# Лекция №4

## Корреляционный анализ детерминированных процессов

Рассмотрим эту функцию на ограниченном интервале времени $[-T, T]$. Среднее арифметическое значение данной функции в точках $x_i$, $i = \overline{0, n}$ определяется известным выражением

$$\bar{x}_{2T} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n}. \tag{4.1}$$

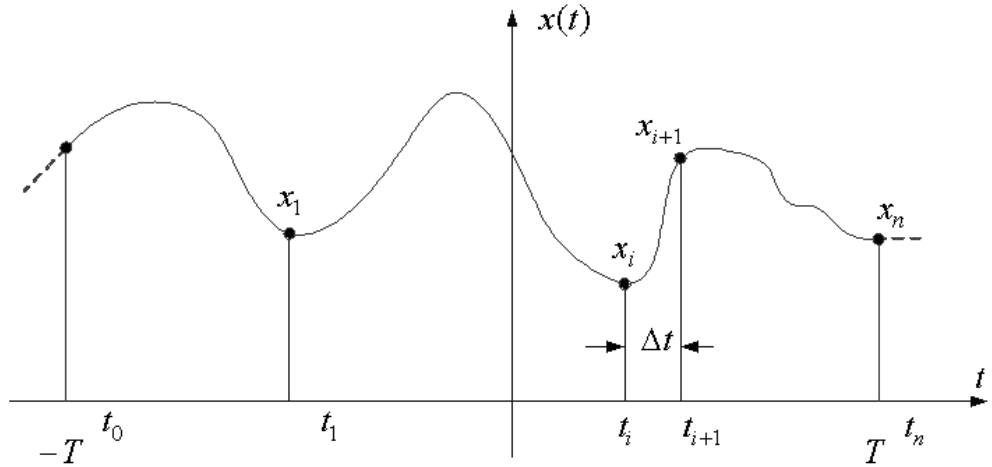


Рис. 4.1 -Временная функция $x(t)$ неограниченной длительности

Умножая числитель и знаменатель (4.1) на $\Delta t$, получим:

$$\bar{x}_{2T} = \frac{\sum_{k=0}^{n} x_k \Delta t}{n \Delta t} = \frac{1}{2T}\sum_{k=0}^{n} x_k \Delta t$$

при $\Delta t \to 0$

$$\bar{x}_{2T} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt \tag{4.2}$$

Очевидно, что (4.2) представляет собой среднее значение или постоянную составляющую процесса $x(t)$.

Среднее значение квадрата функции $x(t)$:

$$\overline{x^2_{2T}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt \tag{4.3}$$

Среднее значение квадрата отклонения процесса от среднего

$$\overline{[x(t) - \bar{x}]^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t) - \bar{x}]^2\,dt \tag{4.4}$$

равно средней мощности переменной составляющей процесса.

временная ковариационная функция

$$K_{x_{2T}}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x(t-\tau)\,dt \qquad (4.5)$$

И временная корреляционная функция

$$R_{x_{2T}}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \big(x(t) - m\big)\big(x(t-\tau) - m\big)\,dt \qquad (4.6)$$

Между которыми существует очевидная связь

$$R_{x_{2T}}(\tau) = K_{x_{2T}}(\tau) - m^2 \qquad (4.7)$$

На рис. 1.5.2 и 1.5.3 изображены ковариационные функции процессов с различными скоростями изменения.

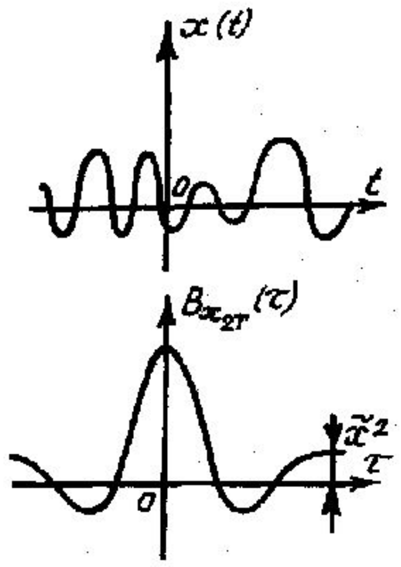


Рис. I.5.2

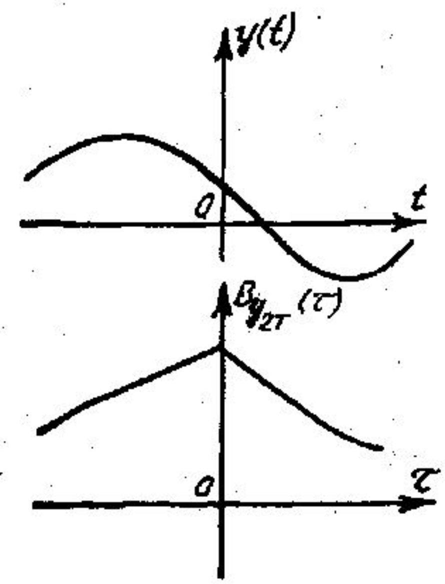


Рис. I.5.3

временная взаимная ковариационная функция двух процессов

$$B_{xy2T}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, y(t - \tau)\, dt \qquad (4.8)$$

