Дискретная математика

Основы теории графов

ЛЕКЦИЯ №7.1

Основные определения.

Виды графов.

Лекция №7.1

План

- 1. Возникновение теории графов.
- 2. Основные понятия и определения теории графов.
- 3.

Задачи, приводящие к понятию графа

Теория графов – это раздел дискретной математики, особенностью которого является геометрический подход к изучению объектов.

Во многих ситуациях привычка к ассоциациям и аналогиям заставляет человека рисовать на бумаге точки, изображающие людей, населенные пункты, химические вещества и т.д. и соединять эти точки линиями или стрелками, означающими некоторые отношения между этими объектами. Такие схемы встречаются в различных отраслях под разными названиями: социограммы (в психологии), электрические цепи (в электротехнике), диаграммы организации (в экономике), сети коммуникаций (в связи и других областях), генеалогические деревья (в биологии) и т.п.

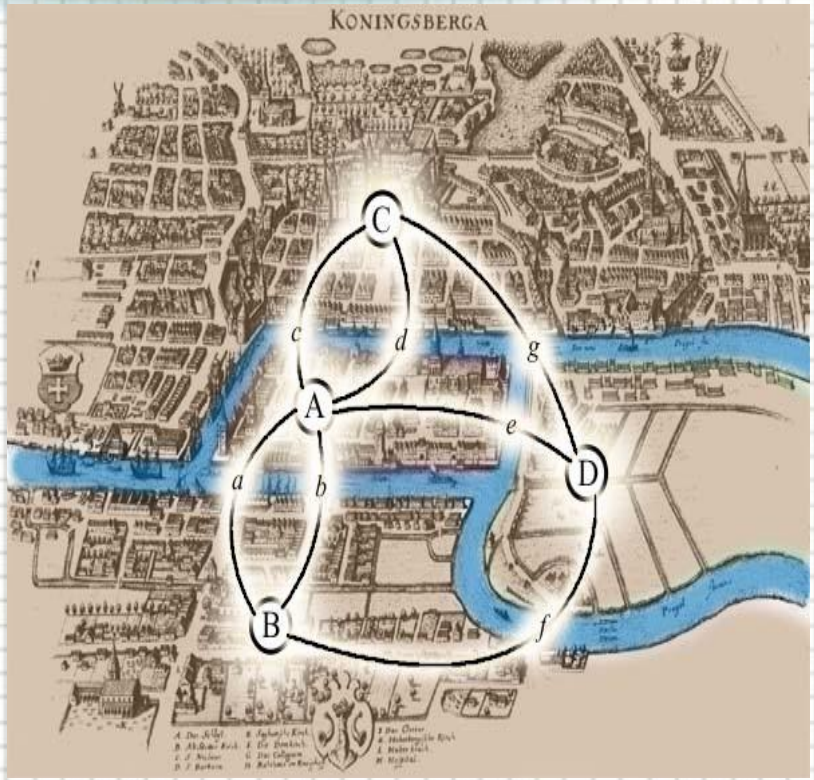
Задачи, приводящие к понятию графа

Подобные схемы впервые назвал «графами» венгерский математик Денеш Кёниг в 1936 г. При этом начало теории графов как отдельной дисциплины было положено еще в 1736 году Леонардом Эйлером в его знаменитом рассуждении о семи Кенигсбергских мостах.

Бывший Кенигсберг (ныне - Калининград) расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.

Задача о кенигсбергских мостах

Кенигсберцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причем на каждом мосту следовало побывать только один раз.



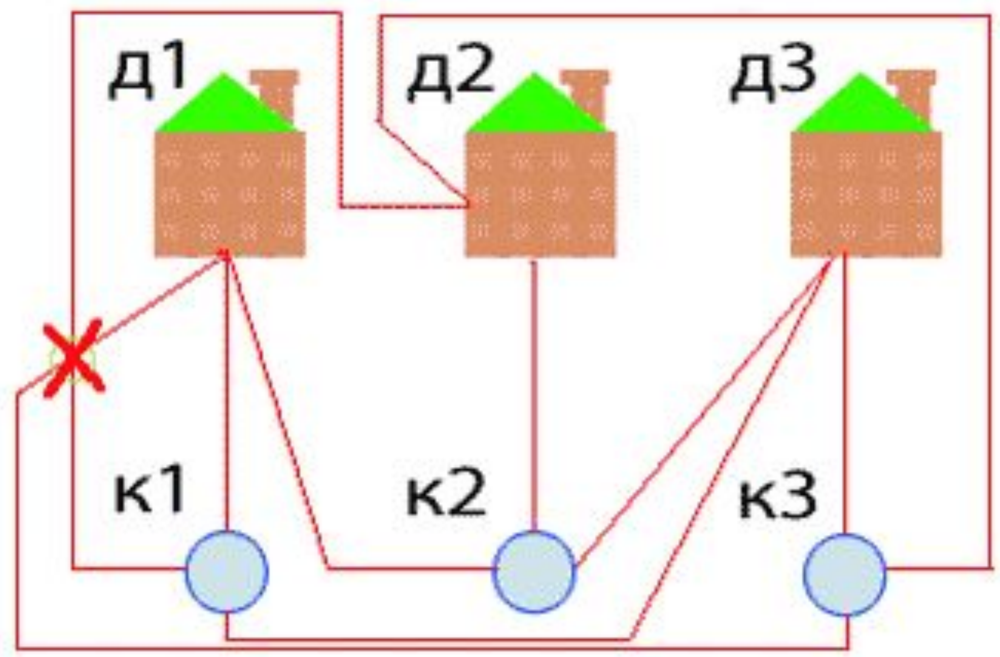
Эйлер доказал, что это невозможно и изобрёл таким образом эйлеровы циклы. Однако эта статья была единственной в течение почти ста лет.

