ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава III
Линейные пространства и линейные операторы

Лекция № 4

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

Теорема 5.4. 1) *Если* $\mathbf{dim}\ \mathbf{V} = n < \infty$, *то любая линейно независимая система* $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{V}$ *является базисом.*

2) *Если система* $[e] = \{e_j\}_{j=1}^n$ *есть базис линейного пространства* $\mathbf{V}$, *то* $\mathbf{dim}\ \mathbf{V} = n$.

\# 1): Пусть $\mathbf{dim}\ \mathbf{V} = n < \infty$, тогда возьмем любую из существующих линейно независимых систем $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{V}$ и произвольный элемент $x \in \mathbf{V}$ и составим систему $\{x_1, \cdots, x_n, x\} \subset \mathbf{V}$, которая в силу определения 5.5 будет линейно зависимой. По определению 5.2 существуют числа $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathrm{K}$ такие, что $\sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k| \neq 0$, при этом $\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n + \lambda_{n+1} \cdot x = \theta$. Здесь $\lambda_{n+1} \neq 0$, в противном случае $\lambda_j = 0\ \ \forall\ j = \overline{1, n+1}$, это противоречит тому, что система $\{x_1, \cdots, x_n, x\}$ является линейно зависимой. Тогда $x = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) \cdot x_1 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \cdot x_n$ для любого $x \in \mathbf{V}$. Следовательно, $\{x_j\}_{j=1}^n$ есть базис линейного пространства $\mathbf{V}$.

2): Пусть $[e] = \{e_1, \cdots, e_n\}$ – базис линейного пространства $\mathbf{V}$. Возьмем произвольную систему $\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\} \subset \mathbf{V}$ и разложим каждый из элементов этой системы по данному базису

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1^1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_1^n \cdot e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+1} = \alpha_{n+1}^1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_{n+1}^n \cdot e_n \end{cases}.$$

Далее составим нулевую линейную комбинацию $\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1} =$

$$= \lambda_1 \cdot (\alpha_1^1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_1^n \cdot e_n) + \cdots + \lambda_{n+1} \cdot (\alpha_{n+1}^1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha_{n+1}^n \cdot e_n) = (\lambda_1 \alpha_1^1 + \cdots + \lambda_{n+1} \alpha_{n+1}^1) \cdot e_1 + \cdots$$

$$\cdots + (\lambda_1 \alpha_1^n + \cdots + \lambda_{n+1} \alpha_{n+1}^n) \cdot e_n = \theta, \qquad (*)$$

из которой в силу линейной независимости системы $\{e_1, \cdots, e_n\}$ получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1^1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n+1}^1 \lambda_{n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^n \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n+1}^n \lambda_{n+1} = 0 \end{cases} . \qquad (**)$$

Система $(**)$ является однородной системой n линейных алгебраических уравнений относительно $(n+1)$-ой неизвестной $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ вида: $\mathrm{A} \cdot \underset{\downarrow}{\lambda} = \underset{\downarrow}{0}$.

Матрица A этой системы имеет $\mathrm{Rg}\ \mathrm{A} < n+1$, т.к. число строк этой матрицы равно n.

Следовательно, система $(**)$ имеет нетривиальное решение $\underset{\downarrow}{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ такое, что

$\sum\limits_{j=1}^{n+1} |\lambda_j| \neq 0$, для которого в силу условия $(*)$ следует $\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1} = \theta$.

Это означает, что система $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$ линейно зависима.

Итак, оба условия определения 5.5 доказаны. Это означает, что $\dim \mathrm{V} = n$. #

Пример 5.2. В линейном пространстве K^n базисом является следующая система:

$\{e_j\}_{j=1}^{n}$, где $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $e_2=(0,1,\cdots,0)$, ... , $e_n=(0,0,\cdots,1)$, т.к.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=1\neq 0.$$

Тогда $\dim K^n = n$.

Пример 5.3. В линейном пространстве $M_{m\times n}$ базисом является, например, следующая система матриц

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

т.е. элементом этого базиса является матрица размерности $m\times n$ вида

$$B_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

у которой 1 стоит в i-ой строке и j-ом столбце, а остальные элементы равны 0. Следовательно, $\dim M_{m\times n} = m\cdot n$.

Пример 5.4. В линейном пространстве $\mathbf{S_o}$ базисом является ФСР, а значит $\mathbf{dim S_o} = n - r$, где n – число неизвестных, $r = \mathbf{Rg\,A}$.

Д о к а ж е м, что ФСР – базис пространства $\mathbf{S_o}$.