Случай положительной ковариации иллюстрируется рис. 1.54, а отрицательной - 1.55.

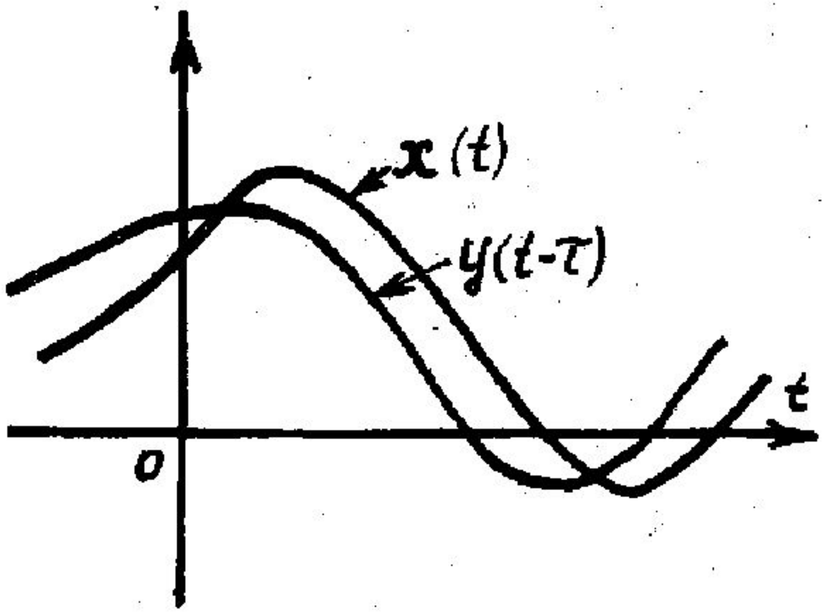


Рис. I.5.4

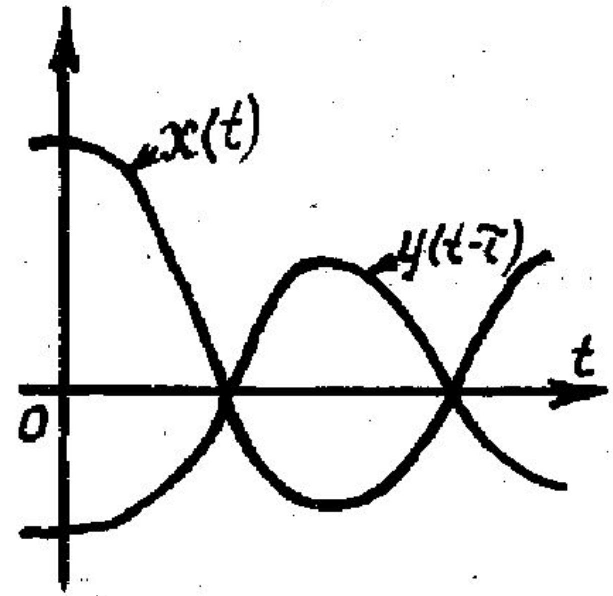


Рис. I.5.5

Основные свойства конечной временной ковариационной функции можно сформулировать следующим образом.

1. Ковариационная функция $B_x(\tau)$ принимает минимальное значение при $\tau = 0$. Функцию $B_x(\tau)$ можно трактовать как энергию взаимодействия колебаний $x(t)$ и $x(t - \tau)$. Очевидно, что при $\tau = 0$ наступает максимум этой энергии, поскольку колебание в этом случае взаимодействует "само с собой".

2. Функция $B_x(\tau)$ является четной:

$$B_x(\tau) = B_x(-\tau)$$

поскольку безразлично, в какую сторону - вправо или влево сдвигать относительно своей копии сигнал.

3. Ковариационная функция является убывающей (необязательно монотонно) функцией для сигналов конечной длительности и имеющих конечную энергии (т.е. для реальных сигналов).