Задача о трех колодцах и трех домах

Интерес к проблемам теории графов возродился к середине 19 столетия благодаря исследованиям электрических сетей, моделей кристаллов, структур молекул. Большое число популярных головоломок тех времен поддавались формулировкам именно в терминах графов. Одна из них – задача о трех колодцах и трех домах.

Три соседа поссорились. Все три имеют по колодцу. Возможно ли проложить тропинки от дома каждого соседа к каждому колодцу так, чтобы эти тропинки не пересекались?

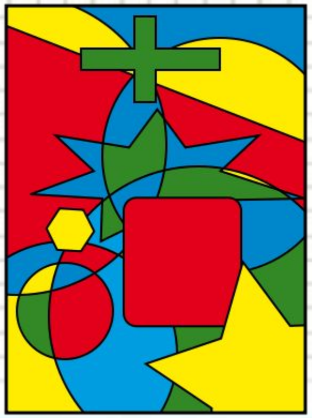
Как видим, ответ отрицательный.

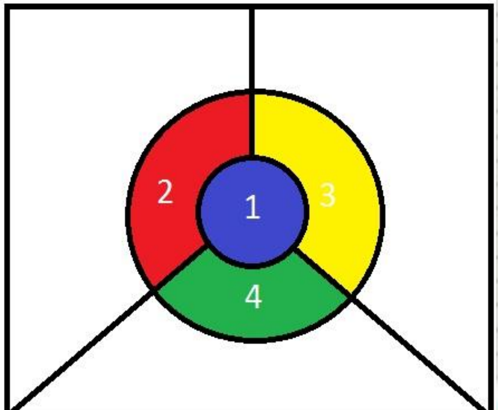


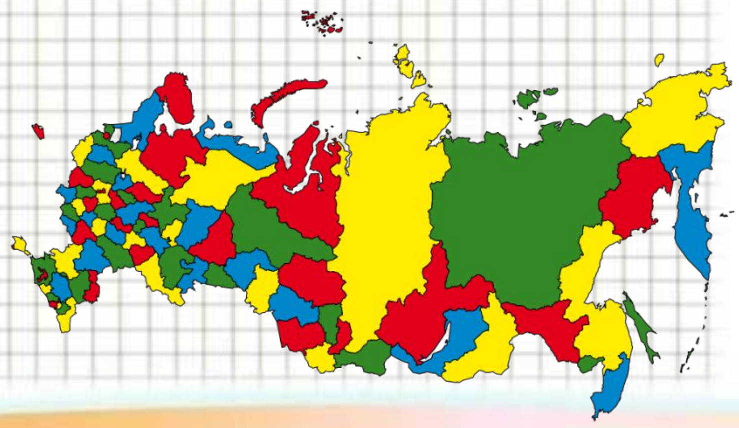
Теорема о четырёх красках

Теорема о четырёх красках — утверждение о том, что всякую расположенную на сфере карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета. При этом области могут быть как односвязными, так и многосвязными (в них могут присутствовать «дырки»), а под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке общей границей для них не считаются.

Эта теорема была сформулирована Фрэнсисом Гутри (англ.) в 1852 году, однако доказать её долгое время не удавалось. В течение этого времени было предпринято множество попыток как доказательства, так и опровержения, и эта задача носила название проблемы четырёх красок.







Применение графов

Период интенсивной разработки общей теории графов начался в 50-х годах XX века в связи со становлением кибернентики и развитием вычислительной техники.

Графы находят широкое применение в теории программирования и синтезе вычислительных машин и других технических устройств и систем (электронные платы в автоматике и радиоэлектронике), в изучении физических, химических, технологических процессов, в решении экономических задач (сетевые методы планирования), в лингвистических и социологических исследованиях.

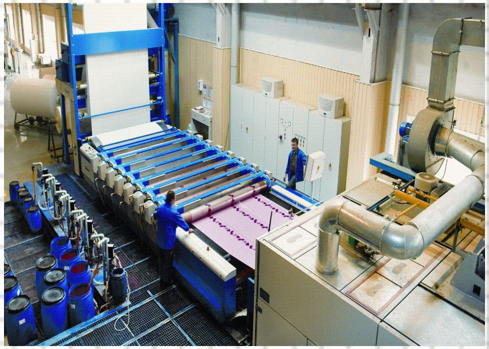
Известны попытки применить теорию графов для синтеза систем автоматического регулирования, что обеспечивает наглядность и значительную экономию в вычислениях.

