27.11.20.

Тема:
Определение наибольшего и наименьшего значения функции. Построение графика функции с помощью производной

Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1214

Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

Применение производной к построению графиков функций

Задача 1 Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

▶ Эта функция определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$. С помощью производной найдём промежутки монотонности этой функции и её точки экстремума. Производная равна $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Найдём стационарные точки: $3x^2 - 4x + 1 = 0$, откуда $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трёхчлен $3x^2 - 4x + 1$ на множители: $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$.

Производная положительна на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3} < x < 1$ производная отрицательна, следовательно, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ функция убывает.

Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; её значение в точке минимума равняется $f(1) = 0$.

Результаты исследования представим в следующей таблице:

x	$x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

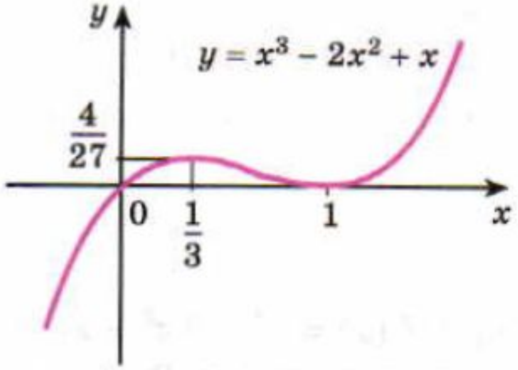

Рис. 132

Символ «↗» означает, что функция возрастает, а символ «↘» означает, что функция убывает.

При построении графика обычно находят точки пересечения графика с осями координат. Так как $f(0) = 0$, то график проходит через начало координат. Решая уравнение $f(x) = 0$, находим точки пересечения графика с осью абсцисс:

$x^3 - 2x^2 + x = 0$, $x(x^2 - 2x + 1) = 0$, $x(x-1)^2 = 0$, откуда $x = 0$, $x = 1$. Для более точного построения графика найдём значения функции ещё в двух точках: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$, $f(2) = 2$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 2x^2 + x$ (рис. 132). ◁

Для построения графика функции обычно сначала исследуют свойства этой функции с помощью её производной примерно по такой же схеме, как и при решении задачи 1.

При исследовании свойств функции полезно найти:

1) область её определения;
2) производную;
3) стационарные точки;
4) промежутки возрастания и убывания;
5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно записать в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат и, быть может, ещё несколько точек графика.

Задача 2 Построить график функции $f(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$.

▶ 1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) $f'(x) = -5x - 5x^4 = -5x(1 + x^3)$.

3) Решая уравнение $-x(1 + x^3) = 0$, находим стационарные точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$.

4) Производная положительна на интервале $(-1; 0)$, следовательно, на этом интервале функция возрастает. На промежутках $(-\infty; -1)$ и $(0; +\infty)$ производная отрицательна, следовательно, на этих промежутках функция убывает.

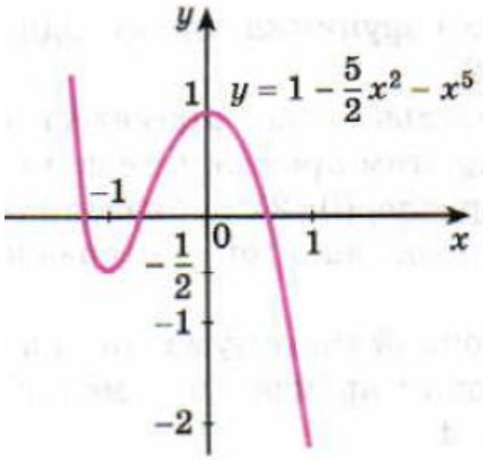

Рис. 133

5) Стационарная точка $x_1 = -1$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «−» на «+»; $f(-1) = -0{,}5$. Точка $x_2 = 0$ — точка максимума, так как при переходе через неё производная меняет знак с «+» на «−»; $f(0) = 1$.

Составим таблицу.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	$-0{,}5$	↗	1	↘

Используя результаты исследования, строим график функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ (рис. 133). ◁

График функции $y = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$ построен с помощью исследования некоторых свойств этой функции. По графику можно выявить и другие свойства данной функции. Например, из рисунка 133 видно, что уравнение $1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5 = 0$ имеет три различных действительных корня.

Практическая часть.

Построить график функции (926—927).

926 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 2) $y = 2 + 3x - x^3$;

3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

927 1) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$; 2) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;

3) $y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{24} x^6$; 4) $y = 6x^4 - 4x^6$.

928 Построить график функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1; 3]$;

2) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ на отрезке $[-3; 3]$.