Неопределённый интеграл.

Первообразная.

Задача дифференциального исчисления: по данной функции найти её производную.

Задача интегрального исчисления: найти функцию, зная её производную.

- Функция $\mathrm{F}(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для любого x из этого промежутка справедливо равенство $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

Пример 1. Найти первообразные для функций:

$$1)\quad f(x)=3x^2 \quad\to\quad F(x)=x^3 \quad \forall x\in R,\quad \left(x^3\right)'=3x^2$$

$$2)\quad f(x)=x^5 \quad\to\quad F(x)=\frac{1}{6}x^6 \quad \forall x\in R,\quad \left(\frac{1}{6}x^6\right)'=x^5$$

$$3)\quad f(x)=\frac{1}{x} \quad\to\quad F(x)=\ln|x| \quad \forall x\in R\setminus\{0\}$$

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad x\in(0;+\infty) \quad\to\quad F(x)=\ln x,\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad x\in(-\infty;0) \quad\to\quad F(x)=\ln(-x),\quad (\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

Для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная?

Теорема. Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нём первообразную.

Найти первообразную для функции $f(x)=4x^3$.

$$F_2(x) = x^4 + 5$$

$$F_3(x) = x^4 - \sqrt{3}$$

$$F_1(x) = x^4$$

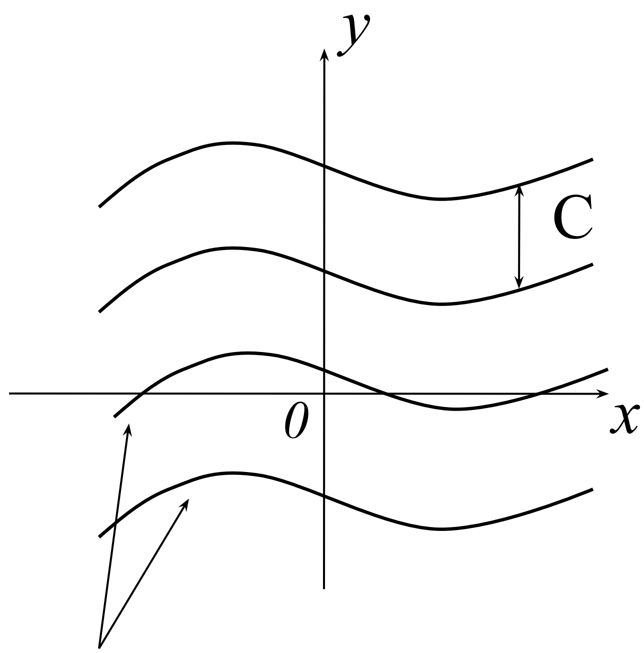
$$F(x) = x^4 + C$$

$$f(x) = 4x^3$$

Т.о. функция $f(x)=4x^3$, $x \in R$ имеет бесконечное множество первообразных.

Теорема.

Если функция F(x) является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид F(x)+C, где C$\in$R.



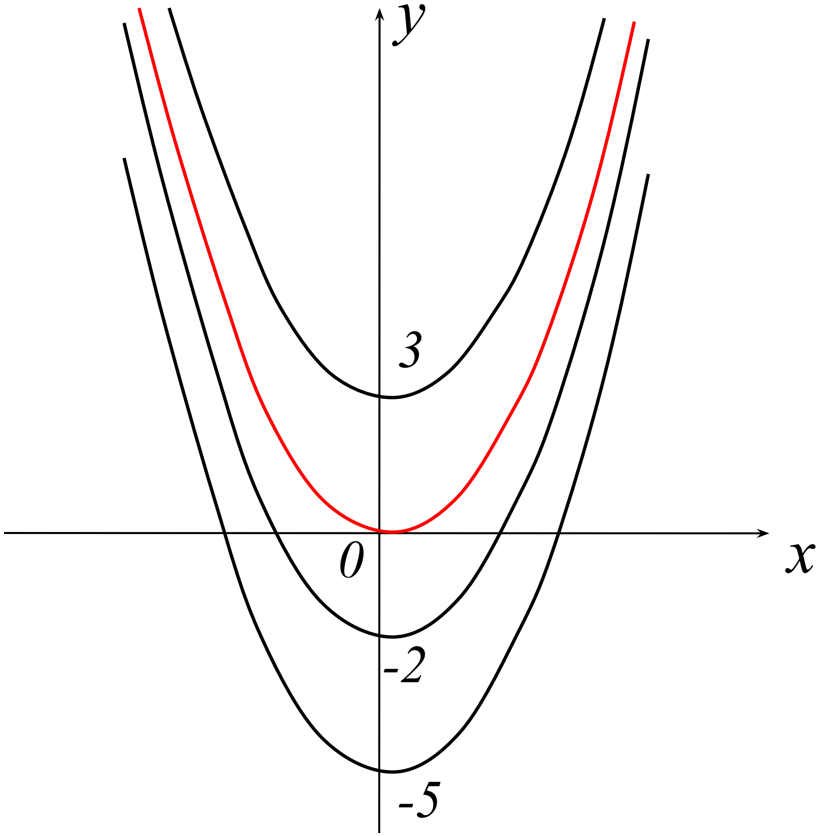
Геометрически:

F(x)+C представляет собой семейство кривых, получаемых из каждой из них параллельным переносом вдоль оси OY.

интегральная кривая

Пример 2. Найти все первообразные функции $f(x)=2x$ и изобразить их геометрически.

$$F(x) = x^2 + C$$



Неопределённый интеграл.

- Множество всех первообразных F(x)+C функции $f(x)$ на некотором промежутке называется неопределённым интегралом и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, т.е.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

$\int$ - знак неопределённого интеграла

F(x)+C – множество всех первообразных

C – постоянная интегрирования

Процесс нахождения первообразной функции называется интегрированием, а раздел математики- интегральным исчислением.

Свойства неопределённого интеграла.

- 1^0. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Доказательство:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = d\,F(x) + d\,C = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

То есть правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Равенство $\int\left(3x^2 + 4\right)dx = x^3 + 4x + C$ верно, так как

$$\left(x^3 + 4x + C\right)' = 3x^2 + 4$$

- 2^0. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е

$$\int d\,F(x) = F(x) + C$$

Доказательство.

$$\int d\,F(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- 3^0. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Доказательство: воспользуемся свойством 1^0.

$$\left(\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

- 4^0. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx\,, \quad a \neq 0$$

Доказательство: воспользуемся свойством 1^0:

$$\left(\int a \cdot f(x)\,dx\right)' = a \cdot f(x)$$

$$\left(a \cdot \int f(x)\,dx\right)' = a \cdot \left(\int f(x)\,dx\right)' = a \cdot f(x)$$

Таблица интегралов.

1) $\int 0dx = C, \quad C - const$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ В частности: $\int dx = x + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ В частности: $\int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

9) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

В частности: $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$

В частности: $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

11) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad a \neq 0$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Основные методы интегрирования.

Метод непосредственного интегрирования.

Непосредственным интегрированием называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx$

$$\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx=\int 2x^4dx+\int 3\sin x\,dx-\int 5e^x dx=$$

$$=2\cdot\int x^4dx+3\cdot\int\sin x\,dx-5\cdot\int e^x dx=2\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1}+C_1+3\cdot(-\cos x)+C_2-5\cdot e^x+C_3=$$

$$\underline{=\frac{2}{5}x^5-3\cos x-5e^x+C,}\qquad C=C_1+C_2+C_3$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{2x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

$$\int \frac{2x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = 2\cdot\int x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = 2\cdot\int x^{\frac{7}{6}}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13}\cdot\sqrt[6]{x^{13}} + C = \frac{12}{13}\cdot x^2\cdot\sqrt[6]{x} + C$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{2+x^4}{x} dx$

$$\int \frac{2+x^4}{x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{x^4}{x} \right) dx = \int \frac{2}{x} dx + \int x^3 dx =$$

$$= 2 \cdot \int \frac{dx}{x} + \int x^3 dx = 2 \cdot \ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int 3^x \cdot 4^{2x}\, dx$

$$\int 3^x \cdot 4^{2x}\, dx = \int 3^x \cdot 16^x\, dx = \int 48^x\, dx = \frac{48^x}{\ln 48} + C$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{25+4x^2}$

$$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{4\cdot\left(\frac{25}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\arctan\frac{2x}{5} + C = \frac{1}{10}\arctan\frac{2x}{5} + C$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = \underline{x - \arctan x + C}$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \cot^2 x\,dx$

$$\int \cot^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = \underline{-\cot x - x + C}$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-x}dx$

$$\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-x}dx = \int \frac{(x^3-1)-3x\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}dx =$$

$$= \int \frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)-3x\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}dx = \int \frac{(x-1)\cdot(x^2-2x+1)}{x\cdot(x-1)}dx =$$

$$= \int \frac{x^2-2x+1}{x}dx = \int\left(\frac{x^2}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int x\,dx - 2\cdot\int dx + \int\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int \frac{1+2x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)} dx$

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + \arctan x + C = -\frac{1}{x} + \arctan x + C$$