Применение графов

Графы применяются:

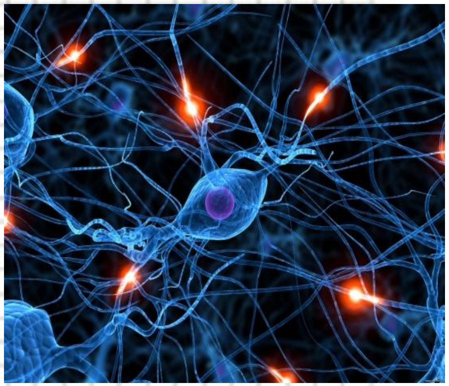
Банковское дело

Промышлен-ность



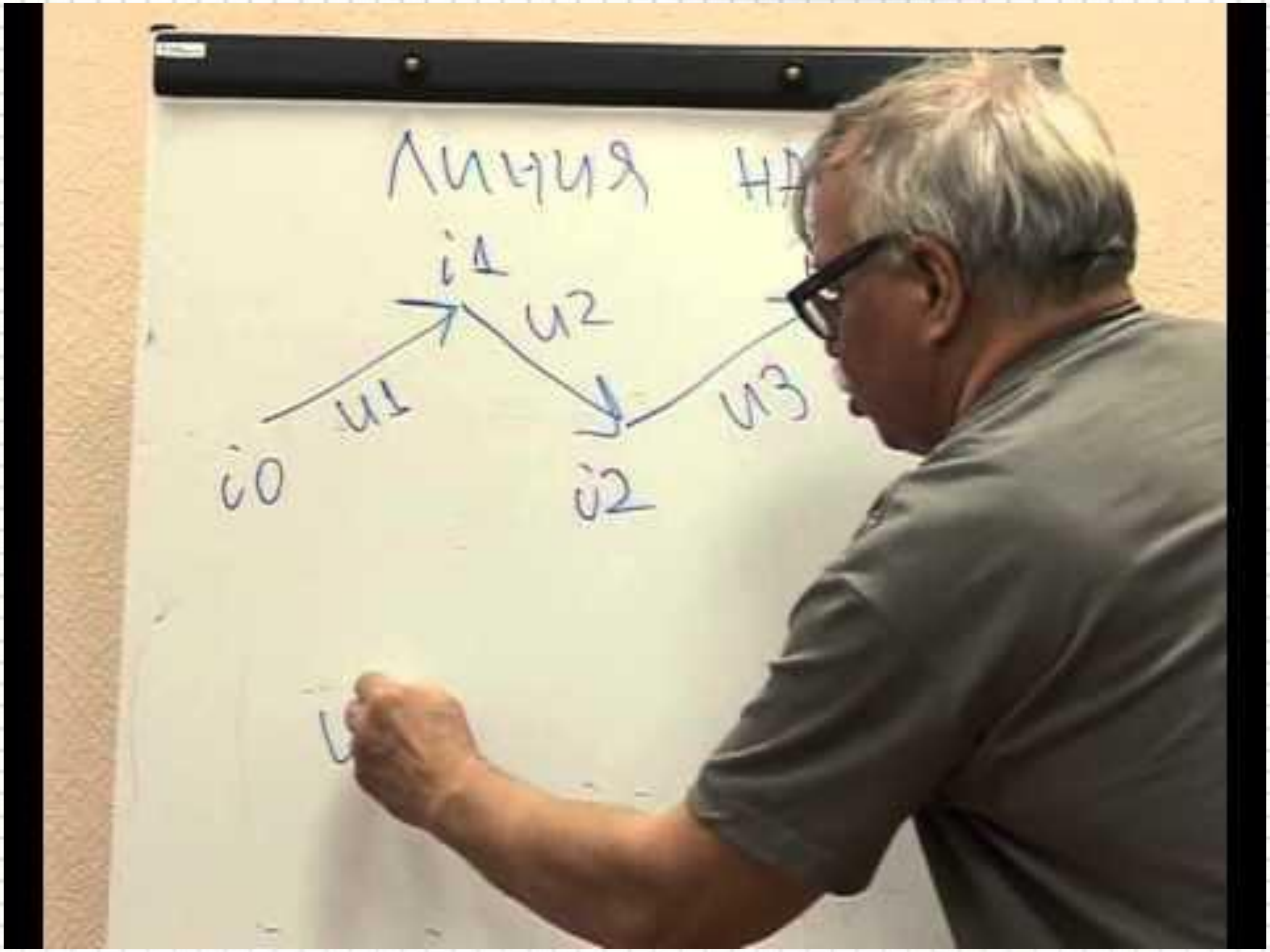
Медицина

Молекулярная биология



Лекция доктора технических наук, профессора Владимира Алексеевича Кузнецова

Петрозаводский государственный университет (РФ)



Основные понятия и определения теории графов

Рассмотрим пример.

Пусть *V* – множество городов России, *E* – множество пар аэропортов, между которыми установлено гражданское авиасообщение.

