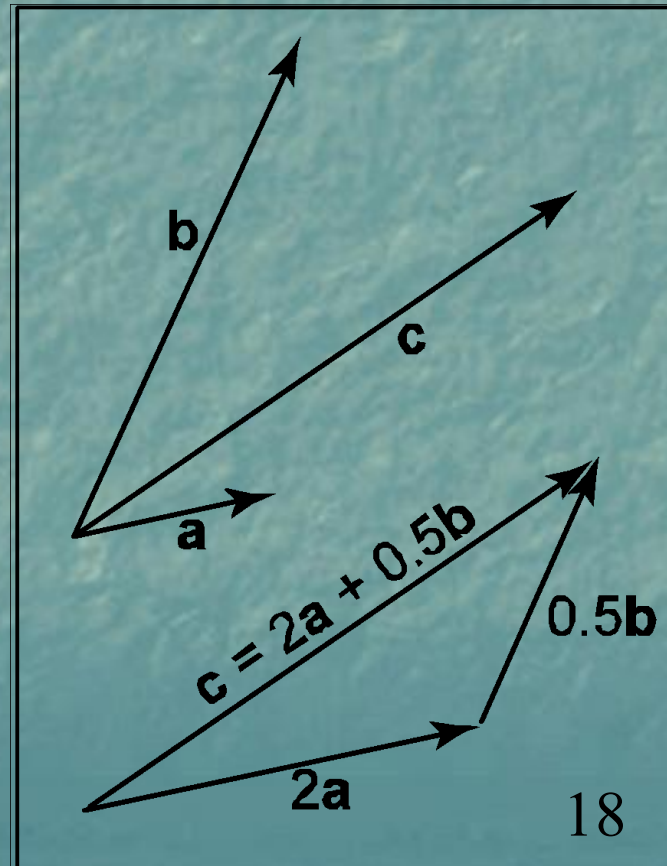




## Векторы базиса

- Взять любых два **линейно-независимых** вектора (не равных 0 и не  $\parallel$ )
  - Можно использовать их линейную комбинацию для определения любого другого вектора :

$$\mathbf{c} = w_1 \mathbf{a} + w_2 \mathbf{b}$$





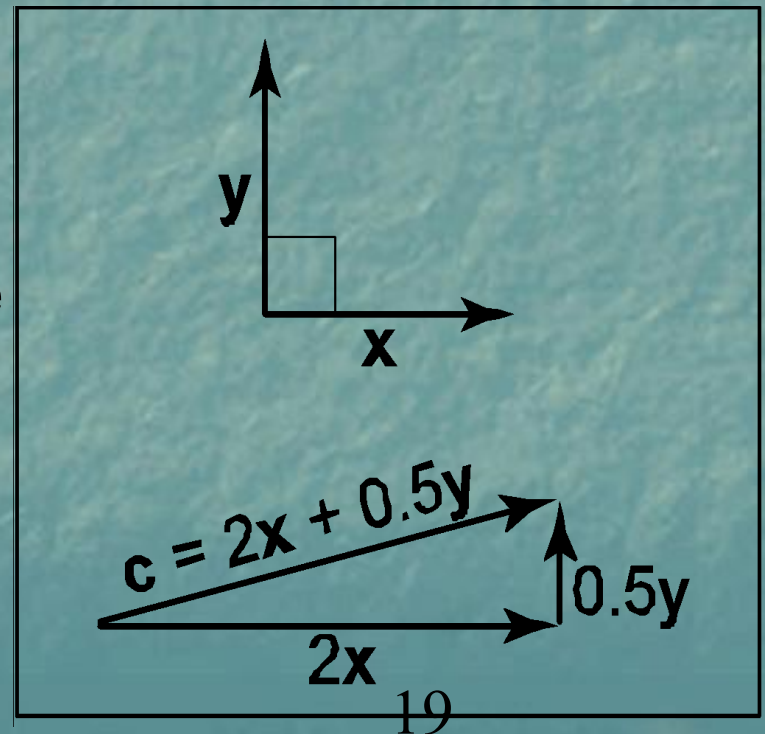
## Ортонормальный базисный вектор

- Если базисные вектора ортонормальные ( **ортонормальные** ( перпендикулярные) и единичной длины)
  - Мы имеем *Картезианскую* (Декартову) систему координат
  - знакомое Пифагорово определение расстояния

