



Дискретная математика

Основы теории графов

ЛЕКЦИЯ №7.1

Основные определения.

Виды графов.



Лекция №7.1

План

- 1. Возникновение теории графов.
- 2. Основные понятия и определения теории графов.
- 3.



Задачи, приводящие к понятию графа

Теория графов – это раздел дискретной математики, особенностью которого является геометрический подход к изучению объектов.

Во многих ситуациях привычка к ассоциациям и аналогиям заставляет человека рисовать на бумаге точки, изображающие людей, населенные пункты, химические вещества и т.д. и соединять эти точки линиями или стрелками, означая некоторые отношения между этими объектами. Такие схемы встречаются в различных отраслях под разными названиями: социограммы (в психологии), электрические цепи (в электротехнике), диаграммы организации (в экономике), сети коммуникаций (в связи и других областях), генеалогические деревья (в биологии) и т.п.



Задачи, приводящие к понятию графа

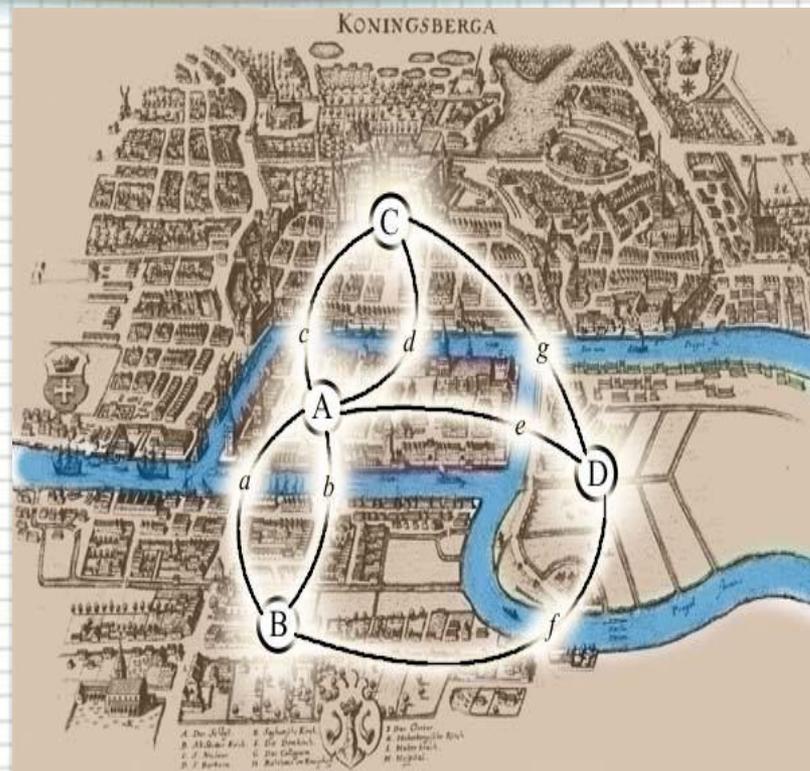
Подобные схемы впервые назвал «графами» венгерский математик Денеш Кёниг в 1936 г. При этом начало теории графов как отдельной дисциплины было положено еще в 1736 году Леонардом Эйлером в его знаменитом рассуждении о семи Кенигсбергских мостах.

Бывший Кенигсберг (ныне - Калининград) расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинuty мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.



Задача о кенигсбергских мостах

Кенигсберцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причем на каждом мосту следовало побывать только один раз.



Эйлер доказал, что это невозможно и изобрёл таким образом эйлеровы циклы. Однако эта статья была единственной в течение почти ста лет.