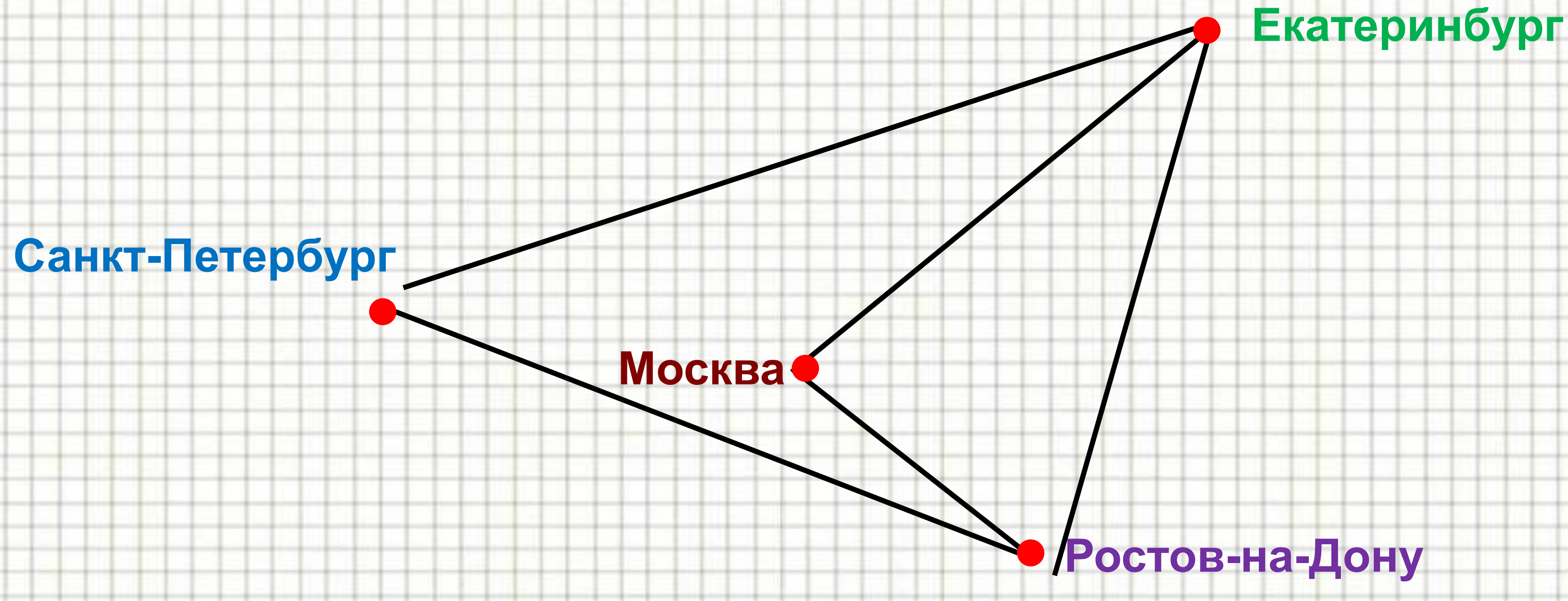


Рис. 1

На рисунке 1 изображен граф *G=G(V,E).*

Определение графа

Пусть *V* - непустое множество, состоящее из соединенных некоторым образом точек *Xi*. Множество *V* называется множеством вершин (или узлов).

Обозначим *E* - множество пар *u* =(*Xi*, *Xj*), где *Xi*, *Xj* – элементы множества *V*. Пара *u* =(*Xi*, *Xj*) называется ребром (дугой).

Графом называется упорядоченная пара *G=G(V,E)*.

Иными словами, граф – это непустое множество точек (вершин) и отрезков (ребер), концы которых принадлежат заданному множеству точек.

Определение графа

Ребро $u=(Xi, Xj)$ называется **неориентированным**, если $(Xi, Xj) = (Xj, Xi)$.

Ребро $u=(Xi, Xj)$ называется **ориентированным** (или **дугой**), если $(Xi, Xj) \neq (Xj, Xi)$.

При этом дуга направлена от вершины Xi к вершине Xj.

Xi – начало, Xi – конец дуги.

Ребро (дуга) называется **петлёй**, если его концы совпадают, то есть $u=(Xi, Xi)$.

Определение графа

Множество *V*, а значит и множество *E*, обычно считаются конечными множествами. Граф называется конечным, если он имеет конечное число вершин (рис 2). В противном случае граф называется бесконечным (рис. 3).

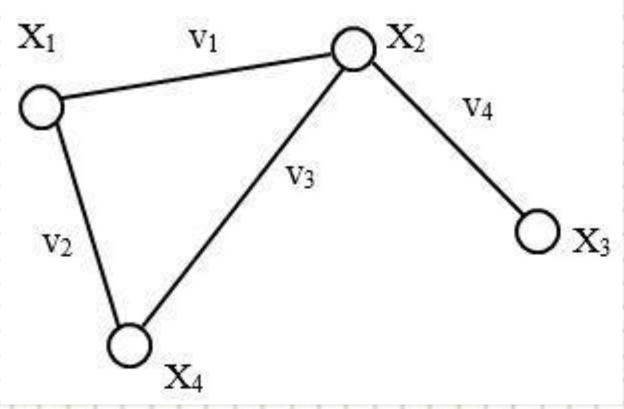


Рис. 2

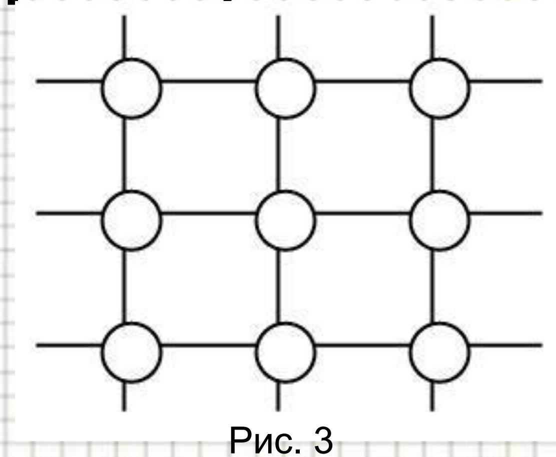


Рис. 3

Многие результаты, полученные для конечных графов, неверны (или каким-либо образом отличаются) для бесконечных графов, поскольку не все утверждения, имеющие место для конечных множеств, выполняются в случае бесконечных множеств.