1) Система $\left\{\underset{\downarrow}{\gamma}^{1}, \cdots, \underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}\right\}$ является линейно независимой по определению ФСР;

2) Для любого частного решения $\underset{\downarrow}{\alpha} \in \mathbf{S_o}$ однородной системы $\mathbf{A} \cdot \underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$ существуют

константы $C'_k \in \mathrm{R}$, $k = \overline{1, n-r}$ такие, что $\underset{\downarrow}{\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n-r} C'_k \underset{\downarrow}{\gamma}^{k}$.

Итак, ФСР $\left\{\underset{\downarrow}{\gamma}^{1}, \cdots, \underset{\downarrow}{\gamma}^{n-r}\right\}$ является базисом линейного пространства $\mathbf{S_o}$.

В силу теоремы 5.4 $\mathbf{dim S_o} = n - r$.

Пример 5.5. В линейном пространстве многочленов $\mathbf{P}_m$ базисом является следующая система элементов этого пространства $\left\{1, t, t^2, \cdots, t^m\right\}$. А, следовательно, $\mathbf{dim P}_m = m + 1$.

5.3. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат элемента (вектора) при переходе к новому базису.

Пусть **V** – линейное пространство над множеством K; $[e]=\{e_1,\cdots,e_n\}$, $[\tilde{e}]=\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n\}$ – два базиса этого пространства.

Разложим элементы $\tilde{e}_k$ для всех $k=\overline{1,n}$ по базису $[e]$:

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = t_1^1 e_1 + \cdots + t_1^n e_n \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{e}_n = t_n^1 e_1 + \cdots + t_n^n e_n \end{cases} \qquad (11)$$

Определение 5.7. Матрица $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} t_1^1 & \cdots & t_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^n & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода от базиса* $[e]$ *к базису* $[\tilde{e}]$.

Замечание 5.1. Равенство (11) можно переписать в виде:
а) в векторной форме $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n\}=\{e_1,\cdots,e_n\}\cdot\mathbf{T}$ или б) в матричной форме $[\tilde{e}]=[e]\cdot\mathbf{T}$.

Теорема 5.5. *Матрица перехода от базиса* $[e]$ *к базису* $[\tilde{e}]$ *является невырожденной, т.е.* $\det\mathbf{T}\neq 0$.

Рассмотрим линейную комбинацию столбцов матрицы $\mathbf{T}$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} t_1^1 \\ \cdots \\ t_1^n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} t_n^1 \\ \cdots \\ t_n^n \end{pmatrix} = \underset{\downarrow}{0} \qquad (*)$$

и при этих $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ найдем $\lambda_1 \tilde{e}_1 + \cdots + \lambda_n \tilde{e}_n = \lambda_1 (t_1^1 e_1 + \cdots + t_1^n e_n) + \cdots + \lambda_n (t_n^1 e_1 + \cdots$
$\cdots + t_n^n e_n) = (\lambda_1 t_1^1 + \cdots + \lambda_n t_n^1) e_1 + \cdots + (\lambda_1 t_1^n + \cdots + \lambda_n t_n^n) e_n = \Big]$ в силу равенств $(*)$ $\Big[= \theta$.

Поскольку $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$ есть линейно независимая система (как базис), то начало и конец последней цепочки равенств показывают, что $\lambda_j = 0$ для всех $j = \overline{1, n}$.

Из равенства $(*)$ следует, что столбцы матрицы $\mathbf{T}$ образуют линейно независимую систему, а это означает: $\det \mathbf{T} \neq 0$. #

Следствие 5.4. *Пусть* $[e]$, $[\tilde{e}]$ *– базисы линейного пространства* $\mathbf{V}$, *а* $\mathbf{T}$ *– матрица перехода от базиса* $[e]$ *к базису* $[\tilde{e}]$, *тогда справедлива следующая формула:*

$$[e] = [\tilde{e}] \cdot \mathbf{T}^{-1}. \qquad (12)$$

Из неравенства $\det \mathbf{T} \neq 0$ следует, что существует обратная матрица $\mathbf{T}^{-1}$ к

матрице $\mathbf{T}$. Тогда, умножив равенство $[\tilde{e}]=[e]\cdot\mathbf{T}$ справа на матрицу $\mathbf{T}^{-1}$, получим

$[\tilde{e}]\cdot\mathbf{T}^{-1}=([e]\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{T}^{-1}=[e]\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{-1})=[e]\cdot\mathbf{E}=[e]$. Итак, получена формула (12). #

Теорема 5.6. *Пусть произвольный элемент* x *из линейного пространства* $\mathbf{V}$ *задан своими координатами* $x=(\alpha^1,\cdots,\alpha^n)$ *в базисе* $[e]$ *и* $x=(\tilde{\alpha}^1,\cdots,\tilde{\alpha}^n)$ *в базисе* $[\tilde{e}]$, *т.е.*

$x=\alpha^1 e_1+\cdots+\alpha^n e_n=[e]\cdot\underset{\downarrow}{\alpha}$ *и* $x=\tilde{\alpha}^1\tilde{e}_1+\cdots+\tilde{\alpha}^n\tilde{e}_n=[\tilde{e}]\cdot\underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}$.