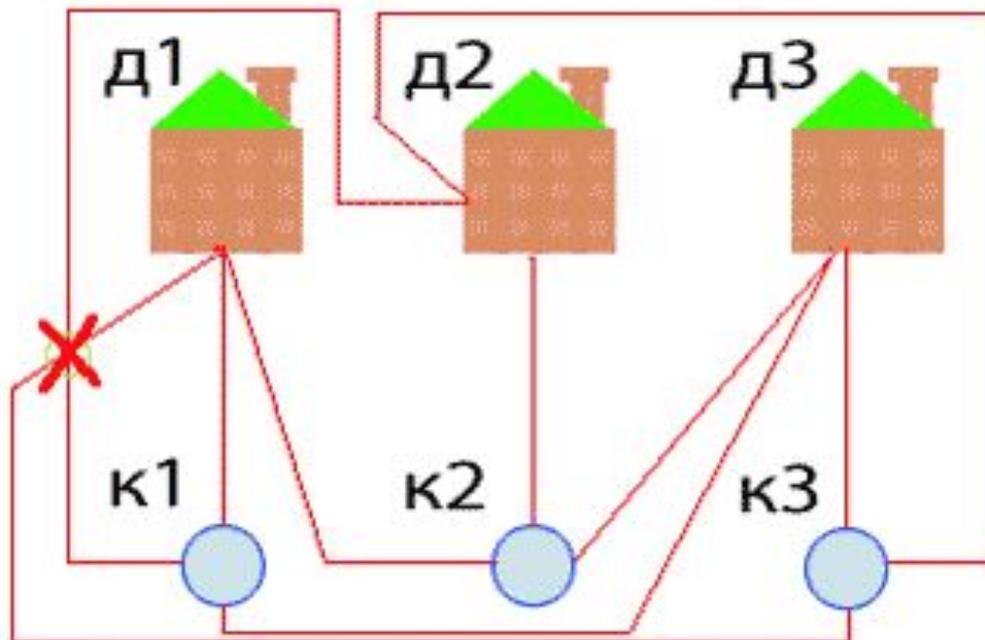
Задача о трех колодцах и трех домах



Интерес к проблемам теории графов возродился к середине 19 столетия благодаря исследованиям электрических сетей, моделей кристаллов, структур молекул. Большое число популярных головоломок тех времен поддавались формулировкам именно в терминах графов. Одна из них – задача о трех колодцах и трех домах.

Три соседа поссорились. Все три имеют по колодцу. Возможно ли проложить тропинки от дома каждого соседа к каждому колодцу так, чтобы эти тропинки не пересекались?

Как видим, ответ отрицательный.



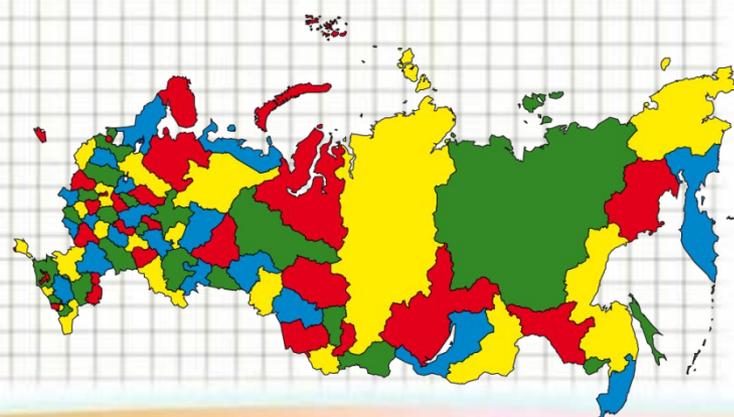
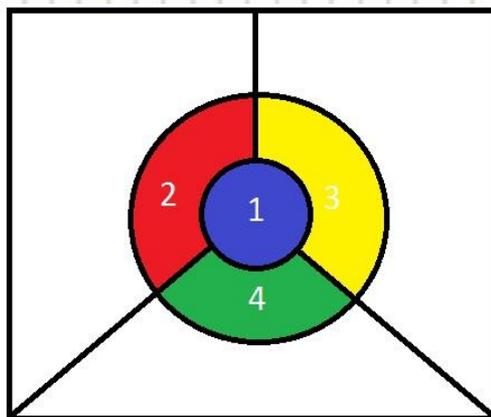
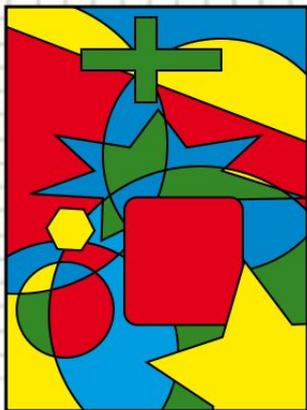


Теорема о четырёх красках



Теорема о четырёх красках — утверждение о том, что всякую расположенную на сфере карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета. При этом области могут быть как односвязными, так и многосвязными (в них могут присутствовать «дырки»), а под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке общей границей для них не считаются.

Эта теорема была сформулирована Фрэнсисом Гутри (англ.) в 1852 году, однако доказать её долгое время не удавалось. В течение этого времени было предпринято множество попыток как доказательства, так и опровержения, и эта задача носила название проблемы четырёх красок.





Применение графов



Период интенсивной разработки общей теории графов начался в 50-х годах XX века в связи со становлением кибернетики и развитием вычислительной техники.

Графы находят широкое применение в теории программирования и синтезе вычислительных машин и других технических устройств и систем (электронные платы в автоматике и радиоэлектронике), в изучении физических, химических, технологических процессов, в решении экономических задач (сетевые методы планирования), в лингвистических и социологических исследованиях.

Известны попытки применить теорию графов для синтеза систем автоматического регулирования, что обеспечивает наглядность и значительную экономию в вычислениях.



Применение графов

Графы применяются:

**Банковское
дело**



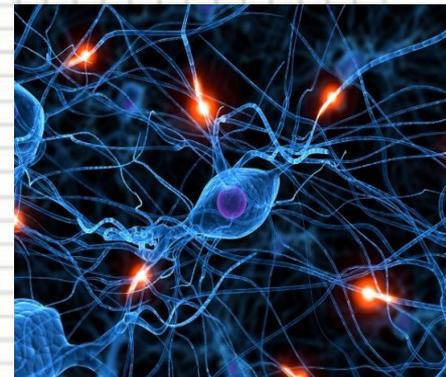
**Промышлен-
ность**



Медицина

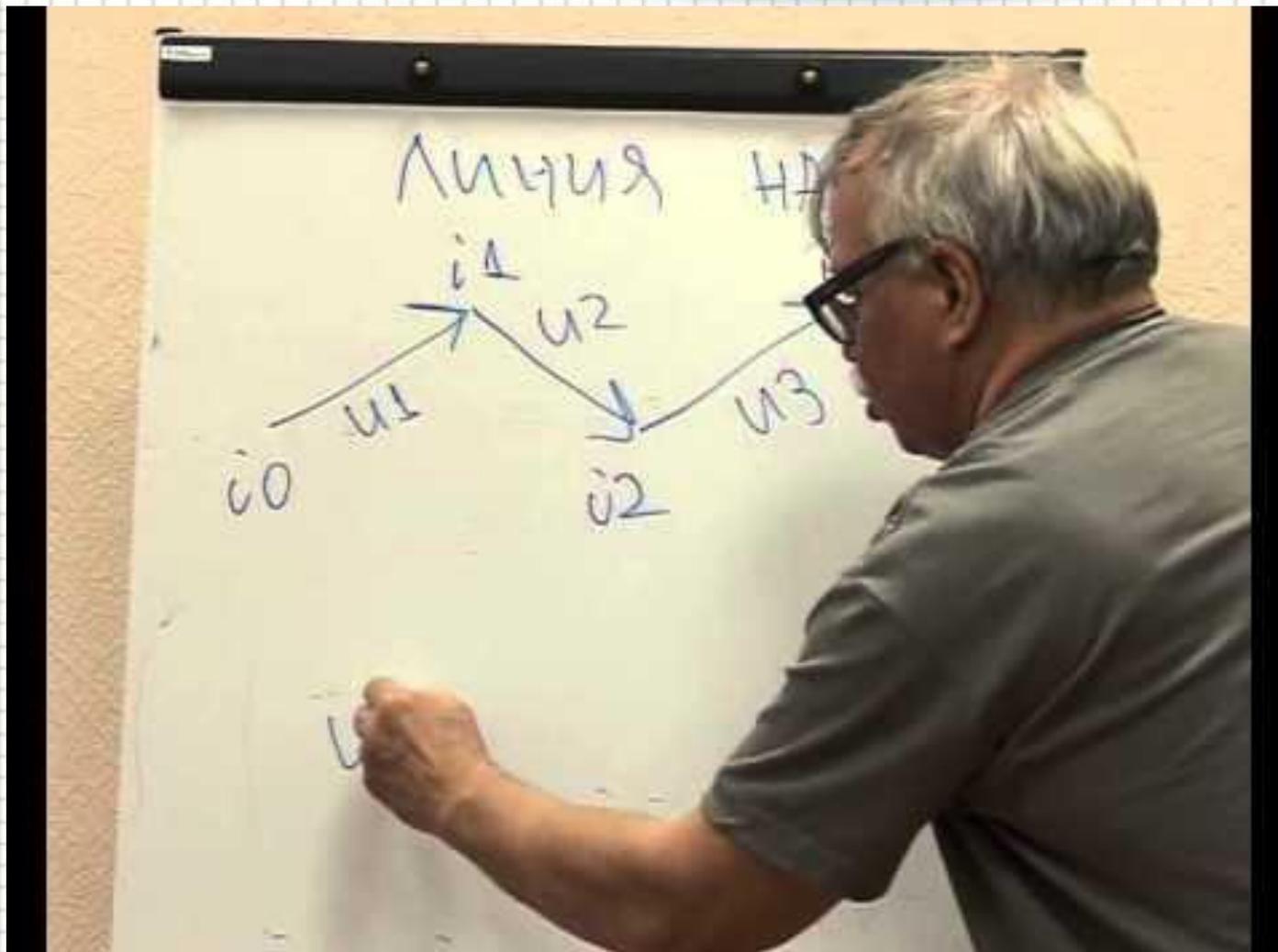


**Молекулярная
биология**





Лекция доктора технических наук, профессора Владимира
Алексеевича Кузнецова
Петрозаводский государственный университет (РФ)





Основные понятия и определения теории графов



Рассмотрим пример.

Пусть V – множество городов России, E – множество пар аэропортов, между которыми установлено гражданское авиасообщение.

