





Неопределённый интеграл.

Первообразная.

Задача дифференциального исчисления: по данной функции найти её производную.

Задача интегрального исчисления: найти функцию, зная её производную.

- Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для любого x из этого промежутка справедливо равенство $F'(x)=f(x)$.

Пример 1. Найти первообразные для функций:

$$1) \quad f(x) = 3x^2 \quad \rightarrow \quad F(x) = x^3 \quad \forall x \in R, \quad (x^3)' = 3x^2$$

$$2) \quad f(x) = x^5 \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 \quad \forall x \in R, \quad \left(\frac{1}{6}x^6\right)' = x^5$$

$$3) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad F(x) = \ln|x| \quad \forall x \in R \setminus \{0\}$$

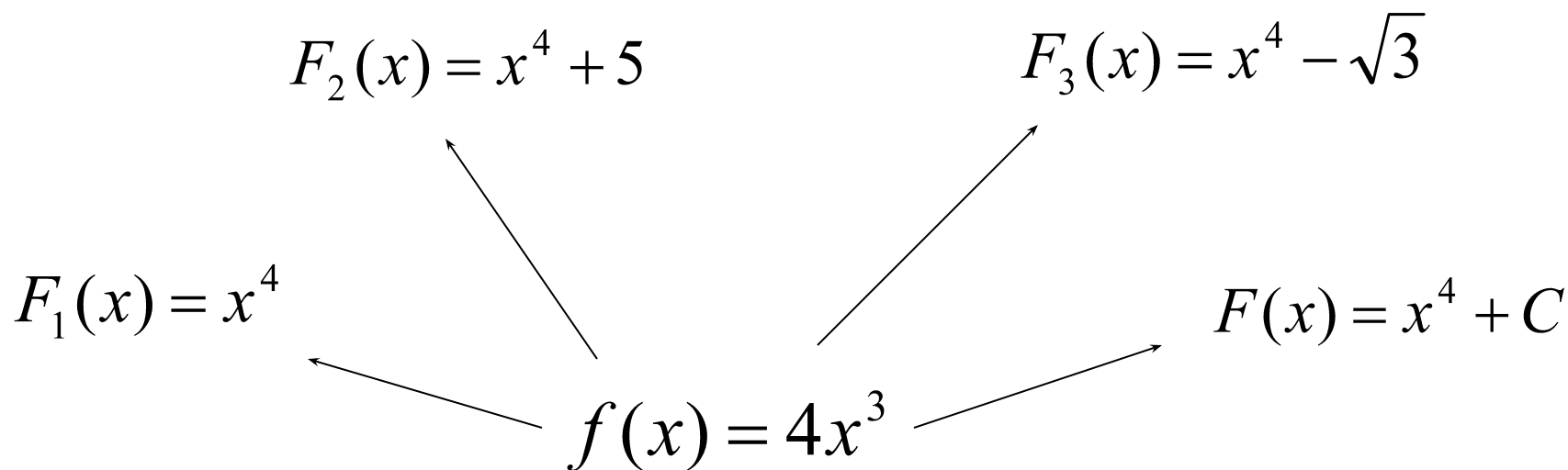
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty) \quad \rightarrow \quad F(x) = \ln x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty; 0) \quad \rightarrow \quad F(x) = \ln(-x), \quad (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная?

Теорема. Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нём первообразную.

Найти первообразную для функции $f(x)=4x^3$.



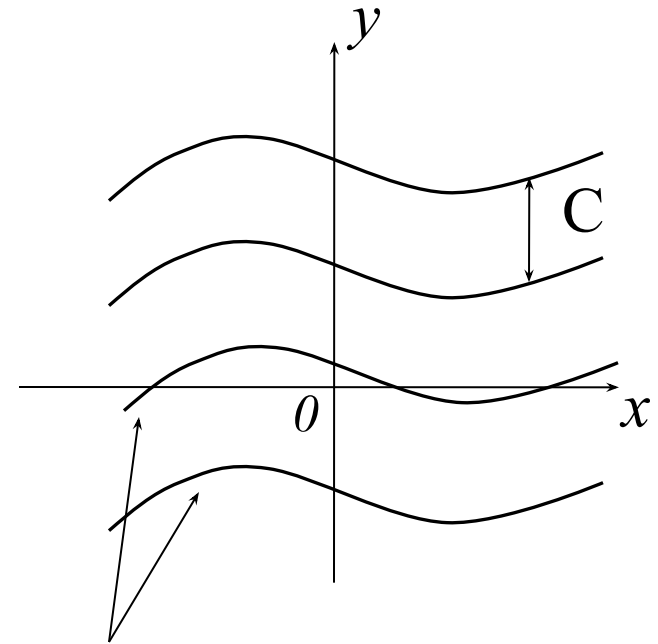
Т.о. функция $f(x)=4x^3$, $x \in R$ имеет бесконечное множество первообразных.

Теорема.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид $F(x)+C$, где $C \in \mathbb{R}$.

