# Линейная и векторная алгебра

- матрицы
- определители
- обратная матрица
- ранг матрицы
- системы линейных уравнений
- элементы векторной алгебры

# матрицы

- Определение матрицы
- Виды матрицы
- Равенство матриц
- Сложение матриц
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц

# Определение матрицы

**Общий вид записи матрицы из *m* x *n* чисел:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, составленная из *m* x *n* чисел, называется **матрицей**.

Для обозначения матрицы применяются круглые скобки и прописные буквы А, В, С …

Числа $a_{11}$, $a_{12}$, … , $a_{mn}$, составляющие матрицу, называются
её элементами.

Горизонтальные ряды матрицы называются строками матрицы

вертикальные - столбцами.

Индексы $i$ и $j$ элемента $a_{ij}$, где $i$=1, 2, …, $m$, $j$=1,2, ..., $n$, означают, что этот элемент расположен в $i$-й строке и $j$-м столбце.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij}\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Матрица обозначается также в форме $A(a_{ij})_{mxn}$, где $i$=1, 2, …, $m$, $j$=1, 2, …, $n$.

# Виды матриц

- Квадратная матрица
- Диагональная матрица
- Единичная матрица
- Матрица-строкаМатрица-строка_Матрица-строка и матрица-столбец
- Транспонированная матрица

# Квадратная матрица

- Матрица, у которой число строк равно числу ее столбцов называется квадратной матрицей. При этом число ее строк (столбцов) называется порядком матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

# Квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{11}$, $a_{22}$, …, $a_{mm}$ образуют главную диагональ матрицы,

а числа $a_{m1}$, $a_{(m-1)2}$, …, $a_{mm}$ - побочную диагональ.

# Диагональная матрица

- Квадратная матрица, у которой
  все числа, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной матрицей.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}$$

# ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА

- Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной матрицей.***
- Единичную матрицу обозначают прописной буквой Е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

# Матрица-строка

- Матрица, состоящая только из одной строки, называется ***матрицей-строкой.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

# Матрица-столбец

- Матрица, состоящая только из одной строки, называется ***матрицей-столбцом.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

# Транспонированная матрица

- Матрица называется ***транспонированной*** по отношению к матрице А, если столбцы матрицы являются соответствующими строчками матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

# РАВЕНСТВО МАТРИЦ

- Две матрицы A и B называются **равными** (A=B), если они имеют одинаковые размеры и равные соответствующие элементы.

# СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & \boxed{b_{12}} \\ \boxed{b_{21}} & \boxed{b_{22}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} + b_{11}} & \boxed{a_{12} + b_{12}} \\ \boxed{a_{21} + b_{21}} & \boxed{a_{22} + b_{22}} \end{pmatrix}$$

- ***Суммой матриц*** A=($a_{ij}$) и B=($b_{ij}$) одинаковой размерностью *m*x*n* называется матрица C=($c_{ij}$) = A($a_{ij}$)+B($b_{ij}$) тех же размеров , что и заданные матрицы, элементы которой определяются правилом для всех $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, для всех *i*=1, 2, … , *m*, и *j*=1, 2, … , *n*.

Сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам, т.е. A+B=B+A и (A+B)+C=A+(B+C).

# СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

# Умножение матрицы на число

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

- ***Произведением матрицы*** A=($a_{ij}$) размеров *m*x*n* на число *k* называется матрица B=($b_{ij}$) тех же размеров, что и матрица A, элементы, которой определяются правилом $b_{ij}=ka_{ij}$, для всех *i*=1, 2, … , *m*, и *j*=1, 2, … , *n*.

# УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- Пусть заданы матрица А размеров $m$x$n$ и матрица В размеров $n$x$p$, т.е. такие, что число столбцов первой равно числу строк второй матрицы. Выберем строку с номером $i$ из матрицы А и столбец с номером $j$ из матрицы В. Умножим каждый элемент $a_{i1}$, $a_{i2}$, …, $a_{in}$ выбранной строки на соответствующий элемент $b_{1j}$, $b_{2j}$, …, $b_{nj}$ выбранного столбца и сложим полученные произведения, т.е. составим сумму $\boldsymbol{c_{ij}= a_{i1} b_{1j}+ a_{i2} b_{2j}+\ldots+ a_{in} b_{nj}}$.

# УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- ***Произведением матрицы*** А размеров *mxn* на матрицу В размеров *nxp* называется матрица размеров *mxp* , элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

для всех $i$=1, 2, … , $m$, и $j$=1, 2, … , $p$.

# УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn}
\end{pmatrix}
=
$$

$$
=
\begin{pmatrix}
a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\dots+a_{1k}\cdot b_{k1} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\dots+a_{1k}\cdot b_{k2} & \dots & a_{11}\cdot b_{1n}+a_{12}\cdot b_{2n}+\dots+a_{1k}\cdot b_{kn} \\
a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\dots+a_{2k}\cdot b_{k1} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+\dots+a_{2k}\cdot b_{k2} & \dots & a_{21}\cdot b_{1n}+a_{22}\cdot b_{2n}+\dots+a_{2k}\cdot b_{kn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\dots+a_{mk}\cdot b_{k1} & a_{m1}\cdot b_{12}+a_{m2}\cdot b_{22}+\dots+a_{mk}\cdot b_{k2} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1n}+a_{m2}\cdot b_{2n}+\dots+a_{mk}\cdot b_{kn}
\end{pmatrix}
$$

# Определитель второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель второго порядка,

соответствующий заданной матрице А –

число, равное

разности произведений элементов, расположенных на главной

и побочной его диагоналях.