4. Сигналы, ограниченные по длительности временным интервалом [0,T], имеют ковариационную функцию, тождественно равную нулю вне отрезка оси 2T.

Для нормированной корреляционной функции $r_x(\tau)$ стационарного случайного процесса при любом $\tau$ справедливо соотношение

$$|r_x(\tau)| \leq 1$$

Кроме того,

$$r_x(0) = 1$$

$$\lim_{\tau \to \infty} r_x(\tau) = 0$$

$$|r_x(\tau)|_{\tau > \tau_0} < 0,05$$

Используя и другое определение времени корреляции

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |r_x(\tau)| d\tau$$

Предположим, что имеются два колебания $s_1(t), s_2(t)$. Найдем энергию их суммы:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t)]^2 dt + [s_2(t)]^2 dt +$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt \qquad (4.9)$$

Первые два интеграла в правой части соответствуют энергии $E_1$ и $E_2$ сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ а последний определяет энергию взаимодействия между ними.

Энергия взаимодействия некогерентных колебаний

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2(t)\, dt = 0$$

Упростим выражение (4.9) можно записать в следующем виде:

$$E = B_{s_1}(0) + B_{s_2}(0) + 2B_{s_1 s_2}(0) \qquad (4.10)$$

Запишем, исходное модулированное колебание в следующем виде:

$$s(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \Theta(t)) = \mathrm{Re}\left[A(t)\, e^{j\Theta(t)}\, e^{j\omega_0 t}\right] \qquad (4.11)$$

где $\omega_0$ – некоторая центральная частота колебания.

Сдвинутые по времени $\tau$ и смещенные по частоте на $\Omega$ колебания записываются так

$$s_{\tau,\Omega}(t) = A(t+\tau)\cos\left[(\omega_0 + \Omega)(t+\tau) + \Theta(t+\tau)\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{A}(t+\tau)\, e^{j(\omega_0+\Omega)(t+\tau)}\right] \qquad (4.12)$$

Выражения (4.11) и (4.12) можно переписать в ином виде, воспользовавшись понятием комплексной огибающей сигнала:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{A}(t)\, e^{j\omega_0 t}\right]; \qquad (4.13)$$

$$s_{\tau,\Omega}(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{A}(t+\tau)\, e^{j(\omega_0+\Omega)t}\, e^{j(\omega_0+\Omega)\tau}\right] \qquad (4.14)$$

где $\dot{A}(t) = A(t)\, e^{j\Theta(t)}$, где $\dot{A}(t+\tau) = A(t+\tau)\, e^{j\Theta(t+\tau)}$ – комплексные огибающие соответствующих сигналов.

Для дальнейших выкладок удобно перейти к комплексному представлению колебаний:

$$s(t) = A(t)\,e^{j\omega_0 t} \quad \text{и} \quad s_{\tau,\Omega}(t) = A(t+\tau)\,e^{j(\omega_0+\Omega)t}\,e^{j(\omega_0+\Omega)\tau}.$$

действительные части которых соответствуют $u(t)$ и $u_{\tau,\Omega}(t)$.

Найдем конечную корреляционную функцию комплексного процесса $s(t)$ с учетом сдвига по времени и частоте:

$$B_{s}(\tau,\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,s^*_{\tau,\Omega}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\,e^{j\omega_0 t}\,A^*(t+\tau)\,e^{-j(\omega_0+\Omega)t}\,e^{-j(\omega_0+\Omega)\tau}\,dt =$$

$$= e^{-j(\omega_0+\Omega)t}\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\,A^*(t+\tau)\,e^{-j\Omega t}\,dt \tag{4.15}$$

Данное выражение определяет так называемую обобщенную корреляционную функцию сигнала. Модуль выражения (1.70)

$$\left|B_{s}(\tau,\Omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\,A^*(t+\tau)\,e^{-j\Omega t}\,dt\right| \tag{4.16}$$

Называется двумерной корреляционной функцией. Ее можно пронормировать в соответствии с выражением

$$\rho(\tau,\Omega) = \frac{\left|B_{s}(\tau,\Omega)\right|}{B_{s}(0,0)} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\,A^*(t+\tau)\,e^{-j\Omega t}\,dt\right|}{\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(t)\,dt} \tag{4.17}$$

Для того чтобы от $B_{s}(\tau,\Omega)$ перейти к корреляционной функции исходного колебания $u(t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \Theta(t)]$, необходимо положить в (4.15) $\Omega = 0$ и выделить вещественную часть функции $B_{s}(\tau,0)$.