

Предел переменной величины. Основные свойства пределов

Определение предела

Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при x , стремящемся к x_0 (или в точке x_0) если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если A есть предел функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 , то пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) = A$ при $x \rightarrow x_0$.

1° Предел суммы/разности двух функций равен сумме/разности их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

° Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3° Предел частного двух функций равен частному их пределов, при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

4° Константу можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

5° Предел степени с натуральным показателем равен степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n, n \in \mathbb{N}$$

Вычислите пределы:

5. 1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5)$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 1)$.

6. 1) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 5x^2 + x - 4)$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + x^2 - 8x + 10)$.

7. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} [(7x + 2)(4x - 3)(5x + 1)]$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 1)(x - 3)(x - 5)]$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} [(2x - 4)(x - 1)(x + 2)]$.

8. 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$.

9. 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x^2 + 2x}$.

10. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x}{x}$.

11. 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$.

12. 1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

13. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$.

14. 1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -2/3} \frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 8x + 4}$.

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найдите предел функции $y=f(x)$, при x стремящимся к бесконечности.

$$f(x) = \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$$

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$

Разделим числитель и знаменатель дроби на x в третьей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{x^3}}{10 + \frac{5}{x^3}}$$

Воспользуемся свойствами предела на бесконечности

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (5 - \frac{1}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (10 + \frac{5}{x^3})}$$

Предел числителя равен: $5-0=5$; Предел знаменателя равен: $10+0=10$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x + 4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{4}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{2 - \frac{3}{\infty} + \frac{5}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0} = \frac{2}{\text{б.м.ф.}} = \text{б.б.ф.} = \infty.$$

Пределы на бесконечности

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 2}{3x^2 + 5x - 2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2 - 1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x - 1}{x^5 + 7x^3 + 11}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + x - 5}{x^2 + 8x^5 + 1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + 3x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 11}{x^2 - 1 + 3x^3}.$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Пример

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = \\ &= 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Замечательные пределы

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Пример

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= (1^\infty) = \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \\ &= \left(\lim_{\frac{x}{2} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2 = e^2 \end{aligned}$$

Вычислите пределы:

$$33. \quad 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{4x}\right)^x.$$

$$34. \quad 1) \lim_{z \rightarrow 0} (1 + 4z)^{3/5z}, \quad 2) \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-z}.$$