

Лекция №4

Корреляционный анализ детерминированных процессов

Рассмотрим эту функцию на ограниченном интервале времени $[-T, T]$. Среднее арифметическое значение данной функции в точках $t_k, k = \overline{0, n}$ определяется известным выражением

$$x_{2T} = \frac{\sum_{k=0}^n x_k}{n+1}. \quad (4.1)$$

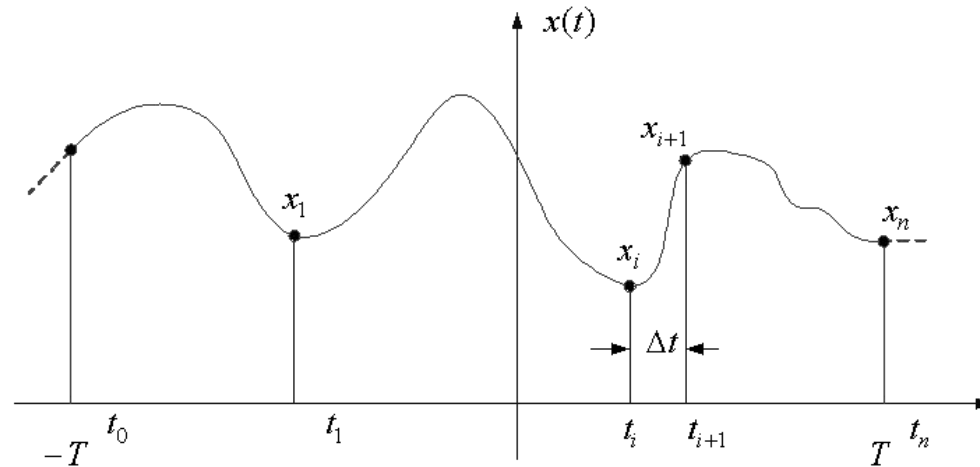


Рис. 4.1 -Временная функция $x(t)$ неограниченной длительности

Умножая числитель и знаменатель (4.1) на Δt получим:

$$\sigma_{2\Delta t}^2 = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k\Delta t}^2 \Delta t}{\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{k\Delta t}^2 \Delta t$$

при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\sigma_{2\Delta t}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(x) dx \quad (4.2)$$

Очевидно, что (4.2) представляет собой среднее значение или постоянную составляющую процесса $\sigma^2(x)$.

Среднее значение квадрата функции $\sigma^2(x)$:

$$\sigma_{2\Delta t}^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(x) dx \quad (4.3)$$

Среднее значение квадрата отклонения процесса от среднего

$$\sigma_{2\Delta t}^2 - \sigma^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma(x) - \sigma)^2 dx \quad (4.4)$$

равно средней мощности переменной составляющей процесса.

временная ковариационная функция

$$K_{\tau} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t+\tau) - \bar{x})(x(t) - \bar{x}) dt \quad (4.5)$$

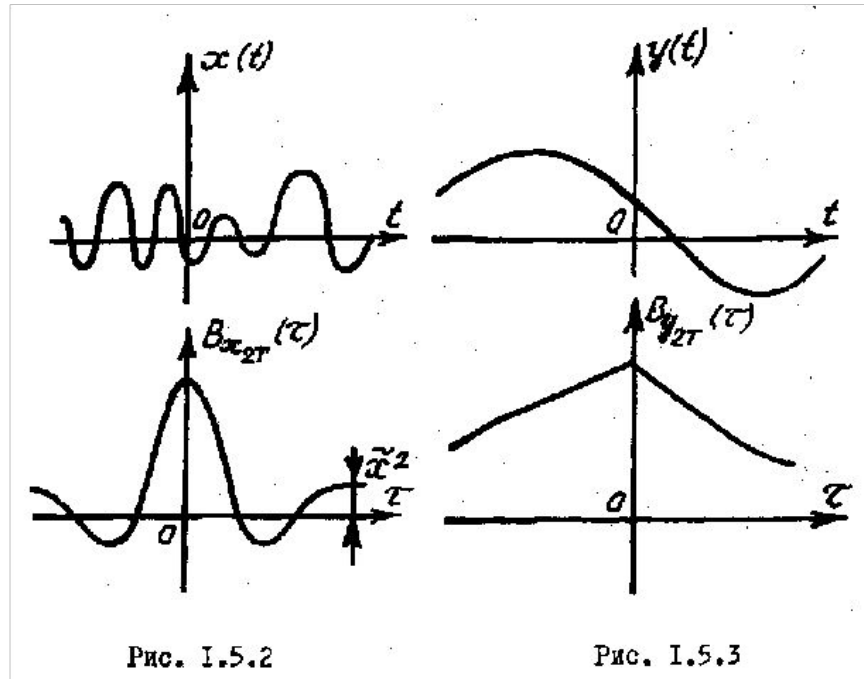
И временная корреляционная функция

$$R_{\tau} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t+\tau) - \bar{x})(x(t) - \bar{x}) dt - K_{\tau} - K_{-\tau} \quad (4.6)$$

Между которыми существует очевидная связь

$$R_{\tau} = K_{\tau} - K_{-\tau} \quad (4.7)$$

На рис. 1.5.2 и 1.5.3 изображены ковариационные функции процессов с различными скоростями изменения.