Определение графа

Вершины и рёбра графа называются также **элементами** **графа,**

число вершин в графе, т.е. |*V*| называется **порядком** **графа,**

число рёбер, т.е. |*E*| - **размером** **графа.**

Определение графа

Две концевые вершины одного и того же ребра называются смежными.

Если u =(*Xi*, *Xj*), то ребро u инцидентно вершинам *Xi* и *Xj*, а вершины *Xi* и *Xj* инцидентны ребру u.

Вершины *Xi* и *Xj* называются концевыми вершинами (или просто концами) ребра u =(*Xi*, *Xj*).

Определение графа

Степенью вершины называют количество инцидентных ей рёбер (при этом петли считают дважды). Обозначают: $\rho(X_i)$.

Вершина называется **изолированной**, если она не принадлежит ни одному ребру, т.е. $\rho(X_i)=0$;

вершина называется **висячей** (или **листом**), если она принадлежит ровно одному ребру, т.е. $\rho(X_i)=1$.

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется **нуль-графом**. Нуль-граф не содержит ребер.

Виды графов

Граф *G=G(V,A)* называется ориентированным (или орграфом), если все его связи заданы дугами (рис. 4). *A* – множество дуг.

Граф *G=G(V,E)* называется неориентированным, если все его связи заданы ребрами (рис. 5). *E* – множество ребер.

Граф *G=G(V,E,A)* называется смешанным, если он содержит ребра и дуги (рис. 6).

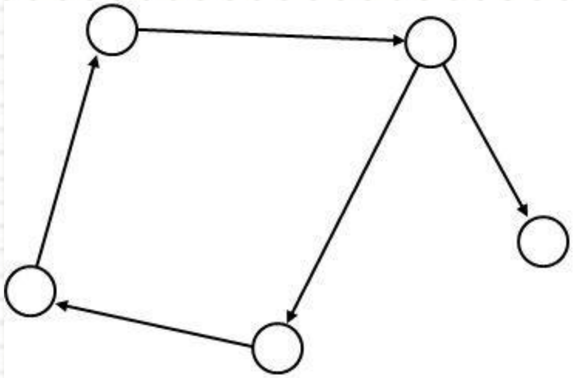


Рис. 4

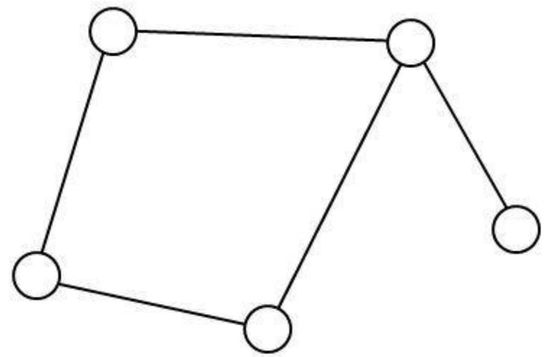


Рис. 5

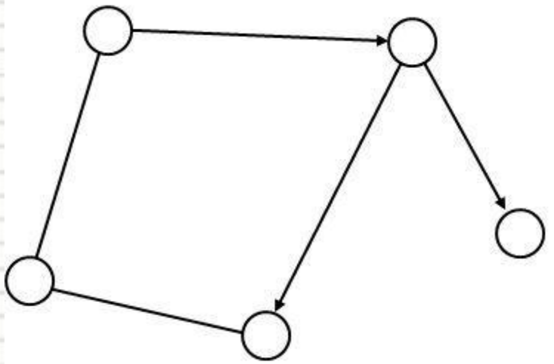


Рис. 6

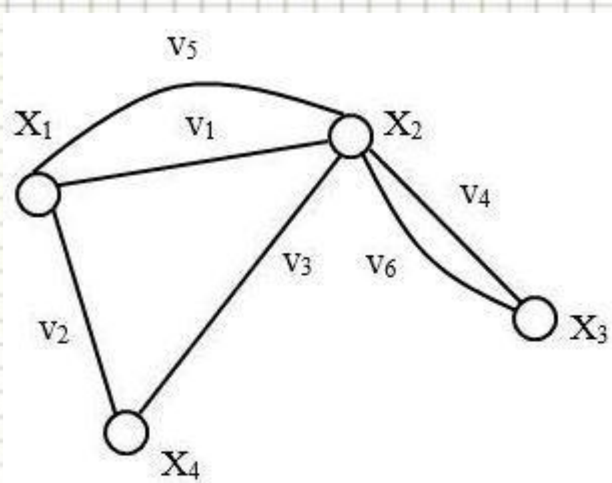
Мультиграф

Мультиграфом называется граф, который содержит кратные связи.

