Линейная и векторная алгебра

- матрицы
- определители
- обратная матрица
- ранг матрицы
- системы линейных уравнений
- элементы векторной алгебры

матрицы

- Определение матрицы
- Виды матрицы
- Равенство матриц
- Сложение матриц
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц

Определение матрицы

Общий вид записи матрицы из *m* x *n* чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, составленная из *m* x *n* чисел, называется **матрицей**.

Для обозначения матрицы применяются круглые скобки и прописные буквы A, B, C …

Числа a_{11}, a_{12}, … , a_{mn}, составляющие матрицу, называются её элементами.

Горизонтальные ряды матрицы называются строками матрицы
вертикальные - столбцами.

Индексы i и j элемента a_{ij}, где i=1, 2, …, m, j=1,2, ..., n, означают, что этот элемент расположен в i-й строке и j-м столбце.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица обозначается также в форме $A(a_{ij})_{mxn}$, где i=1, 2, …, m, j=1, 2, …, n.

Виды матриц

- Квадратная матрица
- Диагональная матрица
- Единичная матрица
- Матрица-строкаМатрица-строка Матрица-строка и матрица-столбец
- Транспонированная матрица

Квадратная матрица

- Матрица, у которой число строк равно числу ее столбцов называется
квадратной матрицей. При этом число ее строк (столбцов) называется порядком матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ образуют главную диагональ матрицы,

а числа $a_{m1}, a_{(m-1)2}, \dots, a_{mm}$ - побочную диагональ.

Диагональная матрица

- Квадратная матрица, у которой

  все числа, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной матрицей.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}$$

ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА

- Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной матрицей.***
- Единичную матрицу обозначают прописной буквой Е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица-строка

- Матрица, состоящая только
  из одной строки,
  называется
  матрицей-строкой.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец

- Матрица, состоящая только
  из одной строки,
  называется
  матрицей-столбцом.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица

- Матрица называется ***транспонированной*** по отношению к матрице A, если столбцы матрицы являются соответствующими строчками матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

РАВЕНСТВО МАТРИЦ

- Две матрицы А и В называются **равными** (А=В), если они имеют одинаковые размеры и равные соответствующие элементы.

СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \boxed{b_{12}} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{b_{22}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}+b_{11}} & \boxed{a_{12}+b_{12}} \\ \boxed{a_{21}+b_{21}} & \boxed{a_{22}+b_{22}} \end{pmatrix}$$

- ***Суммой матриц*** A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) одинаковой размерностью *m*x*n* называется матрица C=(c_{ij}) = A(a_{ij})+B(b_{ij}) тех же размеров , что и заданные матрицы, элементы которой определяются правилом для всех $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, для всех *i*=1, 2, … , *m*, и *j*=1, 2, … , *n*.

Сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам, т.е. A+B=B+A и (A+B)+C=A+(B+C).

СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

- ***Произведением матрицы*** A=(a_{ij}) размеров *m*x*n* на число *k* называется матрица B=(b_{ij}) тех же размеров, что и матрица A, элементы, которой определяются правилом $b_{ij}=ka_{ij}$, для всех *i*=1, 2, … , *m*, и *j*=1, 2, … , *n*.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- Пусть заданы матрица А размеров mxn и матрица В размеров nxp, т.е. такие, что число столбцов первой равно числу строк второй матрицы. Выберем строку с номером i из матрицы А и столбец с номером j из матрицы В. Умножим каждый элемент a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in} выбранной строки на соответствующий элемент b_{1j}, b_{2j}, …, b_{nj} выбранного столбца и сложим полученные произведения, т.е. составим сумму $\boldsymbol{c_{ij}= a_{i1} b_{1j}+ a_{i2} b_{2j}+\ldots+ a_{in} b_{nj}}$.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- ***Произведением матрицы*** А размеров *mxn* на матрицу В размеров *nxp* называется матрица размеров *mxp* , элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

для всех i=1, 2, … , m, и j=1, 2, … , p.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + \dots + a_{1k}\cdot b_{k1} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + \dots + a_{1k}\cdot b_{k2} & \dots & a_{11}\cdot b_{1n} + a_{12}\cdot b_{2n} + \dots + a_{1k}\cdot b_{kn} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + \dots + a_{2k}\cdot b_{k1} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + \dots + a_{2k}\cdot b_{k2} & \dots & a_{21}\cdot b_{1n} + a_{22}\cdot b_{2n} + \dots + a_{2k}\cdot b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\cdot b_{11} + a_{m2}\cdot b_{21} + \dots + a_{mk}\cdot b_{k1} & a_{m1}\cdot b_{12} + a_{m2}\cdot b_{22} + \dots + a_{mk}\cdot b_{k2} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1} + a_{m2}\cdot b_{2n} + \dots + a_{mk}\cdot b_{kn} \end{pmatrix}$$

Определитель второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель второго порядка,

соответствующий заданной матрице А –

число, равное

разности произведений элементов, расположенных на главной

и побочной его диагоналях.