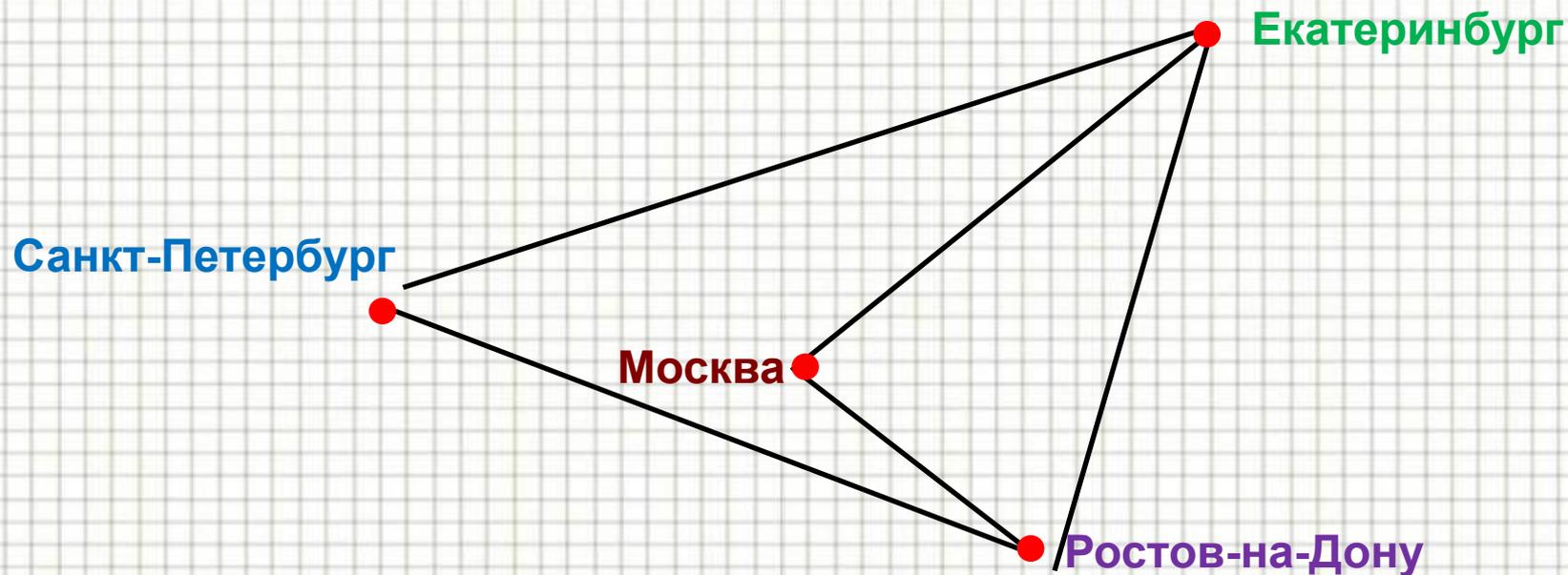


Рис. 1

На рисунке 1 изображен граф $G=G(V,E)$.



Определение графа

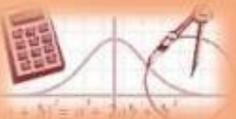


Пусть V - непустое множество, состоящее из соединенных некоторым образом точек X_i . Множество V называется множеством **вершин** (или **узлов**).

Обозначим E - множество пар $u = (X_i, X_j)$, где X_i, X_j - элементы множества V . Пара $u = (X_i, X_j)$ называется **ребром (дугой)**.

Графом называется упорядоченная пара $G = G(V, E)$.

Иными словами, граф - это непустое множество точек (вершин) и отрезков (ребер), концы которых принадлежат заданному множеству точек.



Определение графа



Ребро $u=(X_i, X_j)$ называется **неориентированным**, если $(X_i, X_j) = (X_j, X_i)$.

Ребро $u=(X_i, X_j)$ называется **ориентированным** (или **дугой**), если $(X_i, X_j) \neq (X_j, X_i)$.

При этом дуга направлена от вершины X_i к вершине X_j .

X_i – начало, X_j – конец дуги.

Ребро (дуга) называется **петлёй**, если его концы совпадают, то есть $u=(X_i, X_i)$.



Определение графа

Множество V , а значит и множество E , обычно считаются конечными множествами. Граф называется **конечным**, если он имеет конечное число вершин (рис 2). В противном случае граф называется **бесконечным** (рис. 3).

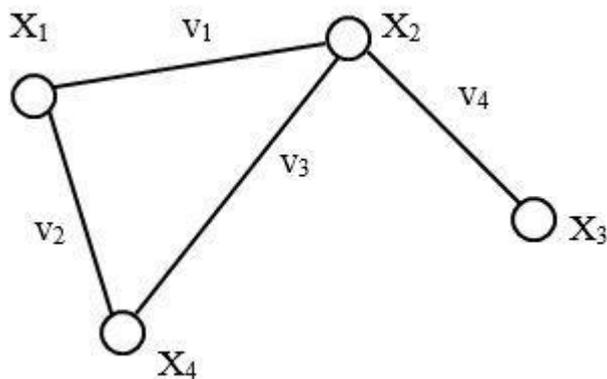


Рис. 2

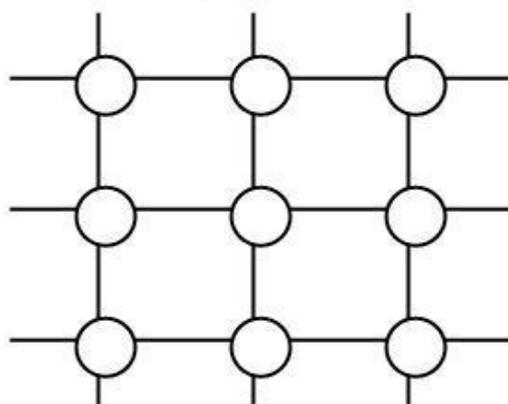


Рис. 3

Многие результаты, полученные для конечных графов, неверны (или каким-либо образом отличаются) для бесконечных графов, поскольку не все утверждения, имеющие место для конечных множеств, выполняются в случае бесконечных множеств.