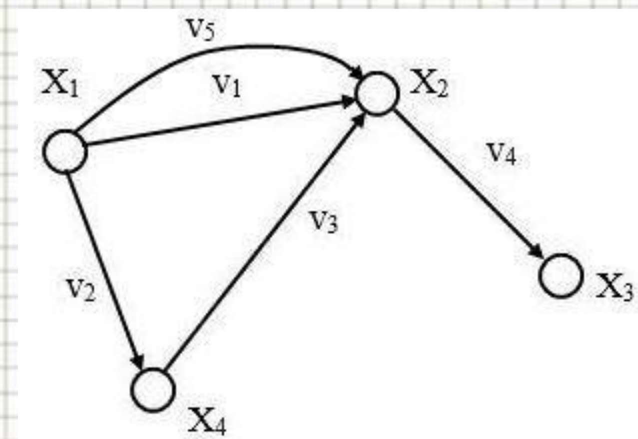
В неориентированном графе: существуют хотя бы две вершины, которые соединены более, чем одним ребром.

В ориентированном графе: существуют хотя бы две дуги, имеющие одно начало и один конец.

Неориентированный мультиграф



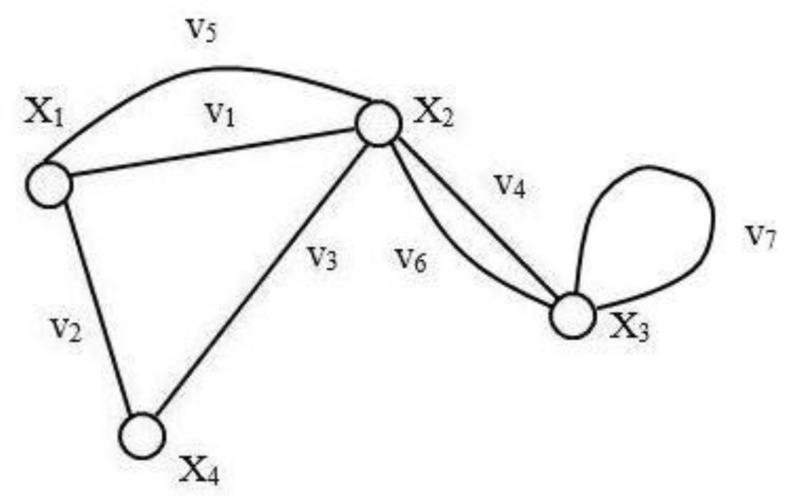
Ориентированный мультиграф



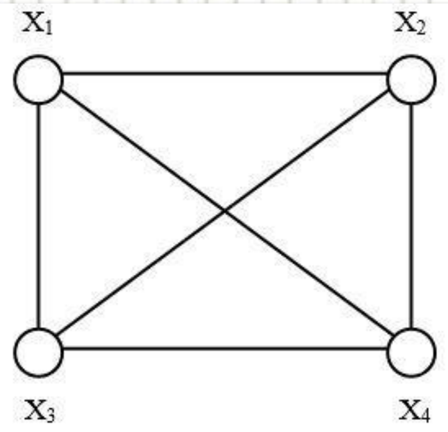
Псевдограф

Полный граф

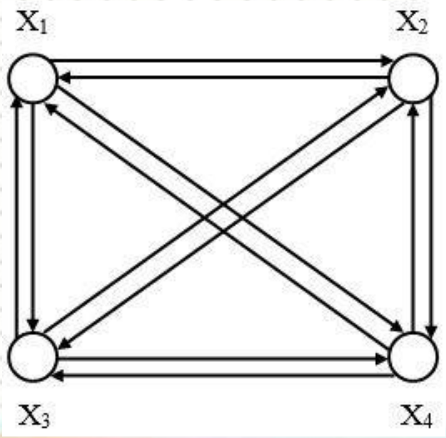
Псевдограф – граф, имеющий петли и/или кратные связи.



Полный граф – граф, в котором любые две вершины соединены между собой, т.е. все вершины соединены со всеми.