Тогда справедлива следующая формула:

$$\underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}=\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}^1\\ \cdots\\ \tilde{\alpha}^n\end{pmatrix}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \cdots\\ \alpha^n\end{pmatrix}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\underset{\downarrow}{\alpha}. \qquad (13)$$

С одной стороны $x=[\tilde{e}]\cdot\underset{\downarrow}{\tilde{\alpha}}$, с другой $x=[e]\cdot\underset{\downarrow}{\alpha}=([\tilde{e}]\cdot\mathbf{T}^{-1})\cdot\underset{\downarrow}{\alpha}=[\tilde{e}]\cdot(\mathbf{T}^{-1}\cdot\underset{\downarrow}{\alpha})$.

Поскольку один и тот же элемент разложен по базису $[\tilde{e}]$, то в силу леммы 5.1 справедлива формула (13). #

Пример 5.6. Найти матрицу перехода от базиса $[e]=\{1,t,t^2,t^3,t^4\}$ пространства $\mathbf{P}_4$ к базису $[\tilde{e}]=\{1,t-1,(t-1)^2,(t-1)^3,(t-1)^4\}$ этого же пространства.

Р е ш е н и е. Разложим элементы базиса $[\tilde{e}]$ по базису $[e]$:

$$1=1,$$

$$t-1=-1+t,$$

$$(t-1)^2=1-2t+t^2,$$

$$(t-1)^3=-1+3t-3t^2+t^3,$$

$$(t-1)^4=1-4t+6t^2-4t^3+t^4.$$

Следовательно, искомая матрица перехода будет иметь вид:

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Линейные подпространства

6.1. Основные понятия и примеры линейных подпространств.

Определение 6.1. Подмножество $\mathbf{L}$ линейного пространства $\mathbf{V}$ называется *линейным подпространством линейного пространства* $\mathbf{V}$, если для любых элементов $x, y \in \mathbf{L}$ и при любом $\lambda \in \mathrm{K}$ выполняются условия: 1) $x + y \in \mathbf{L}$ и 2) $\lambda \cdot x \in \mathbf{L}$.

Теорема 6.1. *Линейное подпространство* $\mathbf{L}$ *линейного пространства* $\mathbf{V}$ *есть линейное пространство над множеством* K .

\# Операции 1) и 2), заданные для элементов $\mathbf{L}$ совпадают с операциями а) и б) из определения 4.1. Поскольку $\mathbf{L}$ – линейное подпространство линейного пространства $\mathbf{V}$ над множеством K, то из соотношения $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$ следует, что любые $x, y, z \in \mathbf{L}$ лежат в $\mathbf{V}$. А это означает, что все аксиомы линейного пространства выполняются для элементов $\mathbf{L}$. В частности, в $\mathbf{L}$ существует нулевой элемент $\theta = 0 \cdot x$ для любого $x \in \mathbf{L}$, а также для любого $x \in \mathbf{L}$ существует противоположный элемент $x' \in \mathbf{L}$, который равен $x' = (-1) \cdot x$. #

Рассмотрим некоторые примеры линейных подпространств.

Примеры 6.1.

I) R есть линейное подпространство линейного пространства R^2, которое в свою очередь является линейным подпространством линейного пространства R^3.

II) Множество $\mathbf{L} = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathrm{K}^n : x_1 = 0, x_j \in \mathrm{K} \ \ \forall j = \overline{2, n} \right\}$ является линейным подпространством линейного пространства K^n.

III) Множество $\mathbf{L} = \left\{ \left(\underset{\downarrow}{a_1}, \dots, \underset{\downarrow}{a_{n-1}}, \underset{\downarrow}{0} \right) \in \mathrm{M}_{m \times n} \right\}$ есть линейное подпространство линейного пространства $\mathrm{M}_{m \times n}$.

IV) Множество $\mathbf{L} = \mathbf{P}_m$ является линейным подпространством линейного пространства $C([a, b])$.

V) Линейными подпространствами линейного пространства $\mathbf{V}$ являются также множества $\mathbf{L} = \{\theta\}$ и $\mathbf{L} = \mathbf{V}$, которые называют *тривиальными*.

6.2. Линейная оболочка.

Определение 6.2. *Линейной оболочкой, порожденной элементами* $x_1,\cdots,x_m \in \mathbf{V}$, (обозначаемой $L(x_1,\cdots,x_m)$) называется множество всех линейных комбинаций вида:

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_m \cdot x_m \quad \text{при любых } \lambda_j \in \mathrm{K},\ j = \overline{1,m}.$$

При этом элементы $x_1,\cdots,x_m$ называются *порождающими элементами линейной оболочки* $L(x_1,\cdots,x_m)$.