Определение графа



Вершины и рёбра графа называются также **элементами** графа,

число вершин в графе, т.е. $|V|$ называется **порядком** графа, число рёбер, т.е. $|E|$ - **размером** графа.



Определение графа



Две концевые вершины одного и того же ребра называются **смежными**.

Если $u = (X_i, X_j)$, то ребро u **инцидентно** вершинам X_i и X_j , а вершины X_i и X_j **инцидентны** ребру u .

Вершины X_i и X_j называются **концевыми вершинами** (или просто **концами**) ребра $u = (X_i, X_j)$.



Определение графа



Степенью вершины называют количество инцидентных ей рёбер (при этом петли считают дважды). Обозначают: $\rho(X_i)$.

Вершина называется **изолированной**, если она не принадлежит ни одному ребру, т.е. $\rho(X_i)=0$;

вершина называется **висячей** (или **листом**), если она принадлежит ровно одному ребру, т.е. $\rho(X_i)=1$.

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется **нуль-графом**. Нуль-граф не содержит ребер.



Виды графов



Граф $G=G(V,A)$ называется **ориентированным** (или **орграфом**), если все его связи заданы дугами (рис. 4). A – множество дуг.

Граф $G=G(V,E)$ называется **неориентированным**, если все его связи заданы ребрами (рис. 5). E – множество ребер.

Граф $G=G(V,E,A)$ называется **смешанным**, если он содержит ребра и дуги (рис. 6).

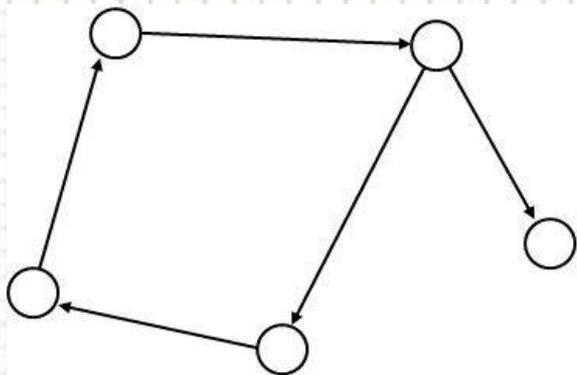


Рис. 4

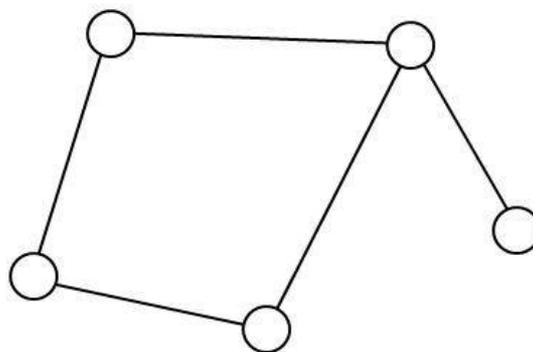


Рис. 5

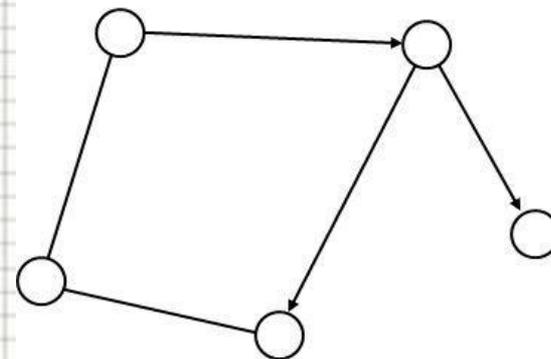


Рис. 6



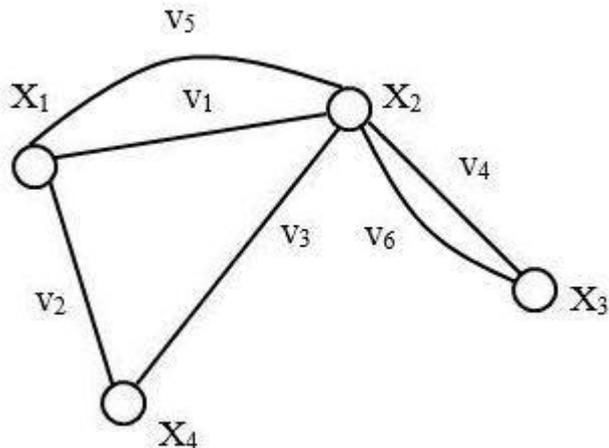
Мультиграф

Мультиграфом называется граф, который содержит кратные связи.

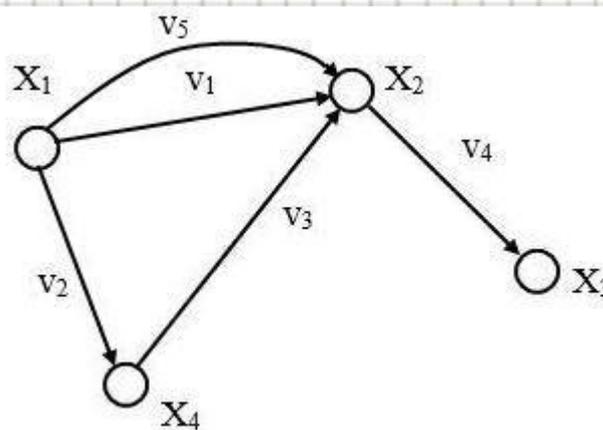
В неориентированном графе: существуют хотя бы две вершины, которые соединены более, чем одним ребром.