Ортонормальные алгебраические свойства

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1,$$

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = 0$$



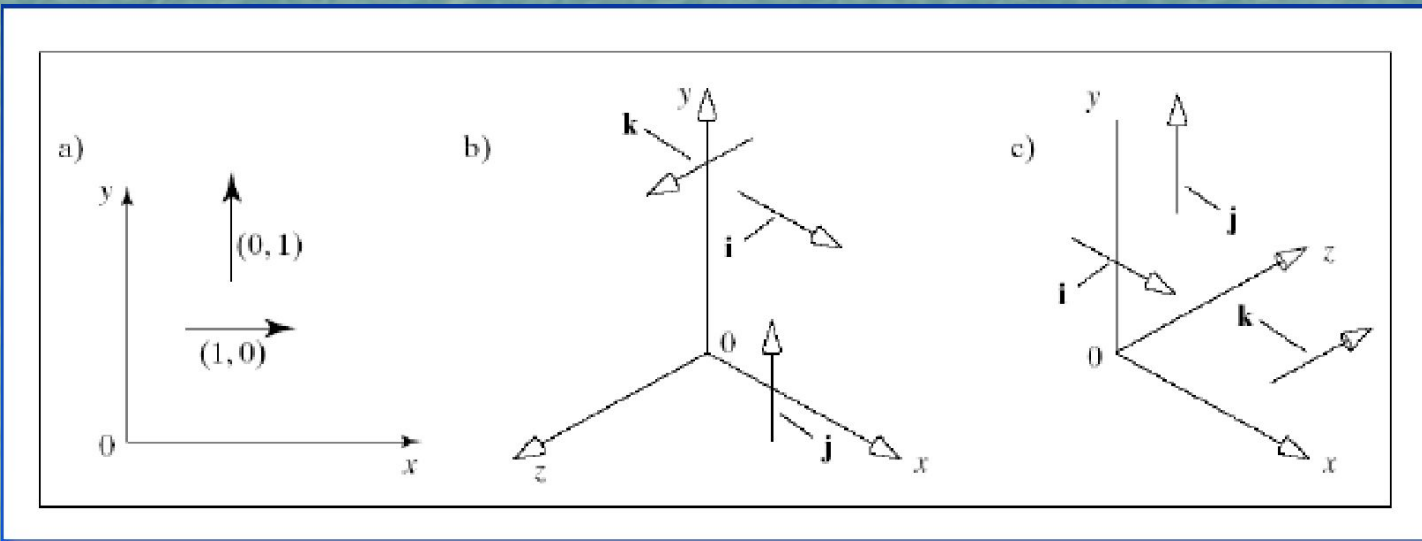


## Стандартные единичные векторы в 3D

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$$



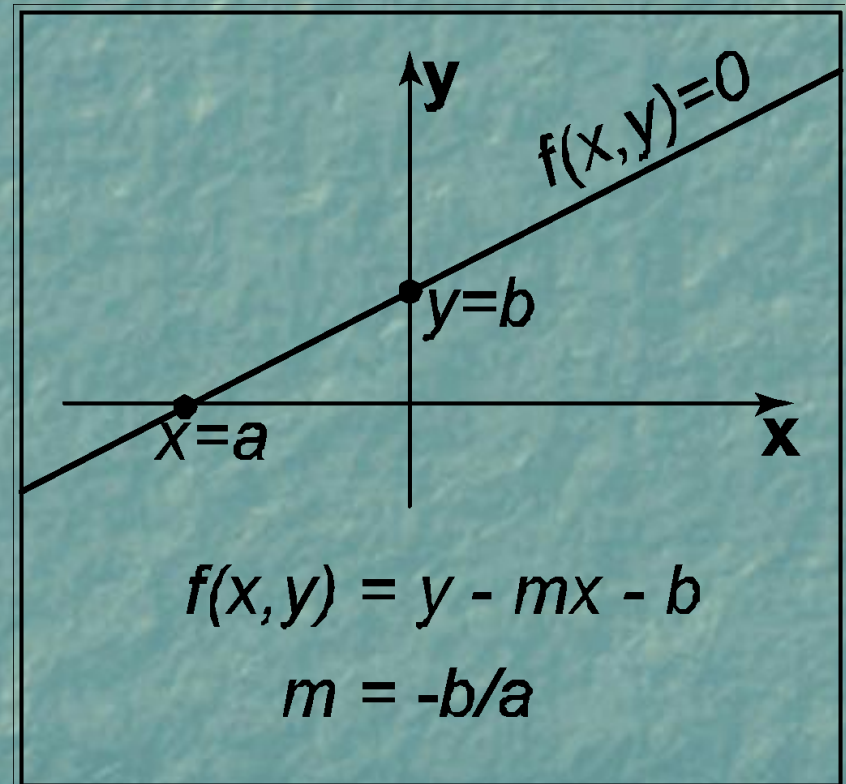
Правая рука

Левая рука



## Линии

- форма наклонной, с точками пересечения
  - $y = mx + b$
- неявная форма
  - $y - mx - b = 0$
  - $Ax + By + C = 0$
  - $f(x,y) = 0$





## Окружность

- $f(x, y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2$ 
  - окружность – это точки  $(x, y)$ , где  $f(x, y) = 0$
- $p = (x, y), c = (x_c, y_c) : (\mathbf{p} - \mathbf{c}) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{c}) - r^2 = 0$ 
  - точки  $\mathbf{p}$  на окружности имеют свойство, что вектор из  $\mathbf{c}$  в  $\mathbf{p}$  дает скалярное произведение  $r^2$
- $\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^2 - r^2 = 0$ 
  - точки  $\mathbf{p}$  на окружности имеют свойство, что квадрат расстояния из  $\mathbf{c}$  в  $\mathbf{p}$  -  $r^2$
- $\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| - r = 0$ 
  - точки  $\mathbf{p}$  на окружности – расстояние  $r$  из центра  $\mathbf{c}$