временная взаимная ковариационная функция двух процессов

$$B_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}] [y(t+\tau) - \bar{y}] dt \quad (4.8)$$

Случай положительной ковариации иллюстрируется рис. 1.54, а отрицательной - 1.55.

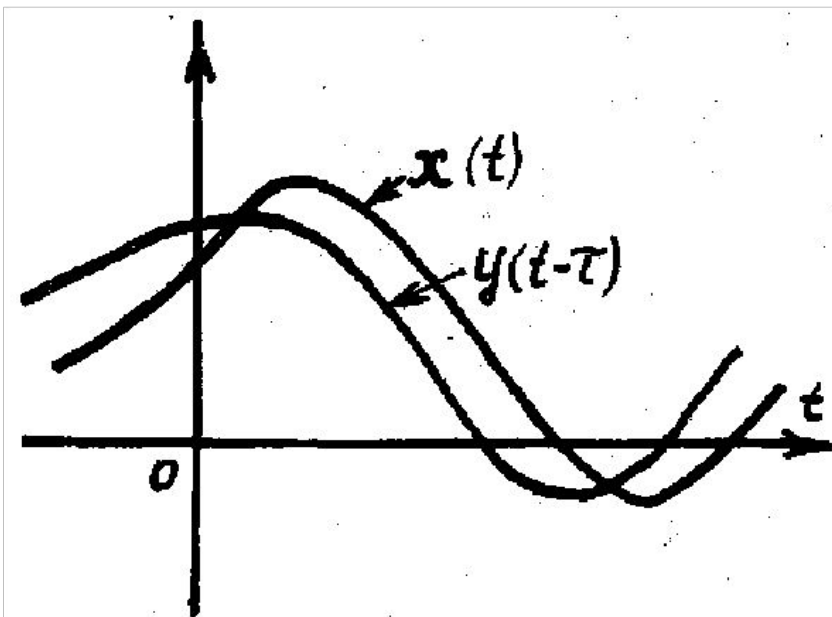


Рис. 1.5.4

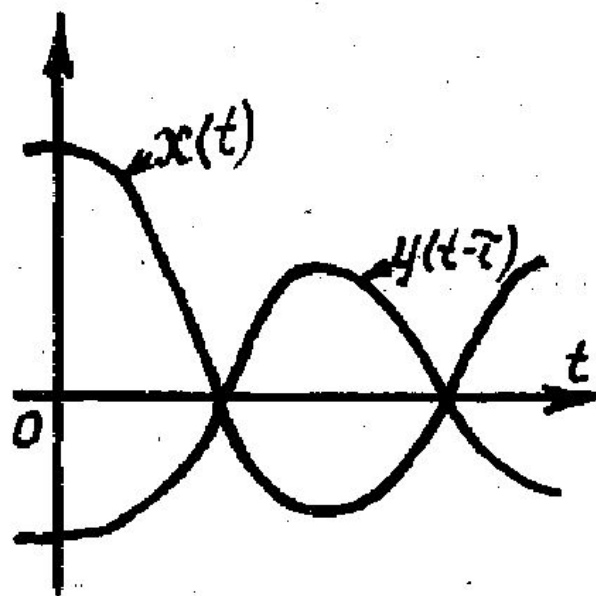


Рис. 1.5.5

Основные свойства конечной временной ковариационной функции можно сформулировать следующим образом.

1. Ковариационная функция $R_{xx}(\tau)$ принимает минимальное значение при $\tau = 0$. Функцию $R_{xx}(\tau)$ можно трактовать как энергию взаимодействия колебаний $x(t)$ и $x(t - \tau)$. Очевидно, что при $\tau = 0$ наступает максимум этой энергии, поскольку колебание в этом случае взаимодействует "само с собой".

2. Функция $R_{xx}(\tau)$ является четной:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

поскольку безразлично, в какую сторону - вправо или влево сдвигать относительно своей копии сигнал.

3. Ковариационная функция является убывающей (необязательно монотонно) функцией для сигналов конечной длительности и имеющих конечную энергии (т.е. для реальных сигналов).