В ориентированном графе: существуют хотя бы две дуги, имеющие одно начало и один конец.

Неориентированный мультиграф



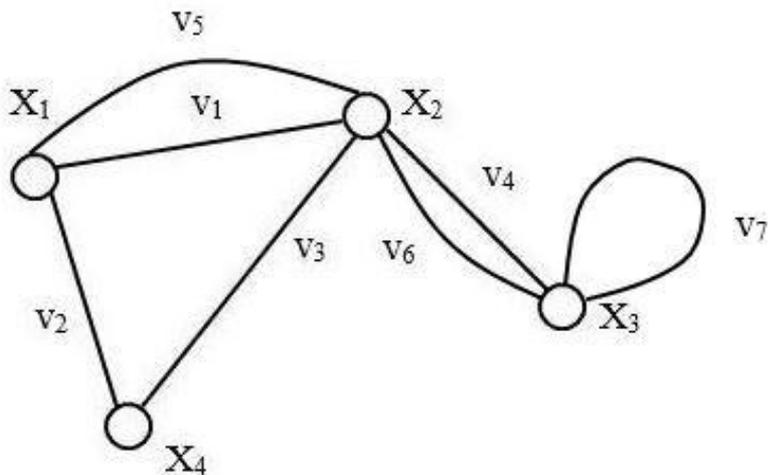
Ориентированный мультиграф





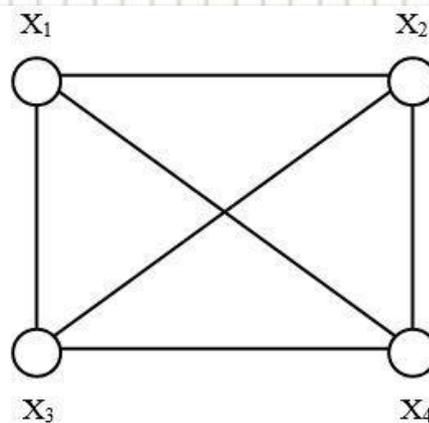
Псевдограф

Псевдограф – граф, имеющий петли и/или кратные связи.



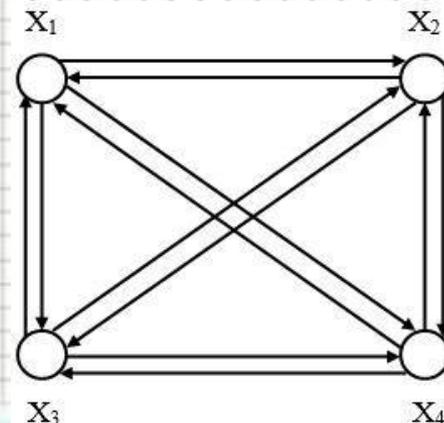
Полный граф

Полный граф – граф, в котором любые две вершины соединены между собой, т.е. все вершины соединены со всеми.



Полный неориентированный граф

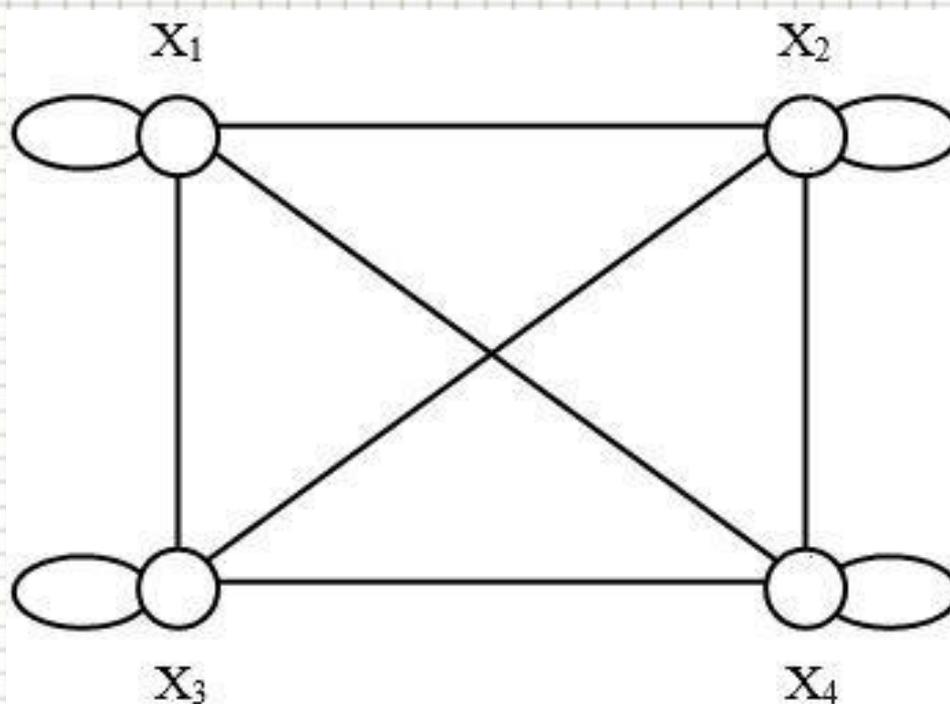
Полный ориентированный граф

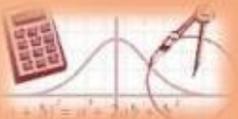




Плотный граф

Плотный граф – полный граф, у которого при каждой вершине имеется петля.