## Параметрические кривые

- Параметр: индекс изменяющийся непрерывно

- $(x, y)$ : точка на кривой
- $t$ : параметр

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$$

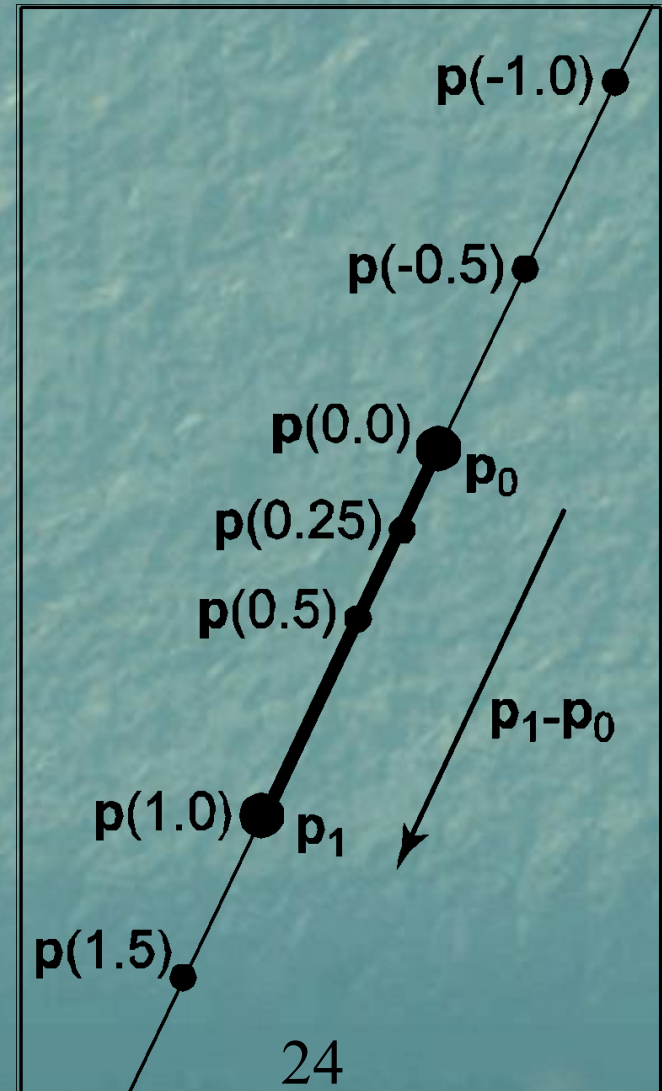
- Вектор из

- $\mathbf{p} = f(t)$



## 2D параметрическая линия

- $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$
- $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$
- $\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + t(\mathbf{d})$
- Начинается в точке  $\mathbf{p}_0$ ,  
и идет до  $\mathbf{p}_1$ ,  
в соответствии с параметром  $t$ 
  - $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_1$







## Линейная интерполяция

- Параметрическая линия пример следующих общих понятий
  - $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$
  - интерполяция
    - $\mathbf{p}$  идет через  $\mathbf{a}$  в  $t = 0$
    - $\mathbf{p}$  идет через  $\mathbf{b}$  в  $t = 1$
  - линейность
    - веса  $t, (1-t)$  линейные полиномиалы в  $t$



# Матрицы

- Множество чисел ( $m \times n = m$  строки,  $n$  столбцы)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Сложение, умножение скаляром просто : элемент за элементом



## Сложение матриц

- сложение: matrix + matrix = matrix

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} + m_{11} & n_{12} + m_{12} \\ n_{21} + m_{21} & n_{22} + m_{22} \end{bmatrix}$$

- пример

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 3 + 5 \\ 2 + 7 & 4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$



## Умножение скаляр - матрица

- умножение: скаляр \* matrix = matrix

$$a \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a * m_{11} & a * m_{12} \\ a * m_{21} & a * m_{22} \end{bmatrix}$$

- пример

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 * 2 & 3 * 4 \\ 3 * 1 & 3 * 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$



## Умножение матрица-матрица

- Можно только умножить  $(n,k)$  на  $(k,m)$ :  
число левых столбцов = числу правых строк

- разрешено

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \\ l & m \end{bmatrix}$$

- неопределено

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ o & p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & i \\ j & k \end{bmatrix}$$



## Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$



## Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$

$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$



## Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$

$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$

$$p_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22}$$





## Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$

$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$

$$p_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22}$$

$$p_{22} = m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22}$$



## Умножение матрица-матрица

- Строка на столбец

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = m_{11}n_{11} + m_{12}n_{21}$$

$$p_{21} = m_{21}n_{11} + m_{22}n_{21}$$

$$p_{12} = m_{11}n_{12} + m_{12}n_{22}$$

$$p_{22} = m_{21}n_{12} + m_{22}n_{22}$$

- некоммутативно: **AB  $\neq$  BA**



## Умножение матрица-вектор

- точки вектора-столбца: постумножаются

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p}$$

- точки вектора-строка : предумножаются

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}'^T = \mathbf{p}^T \mathbf{M}^T$$



## Умножение матрица-матрица

Пример умножения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 & 33 & 13 \\ 19 & 44 & 61 & 26 \\ 8 & 28 & 32 & 12 \end{pmatrix}$$



# Матрицы

- транспонированная

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} & m_{41} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} & m_{42} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{43} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix}$$