4. Сигналы, ограниченные по длительности временным интервалом $[0, T]$, имеют ковариационную функцию, тождественно равную нулю вне отрезка оси $2T$.

Для нормированной корреляционной функции $\hat{a}_{\mu}(\tau)$ стационарного случайного процесса при любом τ справедливо соотношение

$$|\hat{a}_{\mu}(\tau)| \leq 1$$

Кроме того,

$$\hat{a}_{\mu}(0) = 1$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{a}_{\mu}(\tau) = 0$$

$$|\hat{a}_{\mu}(\tau)|_{\tau \geq \tau_0} < 0,05$$

Используя и другое определение времени корреляции

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{a}_{\mu}(\tau)|^2 d\tau$$

Предположим, что имеются два колебания $x_1(t)$, $x_2(t)$. Найдем энергию их суммы:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t) dt + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

Первые два интеграла в правой части соответствуют энергии E_1 и E_2 сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ а последний определяет энергию взаимодействия между ними.

Энергия взаимодействия некогерентных колебаний

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 dt = 0$$

Упростим выражение (4.9) можно записать в следующем виде:

$$\dot{x} = \dot{x}_{\omega_1} \cos \omega_1 t + \dot{x}_{\omega_2} \cos \omega_2 t + 2\dot{x}_{\omega_1 \omega_2} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \quad (4.10)$$

Запишем, исходное модулированное колебание в следующем виде:

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t + \Theta(t) = \text{Re} \{ A(t) e^{j\omega_0 t} \} \quad (4.11)$$

где ω_0 – некоторая центральная частота колебания.

Сдвинутые по времени τ и смещенные по частоте на Ω колебания записываются так

$$x_{\omega_0 \Omega}(t) = A(t) \cos \omega_0 t + \Omega t + \tau + \Theta(t) = \text{Re} \{ A(t) e^{j\omega_0 t} \} + \text{Re} \{ A(t) e^{j(\omega_0 + \Omega)t + j\tau} \} \quad (4.12)$$

Выражения (4.11) и (4.12) можно переписать в ином виде, воспользовавшись понятием комплексной огибающей сигнала:

$$x(t) = \text{Re} \{ A(t) e^{j\omega_0 t} \}, \quad (4.13)$$

$$x_{\omega_0 \Omega}(t) = \text{Re} \{ A(t) e^{j\omega_0 t} + A(t) e^{j(\omega_0 + \Omega)t + j\tau} \} \quad (4.14)$$

где $A(t) = A(t) e^{j\omega_0 t}$, где $A(t) + A(t) e^{j\Omega t + j\tau} = A(t) e^{j\omega_0 t} + A(t) e^{j(\omega_0 + \Omega)t + j\tau}$ – комплексные огибающие соответствующих сигналов.

Для дальнейших выкладок удобно перейти к комплексному представлению колебаний:

$$x(t) = \text{Re}\{X(\omega) e^{j\omega t}\} \text{ и } X(\omega) = \text{Re}\{X(\omega) + jY(\omega)\} e^{j\omega_0 t} + \text{Re}\{X(\omega) - jY(\omega)\} e^{-j\omega_0 t}.$$

действительные части которых соответствуют $x(t)$ и $X(\omega)$.

Найдем конечную корреляционную функцию комплексного процесса $X(t)$ с учетом сдвига по времени и частоте:

$$\begin{aligned} R_X(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(t+\tau) X^*(t) e^{j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}\{X(\omega + \omega_0) e^{j(\omega + \omega_0)\tau}\} + \text{Re}\{X(\omega - \omega_0) e^{j(\omega - \omega_0)\tau}\} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re}\{X(\omega + \omega_0) e^{j\omega\tau}\} + \text{Re}\{X(\omega - \omega_0) e^{j\omega\tau}\} d\tau \end{aligned} \quad (4.15)$$

Данное выражение определяет так называемую обобщенную корреляционную функцию сигнала.

Модуль выражения (1.70)

$$|R_X(t, \omega)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 + |X(\omega - \omega_0)|^2 d\tau \quad (4.16)$$

Называется двумерной корреляционной функцией. Ее можно пронормировать в соответствии с выражением

$$R_X(t, \omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t, \omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t, 0) d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 + |X(\omega - \omega_0)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.17)$$

Для того чтобы от $R_X(t, \omega)$ перейти к корреляционной функции исходного колебания $R_X(t) = \text{Re}\{X(\omega) \cos(\omega_0 t) + Y(\omega) \sin(\omega_0 t)\}$, необходимо положить в (4.15) $\omega = 0$ и выделить вещественную часть функции $R_X(t, 0)$.