Теорема 6.2. *При произвольных* $x_1,\cdots,x_m \in \mathbf{V}$ *линейная оболочка* $L(x_1,\cdots,x_m)$ *есть линейное подпространство линейного пространства* $\mathbf{V}$.

\# Для любых $x, y \in L(x_1,\cdots,x_m)$ существуют $\{\lambda_j\}_{j=1}^m, \{\mu_j\}_{j=1}^m \subset \mathrm{K}$ такие, что

$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_m \cdot x_m$ и $y = \mu_1 \cdot x_1 + \cdots + \mu_m \cdot x_m$.

Тогда $x + y = (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m) + (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_m x_m) = (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + \cdots + (\lambda_m + \mu_m) x_m$,

т.е. $x + y \in L(x_1,\cdots,x_m)$, а также при любом $\lambda \in \mathrm{K}$ произведение $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots$

$\cdots + \lambda_m \cdot x_m) = (\lambda\lambda_1) \cdot x_1 + \cdots + (\lambda\lambda_m) \cdot x_m$ из $L(x_1,\cdots,x_m)$.

Следовательно, $L(x_1,\cdots,x_m)$ является линейным подпространством. \#

Теорема 6.3. (о размерности линейной оболочки)

dim $L(x_1,\cdots,x_m)$ *равна максимальному числу элементов из* $\{x_j\}_{j=1}^{m}$, *образующих линейно независимую систему.*

\# Пусть максимальное число элементов, образующих линейно независимую систему, равно $k \le m$. Например, эту систему образуют элементы $x_1,\cdots,x_k$, т.е. $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ – линейно независимая система. Тогда любое x_j, $j=\overline{k+1,m}$ может быть представлено в виде: $x_j=\alpha_j^1 x_1+\cdots+\alpha_j^k x_k \quad \forall\ j=\overline{k+1,m}$.

Далее, возьмем произвольный элемент $y \in L(x_1,\cdots,x_m)$, тогда в силу определения 6.2 существуют числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m} \subset K$ такие, что $y=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}x_{k+1}+\cdots+\lambda_m x_m=$

$=]$в силу равенств$(*)[=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}\left(\alpha_{k+1}^1 x_1+\cdots+\alpha_{k+1}^k x_k\right)+\cdots+\lambda_m\left(\alpha_m^1 x_1+\cdots+\alpha_m^k x_k\right)=$

$=\left(\lambda_1+\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}^1+\cdots+\lambda_m\alpha_m^1\right)x_1+\cdots+\left(\lambda_k+\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}^k+\cdots+\lambda_m\alpha_m^k\right)x_k=\beta_1\cdot x_1+\cdots+\beta_k\cdot x_k$,

где $\beta_j=\lambda_j+\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}^j+\cdots+\lambda_m\alpha_m^j \quad \forall \quad j = \overline{1,k}$.

Итак, $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ является базисом линейной оболочки $L(x_1,\cdots,x_m)$, а в силу теоремы 5.4 имеем **dim** $L(x_1,\cdots,x_m)=k$. #

Теорема 6.4. (о неполном базисе)

Если $\{e_1,\cdots,e_k\}$ *есть линейно независимая система элементов линейного пространства* $\mathbf{V}$ *и* $\dim\mathbf{V}=n\geq k$, *то существуют элементы* $e_{k+1},\cdots,e_n$ *из* $\mathbf{V}$ *такие, что система* $\{e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},\cdots,e_n\}$ *будет базисом линейного пространства* $\mathbf{V}$.

\# Рассмотрим $L(e_1,\cdots,e_k)$.

Если $k=n$, то утверждение теоремы 6.4 следует из теоремы 5.4.

Пусть теперь $\dim L(e_1,\cdots,e_k)=k<n=\dim\mathbf{V}$, тогда $L(e_1,\cdots,e_k)$ не совпадает с $\mathbf{V}$.

Следовательно, существует такой элемент $e_{k+1}\in\mathbf{V}$, который не принадлежит $L(e_1,\cdots,e_k)$, т.е. e_{k+1} не может быть линейной комбинацией элементов $e_1,\cdots,e_k$. А это означает, что система $\{e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}\}$ является линейно независимой в $\mathbf{V}$. Если $k+1=n$, то система $\{e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}\}$ будет базисом $\mathbf{V}$.

Если же $k+1<n$, то, продолжая этот процесс выбора таких элементов до тех пор, пока не найдем элементы $e_{k+2},\cdots,e_n\in\mathbf{V}$, для которых $\dim L(e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},e_{k+2},\cdots,e_n)=n$. Следовательно, система $\{e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},e_{k+2},\cdots,e_n\}$ является линейно независимой, а в силу теоремы 5.4 базисом линейного пространства $\mathbf{V}$. #