- ИДЕНТИЧНОСТИ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

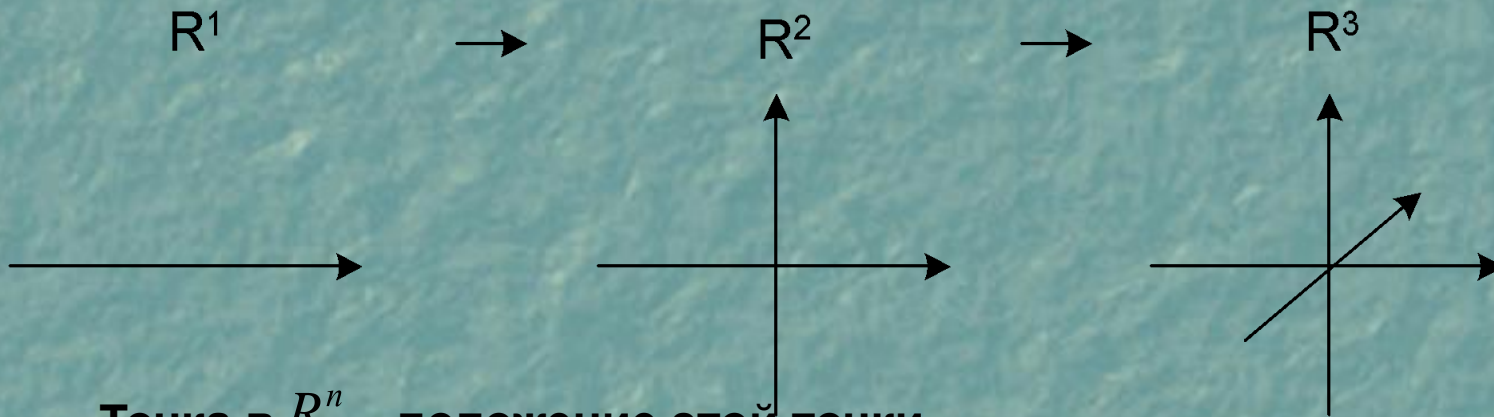
- обратная

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

- не все матрицы являются обратимыми



## • Пространства



Точка в  $R^n$  - положение этой точки.

Для описания положения точки можно использовать:

- Векторное (линейное) пространство
- Аффинное пространство
- Евклидово пространство



- **Линейное пространство** создают скаляры и векторы.
- **Аффинное пространство** – добавляется понятие точки.
- **Евклидово пространство** – вводят понятие расстояние.
- **Системы координат:** Положение точки в пространстве может быть описано в виде комбинации некоторых линейно-независимых векторов .
- Если ввести скаляры , то можно описать вектор (положение точки) так:

$$W = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$$



# Декартова (Картезианская) система координат







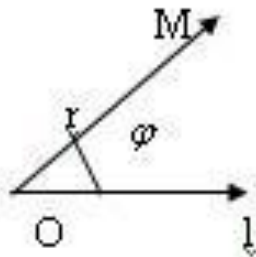
- **Базовая косоугольная система координат**

Координаты определяются осями (  $x$  – ось абсцисс,  $y$  - ось ординат)

Расстояние определяется проекциями  $P(x, y)$

- **Полярная система координат**

Точка  $O$  – полюс,  $\varphi$  – полярный угол ,  $r$  – полярное расстояние.



Точка  $O$  – полюс,  $\varphi$  - полярный угол ,  $r$  – полярное расстояние.