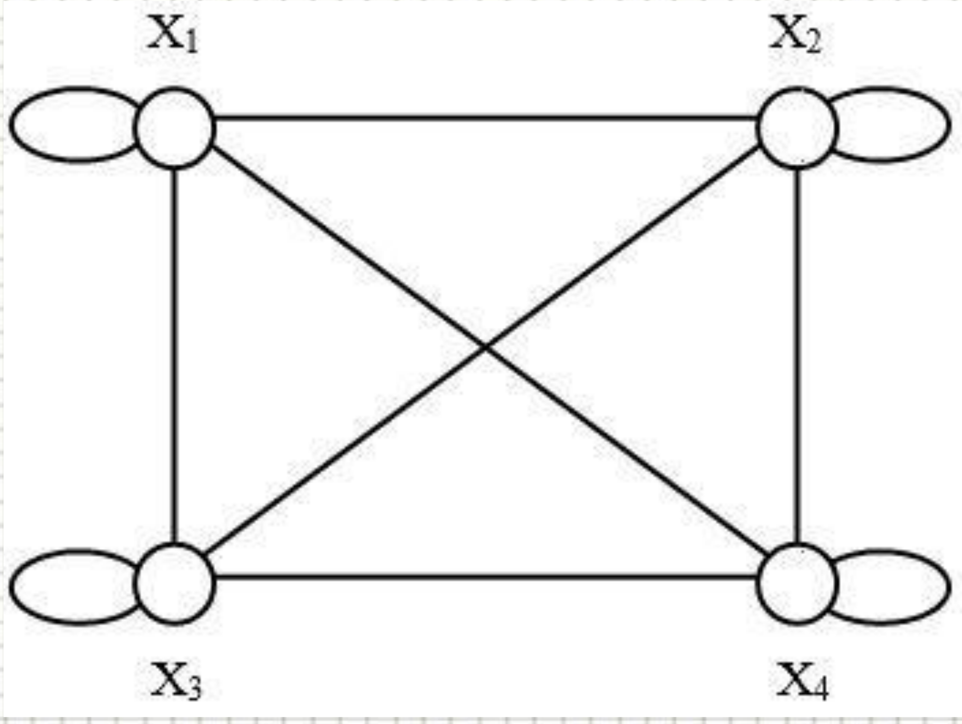
Полный неориентированный граф



Полный ориентированный граф

Плотный граф

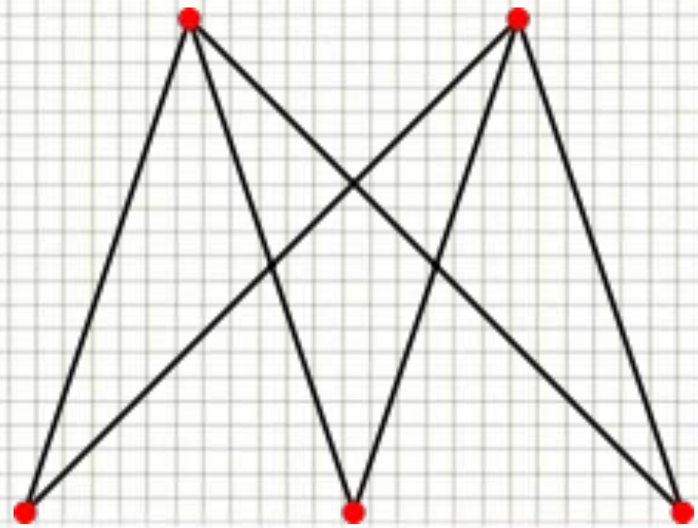
Плотный граф – полный граф, у которого при каждой вершине имеется петля.



Двудольный граф

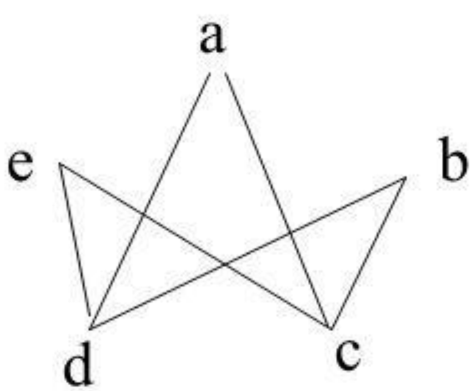
Двудольный граф – граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

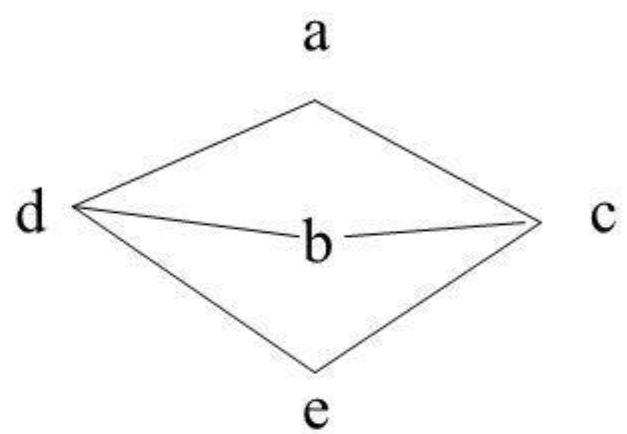
К примеру граф футболистов и клубов, ребро соединяет соответствующего игрока и клуб, если игрок играл в этом клубе.



Изоморфные графы

Два графа G_1 и G_2 называются изоморфными, если они имеют равное число вершин и равное число ребер, и существует взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин, и множествами их ребер такое, что в графах соответствующие ребра соединяют соответствующие вершины.





Способы задания графов

1. Геометрический.

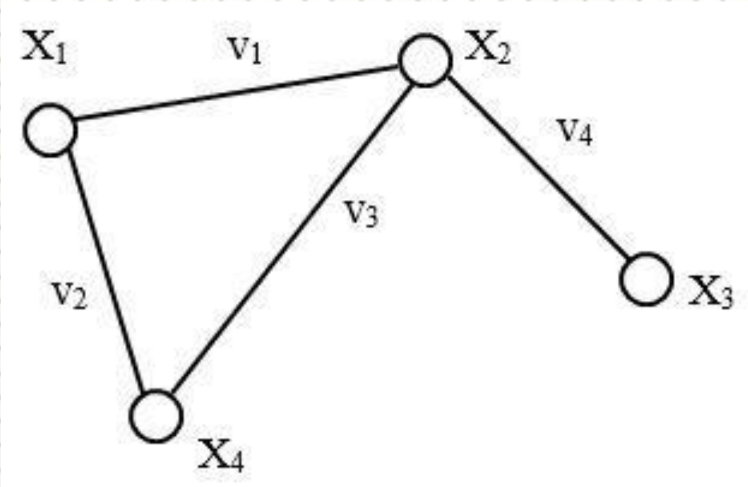
Пусть задан граф G=G(X,V).

Графы имеют наглядную геометрическую интерпретацию в виде диаграмм, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. Точки соответствуют вершинам графа (элементам множества X), а линии – его ребрам (дугам). При этом форма и длина линий значения не имеют. Важно лишь, что две данные точки соединены или не соединены линией.

