

# Линейная и векторная алгебра

• матрицы

• определители

• обратная матрица

• ранг матрицы

• системы линейных уравнений

• элементы векторной алгебры

# матрицы

- Определение матрицы
- Виды матрицы
- Равенство матриц
- Сложение матриц
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц



# Определение матрицы

Общий вид записи матрицы из  $m \times n$  чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, составленная из  $m \times n$  чисел, называется **матрицей**.

Для обозначения матрицы применяются круглые скобки и прописные буквы А, В, С ...

Числа  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ , составляющие матрицу, называются её элементами.

Горизонтальные ряды матрицы называются **строками** матрицы

вертикальные - **столбцами**.

Индексы  $i$  и  $j$  элемента  $a_{ij}$ , где  $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ , означают, что этот элемент расположен в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица обозначается также в форме  $A(a_{ij})_{m \times n}$ , где  $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ .



# Виды матриц

- Квадратная матрица
- Диагональная матрица
- Единичная матрица
- Матрица-строка Матрица-строка Матрица-строка и матрица-столбец
- Транспонированная матрица



# Квадратная матрица

- Матрица, у которой число строк равно числу ее столбцов называется квадратной матрицей. При этом число ее строк (столбцов) называется порядком матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

# Квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Числа  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ , ...,  $a_{mm}$  образуют главную диагональ матрицы,

а числа  $a_{m1}$ ,  $a_{(m-1)2}$ , ...,  $a_{mm}$  - побочную диагональ.

# Диагональная матрица

- Квадратная матрица, у которой все числа, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной матрицей**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & a_{22} & \textcircled{0} & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & \textcircled{0} & a_{ii} & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} & a_{mm} \end{pmatrix}$$





# ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА

- Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется **единичной матрицей**.
- Единичную матрицу обозначают прописной буквой  $E$ .

$$E = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$



# Матрица-строка

# Матрица-столбец

- Матрица, состоящая только из одной строки, называется **матрицей-строкой**.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$

- Матрица, состоящая только из одной строки, называется **матрицей-столбцом**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$



# Транспонированная матрица

- Матрица называется **транспонированной** по отношению к матрице  $A$ , если столбцы матрицы являются соответствующими строками матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



# РАВЕНСТВО МАТРИЦ

- Две матрицы  $A$  и  $B$  называются **равными** ( $A=B$ ), если они имеют одинаковые размеры и равные соответствующие элементы.



# СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

- **Суммой матриц**  $A=(a_{ij})$  и  $B=(b_{ij})$  одинаковой размерностью  $m \times n$  называется матрица  $C=(c_{ij}) = A+B$  тех же размеров, что и заданные матрицы, элементы которой определяются правилом для всех  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , для всех  $i=1, 2, \dots, m$ , и  $j=1, 2, \dots, n$ .

Сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам, т.е.  $A+B=B+A$  и  $(A+B)+C=A+(B+C)$ .

# СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$



# Умножение матрицы на число

$$\begin{aligned} & k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Произведением матрицы  $A=(a_{ij})$  размеров  $m \times n$  на число  $k$  называется матрица  $B=(b_{ij})$  тех же размеров, что и матрица  $A$ , элементы, которой определяются правилом  $b_{ij}=ka_{ij}$ , для всех  $i=1, 2, \dots, m$ , и  $j=1, 2, \dots, n$ .

# УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- Пусть заданы матрица  $A$  размеров  $m \times n$  и матрица  $B$  размеров  $n \times r$ , т.е. такие, что число столбцов первой равно числу строк второй матрицы. Выберем строку с номером  $i$  из матрицы  $A$  и столбец с номером  $j$  из матрицы  $B$ . Умножим каждый элемент  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  выбранной строки на соответствующий элемент  $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$  выбранного столбца и сложим полученные произведения, т.е. составим сумму  $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$



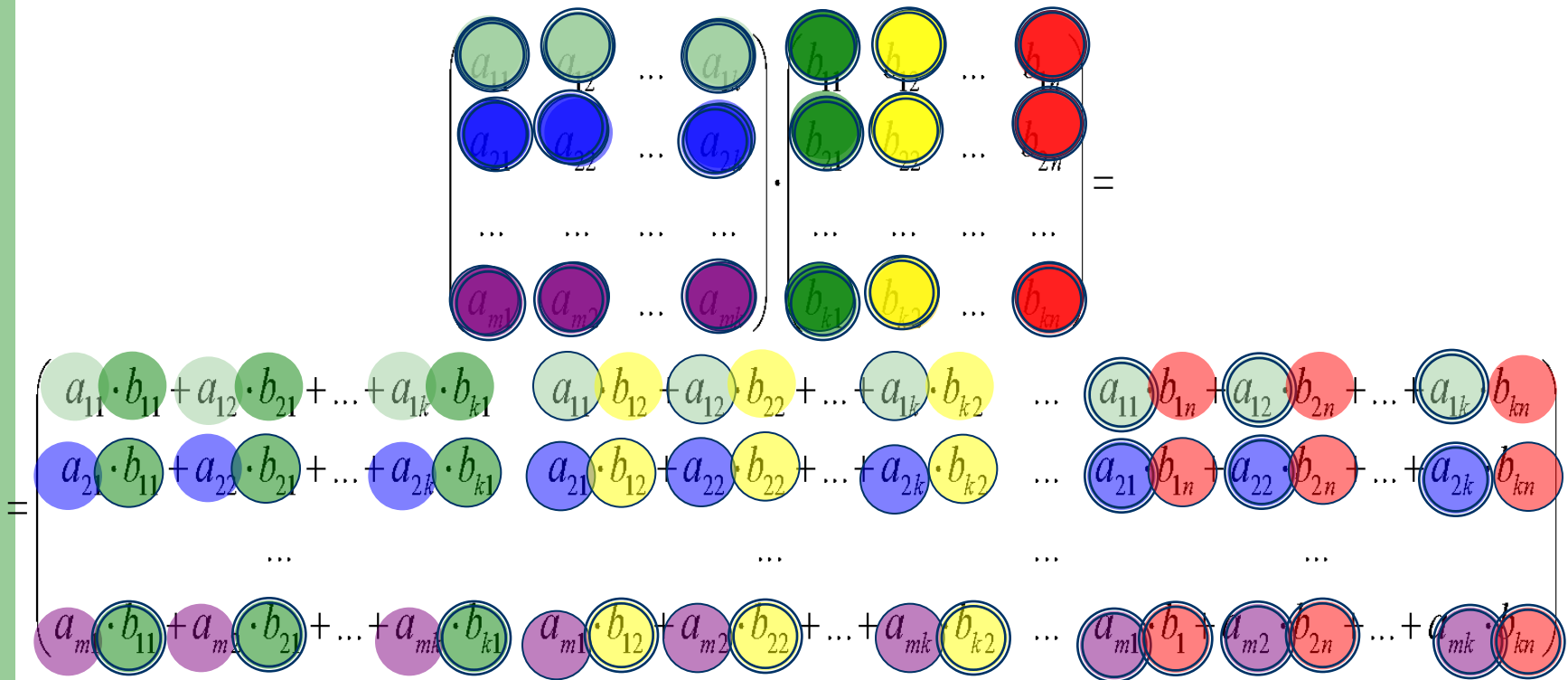
# УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- Произведением матрицы  $A$  размеров  $m \times n$  на матрицу  $B$  размеров  $n \times p$  называется матрица размеров  $m \times p$ , элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

для всех  $i=1, 2, \dots, m$ , и  $j=1, 2, \dots, p$ .

# УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ



# Определитель второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель второго  
порядка,  
соответствующий заданной  
матрице  $A$  –  
число, равное  
разности произведений  
элементов, расположенных  
на главной  
и побочной его диагоналях.