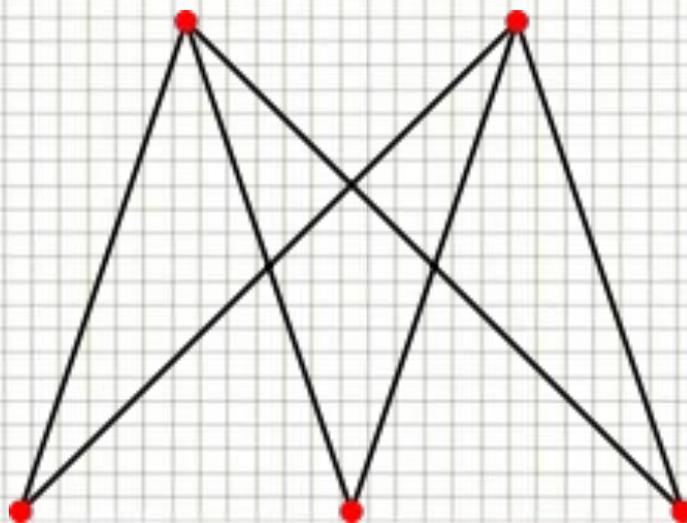




Двудольный граф

Двудольный граф – граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

К примеру граф футболистов и клубов, ребро соединяет соответствующего игрока и клуб, если игрок играл в этом клубе.

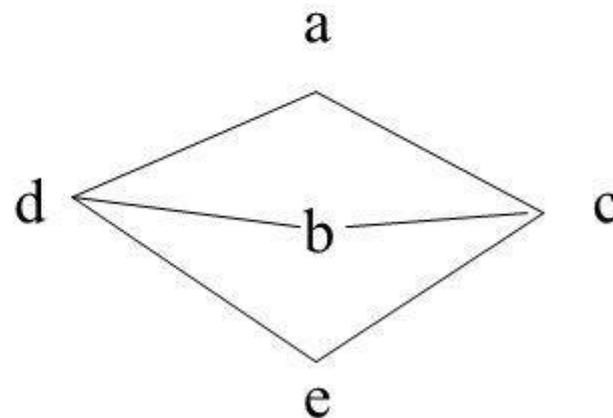
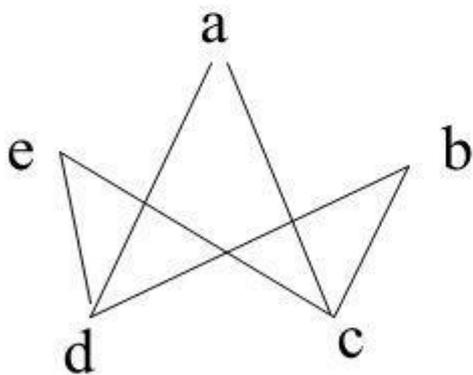




Изоморфные графы



Два графа G_1 и G_2 называются изоморфными, если они имеют равное число вершин и равное число ребер, и существует взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин, и множествами их ребер такое, что в графах соответствующие ребра соединяют соответствующие вершины.





Способы задания графов

1. Геометрический.

Пусть задан граф $G=G(X,V)$.

Графы имеют наглядную геометрическую интерпретацию в виде диаграмм, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. Точки соответствуют вершинам графа (элементам множества X), а линии – его ребрам (дугам). При этом форма и длина линий значения не имеют. Важно лишь, что две данные точки соединены или не соединены линией.



Способы задания графов

1. Геометрический

Пример:

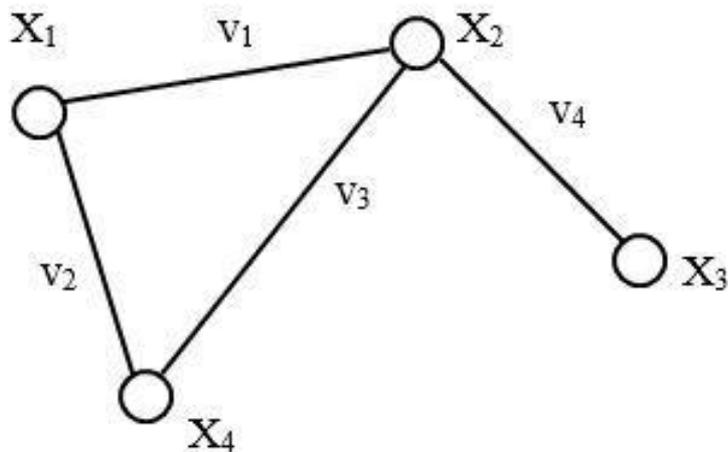


Рис. 1

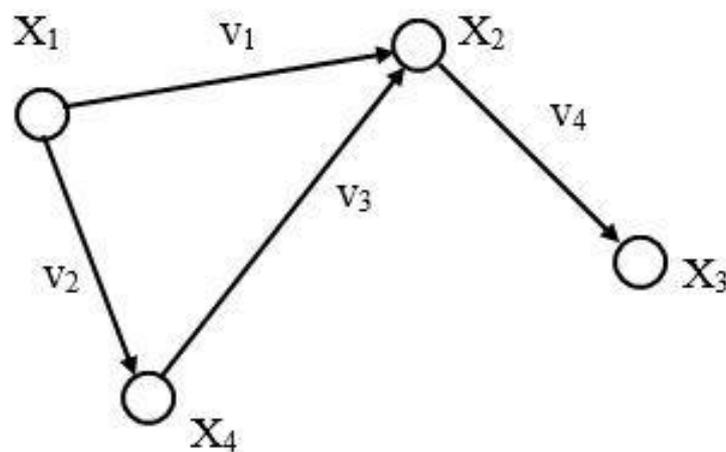


Рис. 2



Способы задания графов

2. Аналитический.

Всякий граф $G=G(X,V)$ можно рассматривать как совокупность множества элементов X и подмножества V упорядоченных пар (X_i, X_j) декартового произведения $X \times X$, т.е. $V \subseteq X^2$. Таким образом, аналитически граф можно считать бинарным отношением, заданным на множестве X .



Способы задания графов

2. Аналитический.

Чтобы задать граф аналитически, необходимо указать:

1) Множество вершин X .

2) Множество ребер (дуг)

$$V = \{(X_i, X_j) \mid X_i, X_j \in X\} .$$

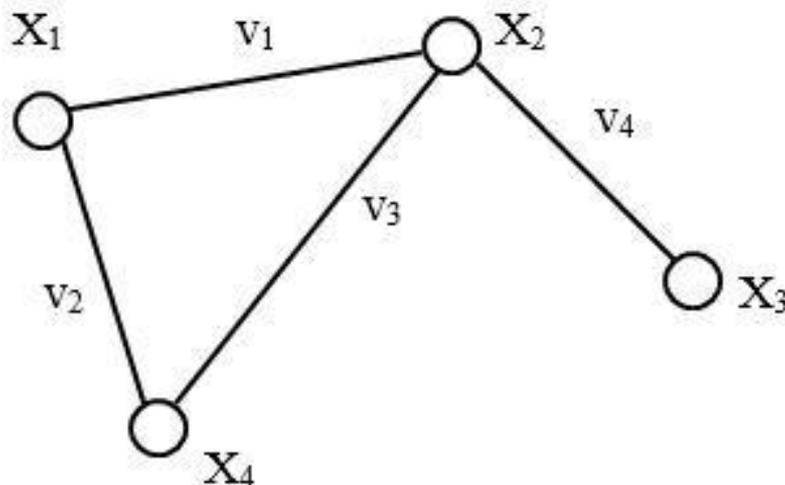
3) Множество изолированных вершин.



Способы задания графов

2. Аналитический.

Пример:



Множество вершин: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Множество дуг: $\{\emptyset\}$

Множество рёбер: $\{(X_1, X_2), (X_1, X_4), (X_2, X_3), (X_2, X_4)\}$

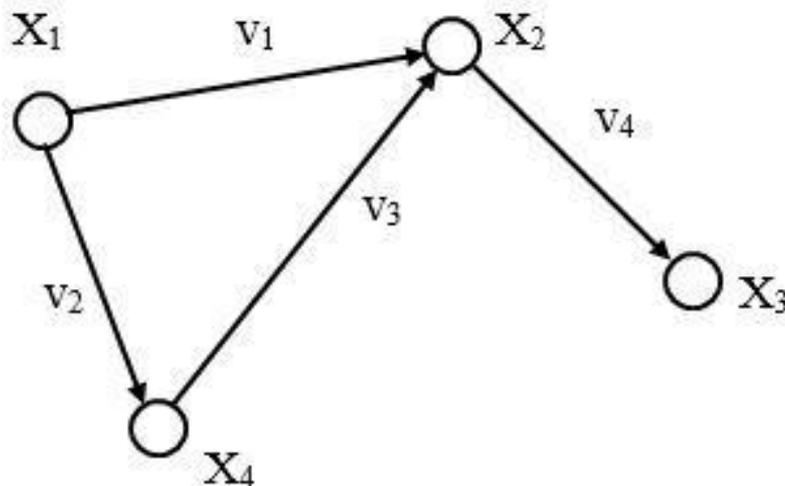
Множество изолированных вершин: $\{\emptyset\}$



Способы задания графов

2. Аналитический.

Пример:



Множество вершин: $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

Множество дуг: $\{(X_1, X_2), (X_1, X_4), (X_2, X_3), (X_4, X_2)\}$

Множество рёбер: $\{\emptyset\}$

Множество изолированных вершин: $\{\emptyset\}$