Способы задания графов

1. Геометрический

Пример:



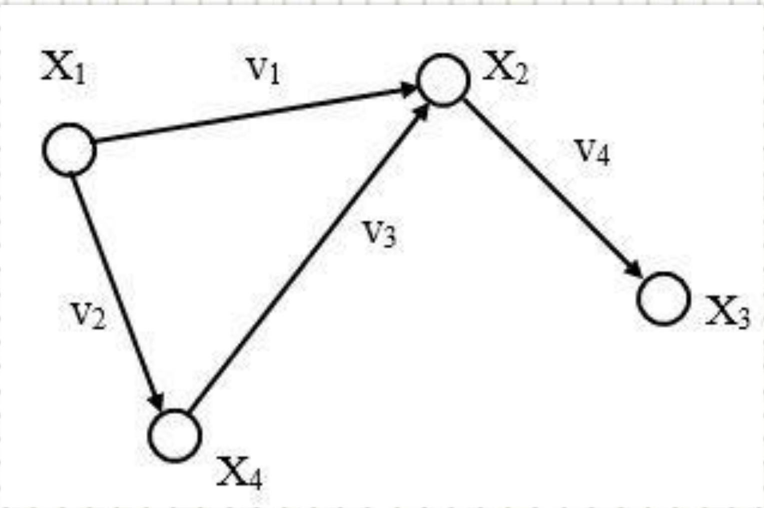


Рис. 1

Рис. 2

Способы задания графов

2. Аналитический.

Всякий граф $G=G(X,V)$ можно рассматривать как совокупность множества элементов X и подмножества V упорядоченных пар (X_i, X_j) декартового произведения $X \times X$, т.е. $V \subseteq X^2$. Таким образом, аналитически граф можно считать бинарным отношением, заданным на множестве X.

Способы задания графов

2. Аналитический.

Чтобы задать граф аналитически, необходимо указать:

1) Множество вершин X.
2) Множество ребер (дуг)

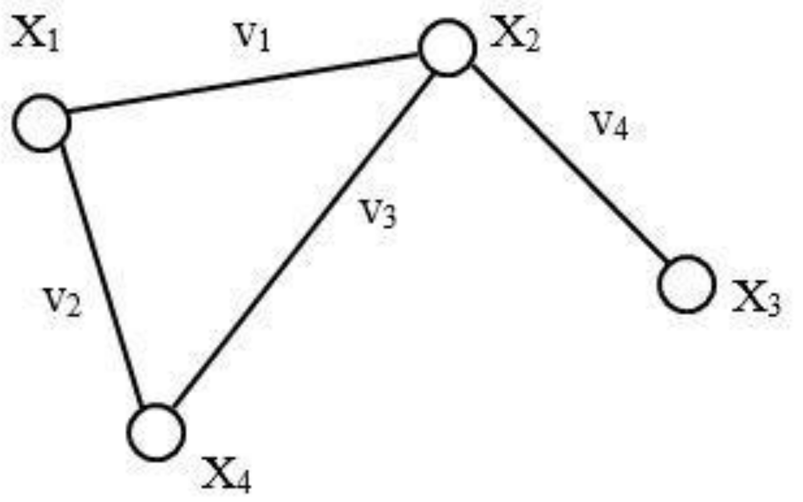
$V=\{(X_i, X_j) | X_i, X_j \in X\}$.

3) Множество изолированных вершин.

Способы задания графов

2. Аналитический.

Пример:



Множество вершин: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Множество дуг: $\{\varnothing\}$

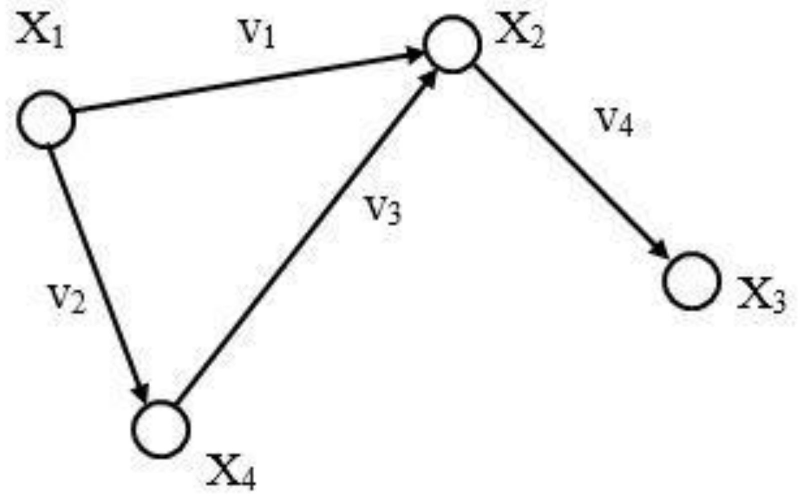
Множество рёбер: $\{(X_1, X_2), (X_1, X_4), (X_2, X_3), (X_2, X_4)\}$

Множество изолированных вершин: $\{\varnothing\}$

Способы задания графов

2. Аналитический.

Пример:



Множество вершин: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Множество дуг: $\{(X_1, X_2), (X_1, X_4), (X_2, X_3), (X_4, X_2)\}$

Множество рёбер: $\{\varnothing\}$

Множество изолированных вершин: $\{\varnothing\}$