Геометрически:

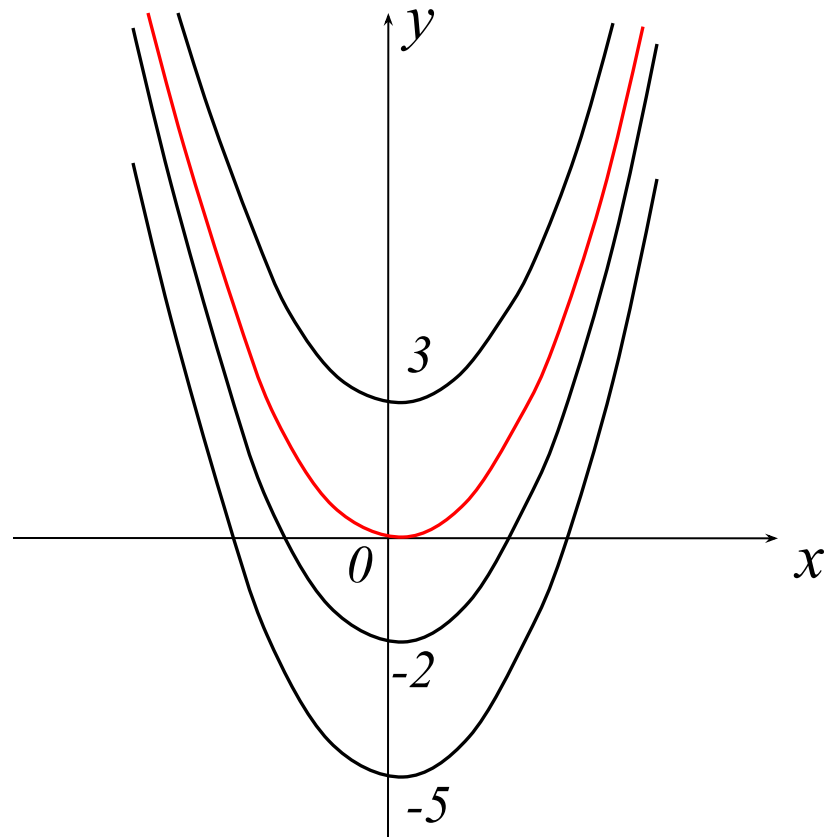
$F(x)+C$ представляет собой семейство кривых, получаемых из каждой из них параллельным переносом вдоль оси OY .



интегральная кривая

Пример 2. Найти все первообразные функции $f(x)=2x$ и изобразить их геометрически.

$$F(x) = x^2 + C$$



Неопределённый интеграл.

- Множество всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на некотором промежутке называется **неопределённым интегралом** и обозначается символом $\int f(x) dx$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x) dx$ - подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

\int - знак неопределённого интеграла

$F(x)+C$ – множество всех первообразных

C – постоянная интегрирования

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**, а раздел математики- **интегральным исчислением**.

Свойства неопределённого интеграла.

- 1^0 . Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$$

Доказательство:

$$d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = F'(x) dx = f(x) dx$$

$$\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

То есть правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Равенство $\int(3x^2 + 4)dx = x^3 + 4x + C$ верно, так как

$$(x^3 + 4x + C)' = 3x^2 + 4$$

- 2⁰. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е

$$\int d F(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\int d F(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

- 3⁰. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Доказательство: воспользуемся свойством 1⁰.

$$\left(\int (f(x) \pm g(x)) dx \right)' = f(x) \pm g(x)$$

$$\left(\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' \pm \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) \pm g(x)$$

- 4⁰. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad a \neq 0$$

Доказательство: воспользуемся свойством 1⁰:

$$\left(\int a \cdot f(x) dx \right)' = a \cdot f(x)$$

$$\left(a \cdot \int f(x) dx \right)' = a \cdot \left(\int f(x) dx \right)' = a \cdot f(x)$$

Таблица интегралов.

1) $\int 0 dx = C, \quad C - const$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

В частности: $\int dx = x + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ В частности: $\int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$9) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

В частности:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$$

В частности:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$11) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad a \neq 0$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Основные методы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования.

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int(2x^4 + 3\sin x - 5e^x)dx$

$$\int(2x^4 + 3\sin x - 5e^x)dx = \int 2x^4 dx + \int 3\sin x dx - \int 5e^x dx =$$

$$= 2 \cdot \int x^4 dx + 3 \cdot \int \sin x dx - 5 \cdot \int e^x dx = 2 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + 3 \cdot (-\cos x) + C_2 - 5 \cdot e^x + C_3 =$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - 3\cos x - 5e^x + C, \quad C = C_1 + C_2 + C_3$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

$$\int \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = 2 \cdot \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = 2 \cdot \int x^{\frac{7}{6}} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13} \cdot \sqrt[6]{x^{13}} + C = \frac{12}{13} \cdot x^2 \cdot \sqrt[6]{x} + C$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{2+x^4}{x} dx$

$$\int \frac{2+x^4}{x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{x^4}{x} \right) dx = \int \frac{2}{x} dx + \int x^3 dx =$$

$$= 2 \cdot \int \frac{dx}{x} + \int x^3 dx = 2 \cdot \ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int 3^x \cdot 4^{2x} dx$

$$\int 3^x \cdot 4^{2x} dx = \int 3^x \cdot 16^x dx = \int 48^x dx = \frac{48^x}{\ln 48} + C$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \\ &= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{25 + 4x^2}$

$$\int \frac{dx}{25 + 4x^2} = \int \frac{dx}{4 \cdot \left(\frac{25}{4} + x^2 \right)} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2} \right)^2 + x^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \arctan \frac{2x}{5} + C = \frac{1}{10} \arctan \frac{2x}{5} + C$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \underline{x - \arctan x + C} \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \cot^2 x dx$

$$\begin{aligned}\int \cot^2 x dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = \underline{\underline{-\cot x - x + C}}\end{aligned}$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - x} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - x} dx &= \int \frac{(x^3 - 1) - 3x \cdot (x - 1)}{x \cdot (x - 1)} dx = \\ &= \int \frac{(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) - 3x \cdot (x - 1)}{x \cdot (x - 1)} dx = \int \frac{(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{x \cdot (x - 1)} dx = \\ &= \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int x dx - 2 \cdot \int dx + \int \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C \end{aligned}$$

Пример 12. Вычислить интеграл

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)} dx$$

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \arctan x + C = -\frac{1}{x} + \arctan x + C$$