$M(r, \varphi)$

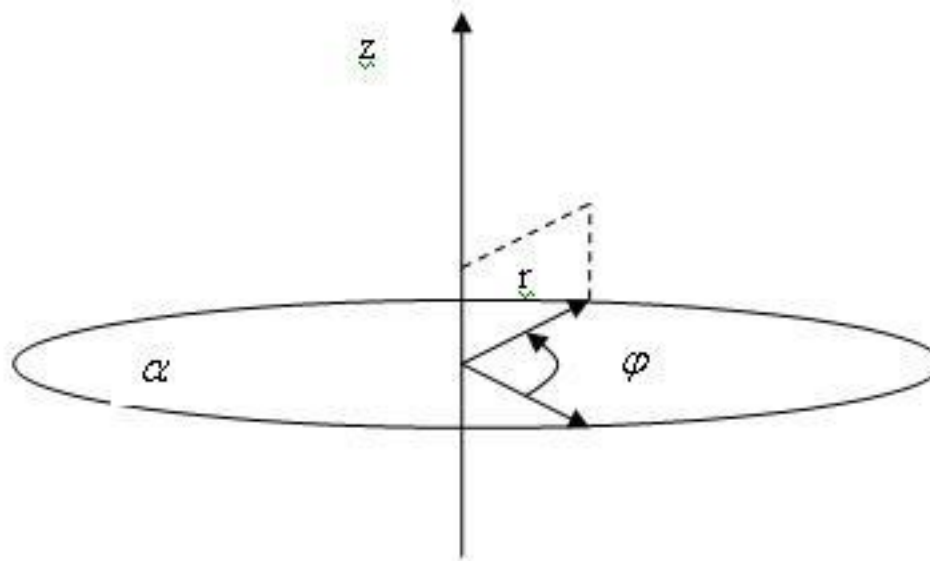
Соответственно

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



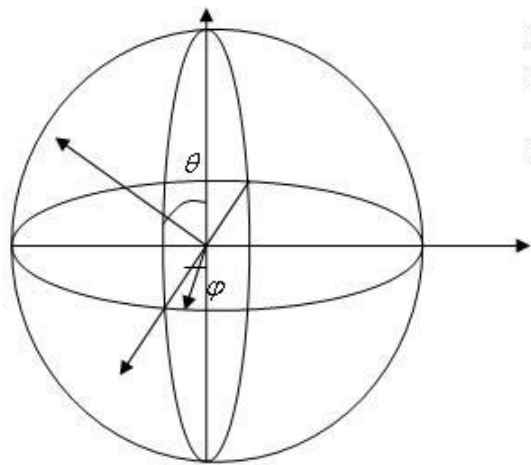
## Цилиндрические координаты



Есть некая плоскость  $Z$  проекция на точку  $M$



### Сферические системы координат



угол  $\theta$  - полярное расстояние

угол  $\varphi$  - долгота

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

Соответственно  $y = r \sin \varphi \sin \theta$

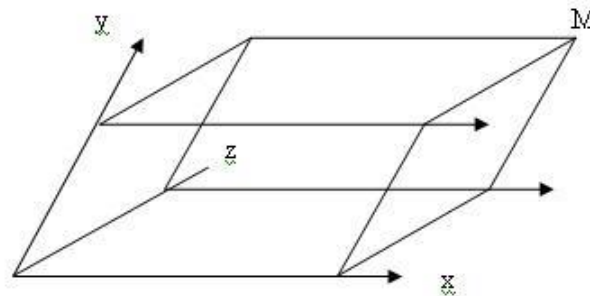
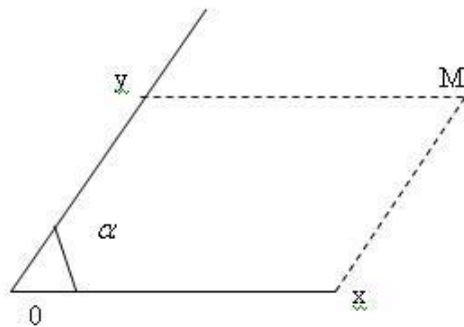
$$z = r \cos \varphi$$

1.  $r = |OM|$

2.  $\varphi$

3.  $\theta$

### Косоугольная система координат





Декартова система координат	$M(x, y, z)$	
Полярная	$M(r, \varphi, \theta)$	$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$
Цилиндрическая	$M(r, \varphi, z)$	$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi = z$
Сферическая с коор.	$M(r, \varphi, \theta)$	$x = r \sin \varphi \cos \theta$ $y = r \sin \varphi \sin \theta$ $z = z \cos \varphi$

0 в середине экрана у Картезианской системе координат.

(.)  $P(x, y)$  Все наши представления в векторах, в виде матрицы  $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$